УДК 517.956.3

ОПИСАНИЕ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ И ОГРАНИЧЕННОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ ПРИ УСЛОВИЯХ ТРАНСМИССИИ ТИПА «ЖИДКОГО» ТРЕНИЯ*

Н. В. Глотов, В. Л. Прядиев

*Воронежский государственный технический университет,
Воронежский государственный университет*

Рассматривается волновое уравнение

$$u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t),$$

в котором x — точка геометрического графа Γ, $t>0$, при условиях трансмиссии, моделирующих "жидкое" трение в узлах колеблющейся сетки из струн. С помощью формулы Даламбера описание решений сводится к описанию решений некоторого векторного функционально-дифференциального уравнения, координаты которых суть граничные режимы для волновых уравнений на ребрах геометрического графа. Для случая ребер единичной длины получено описание решения этого функционально-дифференциального уравнения. Приведены примеры использования этого описания для исследования вопроса о стабилизации решений указанного волнового уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье приводятся некоторые результаты, полученные нами при исследовании волнового уравнения, заданного на ребрах геометрического графа Γ, при условиях трансмиссии (в вершинах Γ) следующего вида:

$$\sum_{h\in D(a)} u_h^+(a,t) = k(a)u_t(a,t). \qquad (1)$$

Здесь u обозначает решение названного уравнения, a — вершину Γ, $D(a)$ — множество допустимых в точке a единичных векторов, $u_h^+(a,t)$ — правую производную функции $u(\cdot,t)$ в точке a по направлению h, $u_t(a,t)$ — производную по t функции $u(a,t)$; $k(a)$ — некоторое неотрицательное число, поставленное в соответствие вершине a.

Если в (1) положить все числа $k(a)$ равными нулю, то мы получим условия трансмиссии

$$\sum_{h\in D(a)} u_h^+(a,t) = 0, \qquad (2)$$

при которых волновое уравнение на ребрах геометрического графа изучалось многими авторами. Далее, останавливаясь только на проблеме описания структуры множества решений, мы можем констатировать наличие двух основных направлений исследований. Первое из направлений основано на методе разделения переменных и подразумевает исследование соответствующей прямой спектральной задачи на геометрическом графе. Целостная, но неполная картина достижений этого направления дана в [1]**. Другое направление связано с поиском решений в форме, подобной форме Даламбера: основные достижения в этом направлении отражены в [3]—[6].

Если же в (1) заменить $u_t(a,t)$ на $u(a,t)$, то получим условия трансмиссии

$$\sum_{h\in D(a)} u_h^+(a,t) = k(a)u(a,t) \qquad (3)$$

более общие, нежели (2). Достаточно близкие результаты исследования соответствующей прямой спектральной задачи в [1], а результаты направления, связанного с получением решения в форме, аналогичной форме Даламбера, можно найти в [7] и в [8]***.

Подход к описанию решений, изложенный в [8] для случая (3), мы переносим в настоящей статье на случай условий трансмиссии (1). Этот подход основан на применении формулы Даламбера для одномерного волнового уравнения, каковым является рассматриваемое в настоящей статье уравнение на каждом ребре геометрического графа. В конце статьи мы показываем на примерах возможности этого подхода при изучении вопроса о стабилизации решений.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00049).

** Соответствующая обратная спектральная задача изучена пока в меньшей степени — см. Introduction в [2].

*** Надо отметить, что результаты [7] носят частный характер, а результаты [8] носят хоть и общий, но подготовительный характер.

2. ОСНОВНОЙ ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть Γ — геометрический граф. Будем рассматривать далее лишь случай, когда Γ есть связное объединение конечной совокупности прямолинейных отрезков из $\mathbf{R}^n$. Для каждого $x \in \Gamma$ определим множество $D(x) := \{h \in R^n \mid \|h\| = 1 \text{ и } (x + \varepsilon h) \in \Gamma$ для достаточно малых $\varepsilon > 0\}$. Для функции $v : \Gamma \to \mathbf{R}$ определим $v_h^+(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \dfrac{v(x + \varepsilon h) - v(x)}{\varepsilon}$ (для $x \in \Gamma$ и $h \in D(x)$). Если $h \in D(x)$, то для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено и $h \in D(x + \varepsilon h)$; поэтому можно определять $v_{hh}^{++}(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \dfrac{v_h^+(x + \varepsilon h) - v_h^+(x)}{\varepsilon}$. Пусть $|D(x)| = 2$ (т. е. $D(x)$ двухэлементно) и $\sum\limits_{h \in D(x)} v_h^+(x) = 0$; если при этом производные $v_{hh}^{++}(x)$ совпадают для обоих $h \in D(x)$, то их общее значение будем обозначать через $v''(x)$, называя его второй производной функции v в точке x. Если $u : \Gamma \times T \to \mathbf{R}$ (T — связное подмножество $\mathbf{R}$) и при некотором $t \in T$ функция $u(\cdot, t)$ имеет вторую производную в точке x, то эту производную будем обозначать через $u_{xx}(x,t)$.

Выделим особо (и зафиксируем) конечное подмножество $\mathcal{J}(\Gamma)$ геометрического графа Γ, которое обязательно содержит в себе (возможно, строго содержит) объединение двух множеств: $\{x \in \Gamma \mid |D(x)| \neq 2\}$ и $\{x \in \Gamma \mid |D(x)| = 2 \wedge (h \in D(x) \Rightarrow (-h) \notin D(x))\}$.

Точки из $\mathcal{J}(\Gamma)$ будем называть вершинами Γ. Обозначим: $R(\Gamma) = \Gamma \setminus \mathcal{J}(\Gamma)$. Компоненты связности множества $R(\Gamma)$ будем называть ребрами геометрического графа Γ.

