УДК 517. 518

О ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ВСПЛЕСКА И. МЕЙЕРА

С. А. Гарьковская

Воронежский государственный университет

Рассматривается семейство непрерывно дифференцируемых всплесков И. Мейера, носители преобразований Фурье которых содержатся в конечном отрезке. В работе решается задача о поиске всплеска из этого семейства, имеющего минимальный показатель неопределенности, который характеризует локализацию всплеска в частотно-временной области. При помощи метода Ритца для этого всплеска построено несколько приближений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается семейство всплесков И. Мейера, впервые введенное в [1] и определяемое по следующей схеме.

Пусть $\Theta(\omega)$ — нечетная непрерывно дифференцируемая функция, равная $\pi/4$ при $\omega > \pi/3$ и $-\pi/4$ при $\omega < -\pi/3$. Определим четную функцию $\lambda(\omega)$ формулой:

$$\lambda(\omega) := \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + \Theta(\omega - \pi), \ \text{5A; 8}\ \omega \in \left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]; \\ \dfrac{\pi}{4} - \Theta\left(\dfrac{\omega}{2} - \pi\right), \ \text{5A; 8}\ \omega \in \left[\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{3}\right]; \\ 0, \ \text{5A; 8}\ \omega \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{8\pi}{3}, \infty\right). \end{cases}$$

Преобразование Фурье масштабирующей функции Мейера определяется следующим образом:

$$\hat{\varphi}^M(\omega) := \begin{cases} \cos(\lambda(\omega)), \ \text{5A; 8}\ |\omega| \le \dfrac{4\pi}{3}; \\ 0, \ \text{5A; 8}\ |\omega| > \dfrac{4\pi}{3}, \end{cases} \tag{1}$$

где преобразование Фурье функции φ^M задается формулой:

$$\hat{\varphi}^M(\omega) := \int_{\mathbb{R}} \varphi^M(t) e^{-it\omega} dt. \tag{2}$$

Тогда для масштабирующей функции Мейера получаем следующее выражение:

$$\varphi^M(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(t\omega)\cos(\lambda(\omega)) d\omega. \tag{3}$$

Всплеск-функция Мейера определяется формулой:

$$\psi^M(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)\omega\right] \sin(\lambda(\omega)) d\omega.$$

Важным свойством всплеск-функции является ее локализованность в частотно-временной области. Для количественной характеристики локализации функции $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ с ненулевой нормой используются следующие величины:

$$t^*(\psi) := \frac{1}{\|\psi\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} t |\psi(t)|^2 \, dt \ \text{— центр;}$$

$$\Delta(\psi) := \frac{1}{\|\psi\|_2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} (t - t_\psi^*) |\psi(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2} \ \text{— радиус;}$$

где $\|\psi\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$ — норма в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Центр представляет собой математическое ожидание случайной величины с плотностью распределения, равной $\dfrac{|\psi|^2}{\|\psi\|^2}$, радиус же является средним квадратическим отклонением той же случайной величины. Грубо говоря, функция ψ локализована (т. е. принимает значимые значения) на отрезке $[t^*(\psi) - \Delta(\psi), t^*(\psi) + \Delta(\psi)]$.

Центр преобразования Фурье функции ψ обозначается $\omega^*(\hat{\psi})$ и вычисляется по формуле

$$\omega^*(\hat{\psi}) := \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 \, d\omega.$$

Произведение $\Delta^2(\psi)\Delta^2(\hat{\psi})$ характеризует частотно-временную локализацию ψ и называется показателем неопределенности. Чем меньше показатель неопределенности, тем лучше локализована функция ψ. Справедлива следующая теорема (принцип неопределенности) ([2]):

Теорема 1. *Пусть функция* ψ *такова, что* $\psi(t) \in L_2(\mathbb{R})$, $t\psi(t) \in L_2(\mathbb{R})$, $\hat{\psi}(\omega) \in L_2(\mathbb{R})$, $\omega\hat{\psi}(\omega) \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\Delta(\psi)\Delta(\hat{\psi}) \geq \frac{1}{2}.$$

Данная работа посвящена поиску наилучшего в смысле локализации всплеску И. Мейера, принадлежащему описанному выше семейству.