Основной объект исследования в настоящей работе — это уравнение

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \ (x \in R(\Gamma), t > 0). \tag{4}$$

При этом будет предполагаться, что искомая функция $u(x,t)$ определена и непрерывна на $\Gamma \times [0;+\infty)$ по совокупности переменных и удовлетворяет условиям: во-первых,

$$\sum_{h \in D(x)} u_h^+(x,t) = k(x) u_t(x,t) \ (x \in \mathcal{J}(\Gamma), t > 0), \tag{5}$$

где $k(x)$ — заданные неотрицательные числа, во-вторых, для любого интервала $(a;b)$, являющегося ребром Γ и для любого $t_0 > 0$ функция $v(y,t) = u(a + y\|b-a\|^{-1}(b-a), t)$ обладает на $(0;\|b-a\|) \times (0;t_0)$ равномерно непрерывными производными v_{yy} и v_{tt}. Система (4), (5) при $k(x) > 0$ может рассматриваться, например, как модель малых колебаний растянутой сетки из струн с условиями так называемого «жидкого» трения в узлах. Для системы (4), (5) будем рассматривать начальные условия

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = 0 \ (x \in \Gamma). \tag{6}$$

Из (6) следует, что φ непрерывна на Γ. Устремив в (5) t к нулю, получим условия трансмиссии для φ

$$\sum_{h \in D(x)} \varphi_h^+(x) = 0 \ (x \in \mathcal{J}(\Gamma)).$$

Кроме того, предполагаем всегда, что φ удовлетворяет еще условиям:

первое: на $R(\Gamma)$ определена и непрерывна φ'', второе:

$$\begin{aligned} &\forall (x \in J(\Gamma)) \forall (h \in D(x)) [\varphi_{hh}^{++}(x) = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \varphi''(x + \varepsilon h)], \end{aligned} \tag{8}$$

причем последний предел существует и конечен,

третье:

$$\begin{aligned} &\forall (x \in \mathcal{J}(\Gamma)) \forall (h, \eta \in D(x)) \\ &[\varphi_{hh}^{++}(x) = \varphi_{\eta\eta}^{++}(x)], \end{aligned} \tag{9}$$

четвертое:

$$\begin{aligned} &((x \in J(\Gamma)) \wedge (k(x) \neq 0)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\varphi_{hh}^{++}(x) = 0] \forall (h \in D(x)). \end{aligned} \tag{10}$$

Ниже будет показано, что эти четыре условия гарантируют должную регулярность $u(x,t)$.

3. РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ, СВОДЯЩЕЕ ЗАДАЧУ (4)—(6) К НАБОРУ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ

Две различные вершины a и b из $\mathcal{J}(\Gamma)$ назовем смежными, если интервал (a,b) является ребром Γ. Если a и b смежны, то будем писать: $a \leftrightarrow b$.

Лемма 1. *Пусть существует набор* $\{\mu_a(t)\}_{a \in J(\Gamma)}$ *функций из* $C^2[0;+\infty)$ *такой, что для любой пары смежных вершин* a *и* b *из* $\mathcal{J}(\Gamma)$ *задача*

$$\begin{cases} v_{yy}(y,t) = v_{tt}(y,t) \ \ (0 < y < \|b-a\|, t > 0), \\ v(0,t) = \mu_a(t), v(\|b-a\|, t) = \mu_b(t) \ \ (t \geq 0), \\ v(y,0) = \varphi\left(a + \dfrac{y}{\|b-a\|}(b-a)\right), \\ v_t(y,0) = 0 \ \ (0 \leq y \leq \|b-a\|) \end{cases} \tag{11}$$

имеет классическое решение $v(y,t,a,b)$*, причем для любой* $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$

$$\sum_{b|b\leftrightarrow a} v_y(0,t;a,b) = k(a)(\mu_a)'(t)(t \geq 0). \qquad (12)$$

Тогда функция $u(x,t)$, определяемая при $x \in [a;b]$, где $a \leftrightarrow b$, равенством $u(x,t) = v(\|x-a\|,t;a,b)$, является решением задачи (4)—(6). Верно и обратное: если $u(x,t)$ является решением задачи (4)—(6), то существует набор функций $\{\mu_a(t)\}_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}$, обладающий указанным свойством, причем для любых смежных вершин a и b решение задачи (11) связано с $u(x,t)$ равенством $v(y,t;a,b) = u(a + y\|b-a\|^{-1}(b-a),t)$.

Доказательство получается непосредственной проверкой.

Из леммы 1 очевидным образом вытекает, в частности, что единственность решения задачи (4)—(6) равносильна единственности набора $\{\mu_a(t)\}_{a\in J(\Gamma)}$, удовлетворяющего условиям леммы 1.

Переформулируем теперь условия леммы 1, исключая из (12) $v_y(0,t;a,b)$ за счет возможности выразить решение (11) через φ, μ_a и μ_b.

Пусть $a \leftrightarrow b$. Обозначим через $\varphi_{a,b}(y)$ нечетную и $2\|b-a\|$-периодическую функцию, определенную на $\mathbf{R} \setminus (\|b-a\|\mathbf{Z})$ ($\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел) и совпадающую с $\varphi(a + y\|b-a\|^{-1}(b-a))$ на $(0;\|b-a\|)$. Производная $(\varphi_{a,b})'$ доопределяема по непрерывности в точках $\|b-a\|\mathbf{Z}$; это доопределение обозначим через $\psi_{a,b}$.

Лемма 2. *Набор $\{\mu_a\}_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}$ функций из $C^2[0;+\infty)$ удовлетворяет условию леммы 1 тогда и только тогда, когда этот набор удовлетворяет системе уравнений*

$$\begin{gathered}(|\,D(a)\,| + k(a))(\mu_a)'(t) = \\ = \sum_{b|b\leftrightarrow a}\left\{2\cdot\sum_{p=0}^{m_1(t,\|b-a\|)}(\mu_b)'(t-(2p+1)\|b-a\|) - \right. \\ \left. -2\cdot\sum_{p=1}^{m_2(t,\|b-a\|)}(\mu_a)'(t-2p\|b-a\|) + \psi_{a,b}(t)\right\} \\ (t \geq 0), a \in J(\Gamma)\end{gathered} \qquad (13)$$

и начальным условиям

$$\mu_a(0) = \varphi(a), \;\; a \in \mathcal{J}(\Gamma); \qquad (14)$$

здесь $m_1(t,l)$ есть целая часть числа $(t-l)/(2l)$, а $m_2(t,l)$ есть целая часть $t/(2l)$.

Доказательство. Пусть $\{\mu_a\}_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}$ — набор функций из $C^2[0;+\infty)$, удовлетворяющий соотношениям (13) и (14). Чтобы доказать, что для любой пары смежных вершин a и b из $\mathcal{J}(\Gamma)$ задача (11) имеет решение, необходимо и достаточно доказать, что для любой вершины $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ выполнены (помимо (11)) условия:

$$(\mu_a)'(0) = 0, \qquad (15)$$

$$\begin{cases} k(a) = 0 \Rightarrow \forall(b \mid b \leftrightarrow a)[(\mu_a)''(0) = (\varphi_{a,b})''(0+)], \\ k(a) \neq 0 \Rightarrow (\mu_a)''(0) = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Из (13), с учетом (14) и (7), следует:

$$\begin{gathered}(|D(a)| + k(a))(\mu_a)'(0) = \\ = \sum_{b|b\leftrightarrow a}\psi_{a,b}(0) = \sum_{h\in D(a)}\varphi_h^+(a) = 0,\end{gathered}$$

а значит, и выполнение (15); теперь, все из того же (13), после дифференцирования обеих частей, получаем, с учетом (8) и (9):

$$\begin{gathered}(|D(a)| + k(a))(\mu_a)''(0) = \\ = \sum_{b|b\leftrightarrow a}(\psi_{a,b})'(0) = \sum_{h\in D(a)}\varphi_{hh}^{++}(a) = |D(a)|\,\varphi_{\eta\eta}^{++}(a)\end{gathered}$$

(η — любой вектор из $D(a)$), что, с учетом (8)—(10), влечет (16).

Остается показать равносильность (12) и (13) при условии, что решения задач (11) существуют. Решение задачи (11) представимо в виде

$$v(y,t;a,b) = f_{a,b}(y+t) + f_{a,b}(y-t), \qquad (17)$$

где $f_{a,b} = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_{a,b} + \mathcal{F}_{\|b-a\|}\mu_a + G_{\|b-a\|}\mu_b$, $\tilde{\varphi}_{a,b}$ — функция, получаемая из $\varphi_{a,b}$ доопределением в точках $\|b-a\|\mathbf{Z}$ средним арифметическим своих предельных значений слева и справа,

$$(G_l\mu)(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=0}^{m_1(y,l)}\mu(y-(2p+1)l), \\ \qquad\qquad y \geq 0 \wedge y \notin l(2\mathbf{N}-1), \\ ((G_l\mu)(y+) + (G_l\mu)(y-))/2, \\ \qquad\qquad y \in l(2\mathbf{N}-1), \\ -(G_l\mu)(-y), \quad y < 0, \end{cases} \qquad (18)$$

($\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел), $(\mathcal{F}_l\mu)(y) = -(G_l\mu)(y-l), y \in \mathbf{R}$. Поэтому левая часть равенства (12) может быть записана в виде (берем во внимание непрерывную дифференцируемость функций $\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_a$ и $\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_b$, а также четность их производных и функции $\psi_{a,b}$):

$$\begin{gathered}\sum_{b|b\leftrightarrow a}\{\psi_{a,b}(t) + 2(\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_b)'(t) - \\ -(\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_a)'(t-\|b-a\|) - \\ -(\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_a)'(t+\|b-a\|)\},\end{gathered}$$

то есть в виде (учитываем теперь, что при $\tau \geq -\|b-a\|$ выполнены равенства $(\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_b)'(\tau) = (\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_b)')(\tau)$ и $(\mathcal{G}_{\|b-a\|}\mu_a)'(\tau) = (\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_a)')(\tau)$):

$$\sum_{b|b\leftrightarrow a}\{\psi_{a,b}(t) + 2(\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_b)')(t) - $$
$$-(\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_a)')(t-\|b-a\|) -$$
$$-(\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_a)')(t+\|b-a\|)\}.$$

Заметим, что в силу (18)

$$\sum_{b|b\leftrightarrow a}(\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_a)')(t+\|b-a\|) = \sum_{b|b\leftrightarrow a}(\mu_a)'(t) +$$
$$+\sum_{b|b\leftrightarrow a}\sum_{p=1}^{m_2(t,\|b-a\|)}(\mu_a)'(t-2p\|b-a\|) =$$
$$= |D(a)|(\mu_a)'(t) + \sum_{b|b\leftrightarrow a}(\mathcal{G}_{\|b-a\|}(\mu_a)')(t-\|b-a\|).$$

Таким образом, равенство (12) приобретает вид:

$$\sum_{b|b\leftrightarrow a}\{\psi_{a,b}(t) + 2(G_{\|b-a\|}(\mu_b)')(t) -$$
$$-2(G_{\|b-a\|}(\mu_a)')(t-\|b-a\|)\} = \quad (19)$$
$$= (|D(a)| + k(a))(\mu_a)'(t) \ (t\geq 0), \ \ a\in J(\Gamma),$$

что, с учетом (18), совпадает с (13).

Лемма 2 доказана.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Леммы 1 и 2 сводят (с помощью представления (17)) решение задачи (4)—(6) к решению задачи (13), (14).

Теорема 1. *Решение задачи* (13), (14) *существует, единственно и дважды непрерывно дифференцируемо на* $[0;+\infty)$.

Доказательство. Существование и заявленную гладкость решения задачи (13), (14) докажем методом шагов. Для этого рассмотрим множество

$$S = \left(\bigcup_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}\left(\bigcup_{b|b\leftrightarrow a}\|b-a\|N\right)\right)\cup\{0\},$$

или короче: $S = LN_0$, где L — множество длин ребер Γ, $N_0 = N\cup\{0\}$. Множество S можно представить в виде: $S=\{s_0, s_1, s_2, ...\}$, где $s_i < s_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2,...)$; отметим, что $s_0 = 0$. На каждом сегменте $[0;s_i]$ $(i\in\mathbf{N})$ определим набор $\{\mu_a^i : [0;s_i]\to\mathbf{R}\}_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}$ следующим образом: 1) $\{\mu_a^1(t)\}_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}$ есть решение задачи

$$(|D(a)| + k(a))(\mu_a^1)'(t) =$$
$$= \sum_{b|b\leftrightarrow a}\psi_{a,b}(t), \ \ (t\in[0;s_1]), \ \ a\in\mathcal{J}(\Gamma), \quad (20_1)$$

$$\mu_a^1(0) = \varphi(a), \ \ a\in\mathcal{J}(\Gamma), \quad (21_1)$$

2) для $i\in\mathbf{N}\setminus\{1\}$ $\mu_a^i(t) = \mu_a^{i-1}(t)$ при $t\in[0;s_{i-1}]$, а сужение набора $\{\mu_a^i(t)\}_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}$ на $[s_{i-1}; s_i]$ есть решение задачи

$$(|D(a)| + k(a))(\mu_a^i)'(t) =$$
$$= \sum_{b|b\leftrightarrow a}\left\{2\cdot\sum_{p=0}^{m_1(t,\|b-a\|)}(\mu_b^{i-1})'(t-(2p+1)\|b-a\|) - \right.$$
$$\left. -2\cdot\sum_{p=1}^{m_2(t,\|b-a\|)}(\mu_a^{i-1})'(t-2p\|b-a\|) + \psi_{a,b}(t)\right\} \quad (20_i)$$
$$(t\in[s_{i-1};s_i]), \ \ a\in\mathcal{J}(\Gamma),$$

$$\mu_a^i(s_{i-1}) = \mu_a^{i-1}(s_{i-1}), \ \ a\in\mathcal{J}(\Gamma). \quad (21_i)$$

Мы докажем, что набор функций $\{\mu_a(t)\}_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}$, определяемый равенствами $\mu_a(t) = \mu_a^i(t)$ $(t\in[s_{i-1};s_i])$, $i\in\mathbf{N}$, и есть решение задачи (13), (14).

Сразу же отметим, что для так определенных функций μ_a выполняются начальные условия (14) и уравнение (13) при $t\in[0;+\infty)\setminus S$. Последнее обстоятельство влечет и равномерную непрерывность вторых производных функций μ_a на каждом интервале $(s_{i-1};s_i)$ $(i\in\mathbf{N})$ — ввиду равномерной непрерывности $(\psi_{a,b})'$ на каждом таком интервале. Для доказательства двукратной непрерывной дифференцируемости на $[0;+\infty)$ функций $\mu_a(t)$ остается показать выполнение (13) в точках S для функций μ_a и непрерывность их вторых производных в этих точках. А для этого достаточно показать, что в каждой точке S существуют односторонние пределы функций $(\mu_a)'$ и $(\mu_a)''$, причем для всех $s\in S\setminus\{0\}$ выполнены равенства

$$(\mu_a)'(s+) = (\mu_a)'(s-), (\mu_a)''(s+) = (\mu_a)''(s-).$$

Из (20_1) и (21_1) в силу (7) имеем

$$(\mu_a)'(0+) = 0, \ \ a\in\mathcal{J}(\Gamma). \quad (22)$$

Дифференцируя теперь (20_1), учитывая условия (8) и (9), придем в случае $k(a) = 0$ к существованию $(\mu_a)''(0+)$, равного общему значению производных $\varphi_{hh}(a)$ $(h\in D(a))$, а в случае $k(a)\neq 0$ — к равенству $(\mu_a)''(0+) = 0$, в силу (10).

Объединяя оба этих случая, можно записать, с учетом того, что $(\varphi_{a,b})''(0+) = 0$ при $k(a)\neq 0$:

$$(\mu_a)''(0+) = (\varphi_{a,b})''(0+) \ (a\in J(\Gamma), b\leftrightarrow a). \quad (23)$$

Дальнейшее рассуждение проведем индукцией по i (номеру точки s_i). Определим $B_=(a) = \{b \mid (b\leftrightarrow a)\wedge(\|b-a\| = s_1)\}$ и $B_{\neq}(a) =$

$= \{b \mid (b \leftrightarrow a) \wedge (\|b-a\| \neq s_1)\}$. Из (20_i) учитывая (22), получим:

$$(|D(a)|+k(a))(\mu_a)'(s_1+) =$$
$$= (|D(a)|+k(a))(\mu_a^2)'(s_1+) =$$
$$= \sum_{b\in B_=(a)} \left\{2(\mu_b^1)'((s_1-\|b-a\|)+)\right\} + \sum_{b|b\leftrightarrow a}\psi_{a,b}(s_1) =$$
$$= 2\cdot\sum_{b\in B_=(a)}(\mu_b^1)'(0+) + \sum_{b|b\leftrightarrow a}\psi_{a,b}(s_1) = \sum_{b|b\leftrightarrow a}\psi_{a,b}(s_1),$$

что равно $(|D(a)|+k(a))(\mu_a)'(s_1-)$ в силу (20_1). Дифференцируя (20_i) и учитывая (23), получим:

$$(|D(a)|+k(a))(\mu_a)''(s_1+) =$$
$$= (|D(a)|+k(a))(\mu_a^2)''(s_1+) =$$
$$= \sum_{b\in B_=(a)}\left\{2(\mu_b^1)''((s_1-\|b-a\|)+)\right\} +$$
$$+\sum_{b|b\leftrightarrow a}(\psi_{a,b})'(s_1+) = 2\cdot\sum_{b\in B_=(a)}(\varphi_{b,a})''(0+) -$$
$$-\sum_{b\in B_=(a)}(\psi_{a,b})'(s_1-) + \sum_{b\in B_{\neq}(a)}(\psi_{a,b})'(s_1) =$$
$$= \sum_{b\in B_=(a)}(\varphi_{b,a})''(0+) + \sum_{b\in B_{\neq}(a)}(\psi_{a,b})'(s_1),$$

В то же время, из (20_1) следует:

$$(|D(a)|+k(a))(\mu_a)''(s_1-) = \sum_{b|b\leftrightarrow a}(\psi_{a,b})'(s_1-) =$$
$$= \sum_{b\in B_=(a)}(\psi_{a,b})'(s_1-) + \sum_{b\in B_{\neq}(a)}(\psi_{a,b})'(s_1) =$$
$$= \sum_{b\in B_=(a)}(\varphi_{b,a})''(0+) + \sum_{b\in B_{\neq}(a)}(\psi_{a,b})'(s_1).$$

Значит, $(\mu_a)''(s_1+) = (\mu_a)''(s_1-)$.

Итак, функции μ_a дважды непрерывно дифференцируемы на $[0;s_2]$. Достаточно доказать теперь, что если μ_a дважды непрерывно дифференцируемы на $[0;s_i]$, где $i \geq 2$, то они дважды непрерывно дифференцируемы и на $[0;s_{i+1}]$, для чего остается показать, что $(\mu_a)'(s_i-) = (\mu_a)'(s_i+)$ и $(\mu_a)''(s_i-) = (\mu_a)''(s_i+)$. В силу определения функций μ_a предположение об их двукратной непрерывной дифференцируемости на $[0;s_i)$ влечет выполнение для всех $t \in [0;s_i) \cup (s_i;s_{i+1})$ равенств

$$(|D(a)|+k(a))(\mu_a)'(t) =$$
$$= \sum_{b|b\leftrightarrow a}\left\{2\cdot\sum_{p=0}^{m_1(t,\|b-a\|)}(\mu_b)'(t-(2p+1)\|b-a\|) -\right.$$
$$\left.-2\cdot\sum_{p=1}^{m_2(t,\|b-a\|)}(\mu_a)'(t-2p\|b-a\|) + \psi_{a,b}(t)\right\},$$
$$a \in \mathcal{J}(\Gamma),$$

правые части которых непрерывны в точке s_i, что сразу приводит к равенству $(\mu_a)'(s_i-) = (\mu_a)'(s_i+)$. Дифференцируя теперь равенство (24) в достаточно малой проколотой окрестности точки $t = s_i$ и переходя к пределам при $t \to s_i \pm$, получим (ниже $B(a) = \{b \mid b \leftrightarrow a \wedge s_i \in \|b-a\|\mathbf{N}\}$, $B_1(a) = \{b \mid b \leftrightarrow a \wedge s_i \in \|b-a\|(2\mathbf{N}-1)\}$, $B_2(a) = \{b \mid b \leftrightarrow a \wedge s_i \in \|b-a\|(2\mathbf{N})\}$ и $p_i = m_1(s_i,\|b-a\|)$):

$$(|D(a)|+k(a))[(\mu_a)''(s_i+) - (\mu_a)''(s_i-)] =$$
$$= 2\cdot\sum_{b\in B_1(a)}\sum_{p=0}^{p_i}(\mu_b)''((s_i-(2p+1)\|b-a\|)+) -$$
$$-2\cdot\sum_{b\in B_1(a)}\sum_{p=0}^{p_i-1}(\mu_b)''((s_i-(2p+1)\|b-a\|)-) -$$
$$-2\cdot\sum_{b\in B_2(a)}\sum_{p=1}^{p_i+1/2}(\mu_a)''((s_i-2p\|b-a\|)+) +$$
$$+2\cdot\sum_{b\in B_2(a)}\sum_{p=1}^{p_i-1/2}(\mu_a)''((s_i-2p\|b-a\|)-) +$$
$$+\sum_{b\in B(a)}(\psi_{a,b})'(s_i+) - \sum_{b\in B(a)}(\psi_{a,b})'(s_i-) =$$
$$= 2\cdot\sum_{b\in B_1(a)}(\mu_b)''(0+) - 2\cdot\sum_{b\in B_2(a)}(\mu_a)''(0+) +$$
$$+2\cdot\sum_{b\in B(a)}(\psi_{a,b})'(s_i+) =$$
$$= 2\cdot\sum_{b\in B_1(a)}\{(\mu_b)''(0+) + (\psi_{a,b})'(s_i+)\} +$$
$$+2\cdot\sum_{b\in B_2(a)}\{-(\mu_a)''(0+) + (\psi_{a,b})'(s_i+)\}.$$

Обе последние суммы равны нулю. В самом деле, если $b \in B_1(a)$, то есть $b \leftrightarrow a$ и $s_i \in \|b-a\|(2\mathbf{N}-1)$, то $(\psi_{a,b})'(s_i+) = -(\varphi''_{b,a})(0+) = -(\mu_b)''(0+)$; если же $b \in B_2(a)$, то есть $b \leftrightarrow a$ и $s_i \in \|b-a\|(2\mathbf{N})$, то $(\psi_{a,b})'(s_i+) = (\varphi''_{a,b})(0+) = (\mu_a)''(0+)$. Равенство $(\mu_a)''(s_i-) = (\mu_a)''(s_i+)$ доказано, а вместе с ним — и включение $\mu_a \in C^2[0;+\infty)$, для каждой $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$.

Остается заметить, что если набор $\{\mu_a(t)\}_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}$ является решением задачи (13), (14), то наборы $\{\mu_a|_{[0;s_i]}(t)\}_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}$, $i = 1,2,3,\ldots$, совпадают с наборами $\{\mu_a^i(t)\}_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}$, причем последние, в силу своего определения, единственны, так как единственны решения начальных задач (20_i), (21_i), $i = 1,2,3\ldots$. Значит, решение задачи (13), (14) единственно.

Теорема доказана.

Следствие. Решение задачи (4)—(6) существует и единственно.

5. СЛУЧАЙ ЕДИНИЧНОЙ ДЛИНЫ РЕБЕР ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ГРАФА

Ниже будем полагать, что длины всех ребер геометрического графа Γ одинаковы и равны 1. Перенумеруем все вершины числами от 1 до $m: \mathcal{J}(\Gamma) = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. Обозначим $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$. Тогда (19) (то есть (13)) можно записать в виде:

$$(|D(c_i)| + k(c_i))(\mu_{c_i})'(t) + \\ + \sum_{j|c_j \leftrightarrow c_i} \{2(\mathcal{G}(\mu_{c_i})')(t-1) - 2(\mathcal{G}(\mu_{c_j})')(t)\} = \\ = \sum_{j|c_j \leftrightarrow c_i} \psi_{c_i,c_j}(t) \ (t \geq 0), \ i = \overline{1,m}. \quad (25)$$

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ — матрица смежности вершин геометрического графа Γ (то есть $a_{ij} = 1$, если $c_j \leftrightarrow c_i$, и $a_{ij} = 0$, если $c_j \not\leftrightarrow c_i$), V — матрица валентностей вершин геометрического графа Γ $(V = diag(v_1, v_2, \ldots, v_m), v_i = |D(c_i)|, = \overline{1,m})$, $K = diag(k(c_1), k(c_2), \ldots, k(c_m))$, $g(t)$ — вектор-функция, i-я компонента которой равна $\sum_{j|c_j \leftrightarrow c_i} \psi_{c_i,c_j}(t), \mu'(t) = ((\mu_{c_1})'(t), (\mu_{c_2})'(t), \ldots, (\mu_{c_m})'(t))^T$. Тогда система уравнений (25) может быть записана в виде (ниже I — тождественный оператор):

$$(((I + 2M\mathcal{G})V - 2A\mathcal{G} + K)\mu')(t) = g(t) \\ (t \geq 0), \quad (26)$$

где $(Mf)(t) = f(t-1)$, а оператор $\mathcal{G}$ на вектор-функциях определяется так же, как и на скалярных, то есть формулой (18). В свою очередь, (26) можно записать в виде:

$$Q(2M\mathcal{G}V - 2A\mathcal{G})\mu' + (V + K)\mu' = Qg, \quad (27)$$

где Q — оператор сужения функции на $[0; +\infty)$.

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{G}^{-1}$, обратный к $\mathcal{G}$, представим в виде: $\mathcal{G}^{-1} = Q(P - M)$, где $(Pf)(t) = f(t+1)$.*

Доказательство получается непосредственной проверкой.

Умножив теперь обе части (27) на V^{-1} слева и обозначив $\nu = \mathcal{G}\mu'$, получим, с учетом леммы 3:

$$Q((2M - 2V^{-1}A) + \\ +(I + V^{-1}K)(P - M))\nu = QV^{-1}g. \quad (28)$$

Если рассматривать (28) поточечно при всех $t \geq 0$, то оператор Q можно опустить:

$$[((2M - 2V^{-1}A) + (I + V^{-1}K) \times \\ \times(P - M))\nu](t) = (V^{-1}g)(t) \ (t \geq 0). \quad (29)$$

Равенство (29) равносильно следующему:

$$\nu(t+1) = (I + V^{-1}K)^{-1}(2V^{-1}[A\nu](t) - \\ -[(I - V^{-1}K)\nu](t-1) + [(V^{-1}g)](t)) \ (t \geq 0). \quad (30)$$

Заметим, что матрица $(I + V^{-1}K)$ — диагональная, с положительными элементами на диагонали, поэтому она обратима.

Случай, когда $K = V$, рассмотрим особо. В этой ситуации (30) примет вид:

$$\nu(t+1) = (V^{-1}A)\nu(t) + \frac{1}{2}(V^{-1}g)(t) \ (t \geq 0). \quad (31)$$

Лемма 4. *Пусть B — $(m \times m)$-матрица, а $q(t)$ — m-мерная функция, заданная на $[0; +\infty)$. Тогда если $v(t)$ — решение уравнения*

$$\nu(t+1) = B\nu(t) + q(t), \quad (32)$$

то для любого $t \in [0;1)$ и любого $n \in \mathbf{N}$ выполнено:

$$\nu(t+n) = B^n\nu(t) + \sum_{p=0}^{n-1} B^p q(t+n-1-p). \quad (33_n)$$

Доказательство. Зафиксируем $t \in [0;1)$. При $n = 1$ равенство (33_n) выполняется в силу (32). Если теперь предположить, что (33_n) выполнено при некотором значении n, то, пользуясь сначала соотношением (32), а затем соотношением (33_n), получаем:

$$\nu(t+n+1) = B\nu(t+n) + q(t+n) =$$

$$= B(B^n\nu(t) + \sum_{p=0}^{n-1} B^p q(t+n-1-p) + q(t+n) =$$

$$= B^{n+1}\nu(t) + \sum_{p=0}^{n} B^p q(t+n-p),$$

то есть равенство (33_{n+1}).

Тем самым лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mu(t)$ есть решение (26) и $K = V$. Тогда для любого $t \in [0;1)$ и любого $n \in \mathbf{N}$ выполнено:*

$$\mu'(t+n) = \frac{1}{2}(V^{-1}A)^{n-1}[V^{-1}g(1-t) + \\ +V^{-1}A\,V^{-1}g(t)]. \quad (34)$$

Кроме того, для $t \in [0;1)$ выполнено $\mu'(t) = \frac{1}{2}V^{-1}g(t)$.

Доказательство. Из (31) в силу леммы 4 и леммы 3 следует, что для $t \in [0;1)$ и $n \in \mathbf{N}$ имеет место (учитываем также 2-периодичность функции $g(t)$) равенство нулю $\nu(t) = (G\mu')(t)$ при $t \in [0;1)$.

$$\mu'(t+n) = \nu(t+n+1) - \nu(t+n-1)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n}(V^{-1}A)^p[V^{-1}g](t+n-p) -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-2}(V^{-1}A)^p[V^{-1}g](t+n-p) =$$
$$= \frac{1}{2}(V^{-1}A)^{n-1}[V^{-1}g(t+1) + V^{-1}A\,V^{-1}g(t)],$$

откуда ввиду равенства $g(1+t) = g(1-t)$, верного в силу определения $g(t)$, и следует (34). Равенство $\mu'(t) = \frac{1}{2}V^{-1}g(t)$, при $t \in [0;1)$, следует из (26) ввиду того, что $(G\mu')(t) = 0$ при $t \in [0;1)$.

Теорема 2 доказана.

Вернемся к рассмотрению случая произвольного соотношения между V и K. Обозначим $\alpha = (I + V^{-1}K)^{-1}(2V^{-1}A)$, $\gamma = -(I + V^{-1}K)^{-1}(I - V^{-1}K)$, $\hat{g}(t) = [(I + V^{-1}K)^{-1}V^{-1}g](t)$, или, что то же самое, $\alpha = 2(K+V)^{-1}A, \gamma = (K-V)(K+V)^{-1}$, $\hat{g}(t) = [(K+V)^{-1}g](t)$.

Лемма 5. *Пусть матрица δ есть решение уравнения $\delta(\alpha+\delta) = \gamma$, причем матрицы α и δ перестановочны. Тогда решение уравнения (30), обнуляющееся во всех точках промежутка $[-1;1)$, дается формулой:*

$$\nu(t+n) = \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-p-1}(-1)^p\delta^p(\alpha+\delta)^j \times$$
$$\times\hat{g}(t+n-1-p-j) \ (t \in [0;1), \ n \in \mathbf{N}).$$

Доказательство. В силу условия леммы, уравнение (30) можно переписать в виде:

$$\begin{gathered}\nu(t+1) + \delta\nu(t) = (\alpha+\delta)(\nu(t) + \\ +\delta\nu(t-1)) + \hat{g}(t) \ (t \ge 0)\end{gathered} \qquad (35)$$

Обозначим: $æ(t) = \nu(t) + \delta\nu(t-1)$. Тогда (35) примет вид:

$$æ(t+1) = (\alpha+\delta)\,æ(t) + \hat{g}(t) \ (t \ge 0).$$

Воспользовавшись леммой 4, получим

$$\begin{gathered}æ(t+n) = (\alpha+\delta)^n\,æ(t) + \sum_{p=0}^{n-1}(\alpha+\delta)^p \times \\ \times\hat{g}(t+n-1-p) \ (t \in [0;1), \ n \in \mathbf{N}).\end{gathered} \qquad (36)$$

Выразим теперь ν через $æ$. Полагая $t \in [0;1)$ и $n \in \mathbf{N}$, воспользовавшись леммой 4, получим:

$$\nu(t+n) = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\delta^p\,æ(t+n-p) +$$
$$+(-1)^n\delta^n\nu(t),$$

что, с учетом (36), может быть записано в виде:

$$\nu(t+n) = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\delta^p((\alpha+\delta)^{n-p}\,æ(t) +$$
$$+\sum_{j=0}^{n-p-1}(\alpha+\delta)^j\hat{g}(t+n-p-1-j)) +$$
$$+(-1)^n\delta^n\nu(t) = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p(\alpha+\delta)^{n-p}\,æ(t) +$$
$$+\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-p-1}(-1)^p\delta^p(\alpha+\delta)^j\hat{g}(t+n-p-$$
$$-1-j) + (-1)^n\delta^n\nu(t).$$

Это и доказывает лемму, так как $\nu(t) \equiv 0$ на $[-1;1)$ (что, в частности, влечет равенство нулю $æ(t)$ при $t \in [0;1)$).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 5. Тогда решение уравнения* (26) *определяется равенством:*

$$\begin{gathered}\mu'(t+n) = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\delta^p(\alpha+\delta)^{n-p-1}\hat{g}(t+1) + \\ +\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\delta^p(\alpha+\delta)^{n-p}\hat{g}(t).\end{gathered} \qquad (37)$$

Доказательство. Так как $\nu(t) = (G\mu')(t)$, то $\mu'(t+n) = (Q(P-M)\nu)(t+n) = (Q\nu)(t+n+1) - (Q\nu)(t+n-1)$ $(t \in [0;1), n \in \mathbf{N})$. Так как $t \in [0;1)$, то оператор Q можно опустить. Тогда, в силу теоремы 3 и с учетом 2-периодичности функции $\hat{g}$,

$$\mu(t+n) = \nu(t+n+1) - \nu(t+n-1) =$$
$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-p}(-1)^p\delta^p(\alpha+\delta)^j\hat{g}(t+n-p-j) -$$
$$-\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-p-2}(-1)^p\delta^p(\alpha+\delta)^j\hat{g}(t+n-p-j) =$$
$$= \sum_{p=n-1}^{n}\sum_{j=0}^{n-p}(-1)^p\delta^p(\alpha+\delta)^j\hat{g}(t+n-$$
$$-p-j) + \sum_{p=0}^{n-2}\sum_{j=n-p-1}^{n-p}(-1)^p\delta^p(\alpha+\delta)^j\hat{g}(t+$$
$$+n-p-j) = \sum_{j=0}^{1}(-1)^{n-1}\delta^{n-1}(\alpha+\delta)^j\hat{g} \times$$
$$\times(t+1-j) + (-1)^n\delta^n\hat{g}(t) +$$
$$+\sum_{p=0}^{n-2}\{(-1)^p\delta^p(\alpha+\delta)^{n-p-1}\hat{g}(t+1) +$$
$$+(-1)^p\delta^p(\alpha+\delta)^{n-p}\hat{g}(t)\} =$$
$$= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\delta^p(\alpha+\delta)^{n-p-1}\hat{g}(t+1) +$$
$$+\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\delta^p(\alpha+\delta)^{n-p}\hat{g}(t).$$

Тем самым теорема доказана.

Замечание. Нами мало изучен вопрос о том, для каких троек $(\Gamma, \mathcal{J}(\Gamma), k)$ (где $k : \mathcal{J}(\Gamma) \to [0;+\infty)$) выполняются условия теоремы 3, то есть для каких $(\Gamma, \mathcal{J}(\Gamma), k)$ существует матрица δ, являющаяся решением уравнения $\delta(\alpha+\delta)=\gamma$ и перестановочная с α. По крайней мере, класс таких троек непуст: пусть Г — геометрический граф-цепочка, вложенный в R^1 и имеющий три ребра (0;1), (1;2), (2;3); соответственно, 0, 1, 2, 3, — вершины Г. Тогда $V = diag(1,2,2,1)$,

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Пусть $K=(1+\varepsilon)V$ ($\varepsilon>0$ полагаем достаточно малым). Тогда $\alpha=\dfrac{2}{2+\varepsilon}(V^{-1}A)$, $\gamma=\dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon}I$. Непосредственно можно убедиться, что матрица

$$\delta=-\frac{1}{6(2+\varepsilon)}\begin{pmatrix}0&6+4e_1+2e_2&0&2e_1-2e_2\\3+2e_1+e_2&0&3+4e_1-e_2&0\\0&3+4e_1-e_2&0&3+2e_1+e_2\\2e_1-2e_2&0&6+4e_1+2e_2&0\end{pmatrix},$$

где $e_1=\sqrt{(\varepsilon+1)^2}, e_2=\sqrt{4\varepsilon^2+8\varepsilon+1}$, является решением уравнения $\delta\,(\alpha+\delta)=\gamma$ и перестановочна с α.

Таким образом, мы можем сформулировать следующую проблему, полное решение которой нам неизвестно.

Проблема. Для какие троек $(\Gamma, \mathcal{J}(\Gamma), k)$, где $k : \mathcal{J}(\Gamma) \to [0;+\infty)$, существует матрица δ, являющаяся решением уравнения $\delta(\alpha+\delta)=\gamma$ и перестановочная с α?

Замечание. Если $K=V$, то условия леммы 5 выполняются — в этом случае $\alpha=V^{-1}A, \gamma=0$, и $\delta=-\alpha$ будет решением уравнения $\delta(\alpha+\delta)=0$, перестановочным с α. Формула (37) совпадет при этом с (34).

6. О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (4)—(6)

В данном пункте мы проиллюстрируем на некоторых примерах результаты применения теоремы 2 из предыдущего параграфа.

Пример 1. $\Gamma=\Gamma_1=[0;1]\subset R^1$, (0;1) — единственное ребро Γ_1, 0, 1 — вершины Γ_1. Пусть $K=V$. Применение теоремы 2 дает, во-первых, $\mu_0(1)=(\varphi(a)+\varphi(b))/2=\mu_1(1)$, и во-вторых, $\mu'(t+n)=0$ (при $t\in[0;1)$ и $n\in\mathbf{N}$). Поэтому $u(x,t)\equiv(\varphi(a)+\varphi(b))/2$ при $x\in[0;1], t\geq 1$, то есть имеет место вырождение $u(\cdot,t)$ в тождественную константу, начиная с $t=1$.

Пример 2. $\Gamma=\Gamma_2=[0;2]$, $R(\Gamma_2)=(0;1)\cup\cup(1;2)$, 0, 1 и 2 — вершины Γ_2. Пусть $K=V$. В этом случае, применяя теорему 2, получим, что для всех $t\in[0;1)$ и всех натуральных $n\geq 2$ выполнено $\mu'(t+n)=0$, то есть $\mu'(t)=0$ для всех $t\geq 2$. Значит, и в этом случае решение $u(x,t)$ есть константа, начиная с $t\geq 2$.

Пример 3. Пусть $\Gamma=\Gamma_3$ — геометрический граф с матрицей смежности вершин

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},$$

и пусть длины всех его ребер равны 1. Пусть $K=V$. В этом случае, применяя теорему 2, получим

$$\lim_{t\to+\infty}\mu(t)=\mu(2)+\frac{3}{2}\int_2^4\mu'(s)ds=$$
$$=\frac{3}{2}\mu(4)-\frac{1}{2}\mu(2),$$

причем несложно убедиться, что функция φ в (6) может быть выбрана так, что $\mu(t)\not\equiv const$ в любой окрестности $+\infty$.

Пример 4. Пусть $\Gamma=\Gamma_4$ где Γ_4 — геометрический граф из $\mathbf{R}^2$ с четырьмя ребрами и четырьмя вершинами с матрицей смежности

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},$$

причем длины всех ребер равны 1. Пусть $K=V$. В этом случае, применяя теорему 2, получим, что, начиная с $t=2$, $u(x,t)$ есть функция, периодическая по t с периодом 2 и, вообще говоря, отличная от *const*.

Замечание. Рассмотренные примеры показывают, что в случае $K=V$ возможна стабилизация решения задачи (4)—(6), причем эта стабилизация может носить различный характер: (а) начиная с некоторого значения t, решение вырождается в *const*; (б) начиная с некоторого значения t, решение становится периодическим, причем отличным от *const*; (в) решение стремится к *const* при $t \to +\infty$, будучи отличным от *const* в любой окрестности точки $t = +\infty$. Возможна так же и (г) — сходимость решения к периодическому, а также комбинированное поведение, когда на одной части геометрического графа имеет место поведение (а), на другой — (б), на третьей — (в), на четвертой — (г). В целом же, во всей полноте, вопрос о стабилизации решений задачи (4)—(6) (в том числе, в случае $K \neq V$) нами еще не изучен.

Мы чтим память Г. В. Мартыненко, обратившего наше внимание на круг вопросов, приведших нас к постановке задачи (4)—(6) и последующему ее исследованию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покорный Ю.В.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.

2. *Юрко В.А.* О восстановлении операторов Штурма-Лиувилля на графах / В. А. Юрко // Математические Заметки. — 2006. — Т. 79, № 4. — С. 619—630.

3. *Покорный Ю.В.* Волновое уравнение на пространственной сети / Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских // Докл. РАН. — 2003. — Т. 388, № 1, С. 16—18.

4. *Копытин А.В.* Об аналоге формулы Даламбера и спектре лапласиана на графе с соизмеримыми ребрами / А. В. Копытин, В. Л. Прядиев // Вестник Воронеж. гос. ун-та, Серия «Физика, Математика». — 2001. — № 1. — С. 104—107.

5. *Cattaneo C.* D'Alambert formula on finite one-dimensional networks / C. Cattaneo, L. Fontana // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — V. 284, № 2. — P. 403—424.

6. *Прядиев В.Л.* Ядро интегрального оператора, образующего одну начально-краевую задачу для волнового уравнения на одномерной пространственной сети / В. Л. Прядиев. — Тр. матем. ф-та, Вып. 9 (нов. сер.). — Воронеж: ВГУ, 2005. — С. 78—92.

7. *Найдюк Ф.О.* О свойствах решений гиперболических уравнений с сингулярными коэффициентами: диссертация канд. физ.-мат. наук. / Ф. О. Найдюк. — Воронеж. гос. ун-т, 2004. — 134 с.

8. *Прядиев В.Л.* Один подход к описанию в конечной форме решений волнового уравнения на пространственной сети / В. Л. Прядиев // Spectral and Evolution Problems: Pr. of the Fifteenth Crimean Autumn Math. School-Symposium. Vol. 15, Sept. 17—19, 2004, Sevasopol, Laspi. — Simpheropol, 2005. — P. 132—139.