2. ПОКАЗАТЕЛЬ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ И. МЕЙЕРА

Рассмотрим показатель неопределенности масштабирующей функции И. Мейера. Из формулы (1) получим, что $\left\|\hat{\varphi}^M\right\|_2 = \sqrt{2\pi}$. Тогда из равенства Парсеваля следует, что $\left\|\varphi^M\right\|_2 = 1$.

Так как функции $\hat{\varphi}^M(\omega)$ и $\varphi^M(t)$ четные, то $\omega^*(\hat{\varphi}^M) = 0$ и $t^*(\varphi^M) = 0$.

Тогда, согласно определению, показатель неопределенности для функции φ^M находится по формуле:

$$\Delta(\varphi^M)\Delta(\hat{\varphi}^M) = \int_{\mathbb{R}} t^2 \left|\varphi^M(t)\right|^2 dt \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \omega^2 \left|\hat{\varphi}^M(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Приведем это выражение к более компактному виду.

Утверждение 2 *Формула для показателя неопределенности масштабирующей функции И. Мейера имеет вид:*

$$\Delta^2(\hat{\varphi}^M)\Delta^2(\varphi^M) =$$

$$= \left(\frac{4\pi^2}{9} - 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \omega \sin(2\Theta(\omega))d\omega\right) \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\Theta'(\omega))^2 d\omega.$$

Доказательство:

Преобразуем частотную часть показателя неопределенности. Используя свойства синуса двойного угла и выполнив замену переменных $\omega' = \omega - \pi$, выражение для радиуса функции $\hat{\varphi}^M$ приведем к виду:

$$\Delta^2(\hat{\varphi}^M) = \frac{4\pi^2}{9} - 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \omega \sin(2\Theta(\omega))d\omega.$$

Теперь рассмотрим второй множитель в выражении для показателя неопределенности. Заметим, что $\Delta^2(\varphi^M) = \left\|t\varphi^M(t)\right\|_2^2$. Воспользуемся следующим свойством преобразования Фурье: $i\omega\hat{f}(\omega) = \hat{f}'(\omega)$. Найдем функцию ξ такую, что $\hat{\xi}(t) = \varphi^M(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{it\omega}\hat{\varphi}^M(\omega)d\omega$, где $\hat{\xi}(t)$ вычисляется по О (2). Тогда $\xi(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\hat{\varphi}^M(-\omega) = -\frac{1}{2\pi}\hat{\varphi}^M(\omega)$. Значит, $it\varphi^M(t) = it\hat{\xi}(t) = \hat{\xi}'(t)$ и

$$\Delta^2(\varphi^M) = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{2\pi}\hat{\xi}'(t)\right|^2 dt.$$

Так как функция $\xi(\omega) \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, то применимо равенство Парсеваля $\left\|\xi\right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\left\|\hat{\xi}\right\|_2^2$, и тогда получим:

$$\Delta^2(\varphi^M) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\Theta'(\omega))^2 d\omega.$$

Итак, после преобразований формула для показателя неопределенности масштабирующей функции Мейера принимает вид:

$$\Delta^2(\hat{\varphi}^M)\Delta^2(\varphi^M) =$$

$$= \left(\frac{4\pi^2}{9} - 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \omega \sin(2\Theta(\omega))d\omega\right) \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\Theta'(\omega))^2 d\omega.$$

Утверждение доказано.

Пусть $G := \{\Theta(\omega) \in C^1[0, \pi/3] : \Theta(0) = 0, \Theta(\pi/3) = \pi/4,\ \Theta'(\pi/3) = 0\}$. Обозначим через N нелинейный функционал, который функции $\Theta(\omega) \in G$ ставит в соответствие значение показателя неопределенности масштабирующей функции Мейера, построенной с помощью функции $\Theta(\omega)$:

$$N(\Theta) = \left(\frac{4\pi^2}{9} - 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \omega \sin(2\Theta(\omega))d\omega\right) \times \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\Theta'(\omega))^2 d\omega. \qquad (4)$$

Найдем функцию Θ, доставляющую минимум функционалу (4).

3. МИНИМИЗАЦИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Для минимизации показателя неопределенности воспользуемся методом Ритца ([3], с. 160). Заметим, что G не является линейным пространством. Представим сглаживающую функцию в виде $\Theta = \Theta_0 + \tau$, где Θ_0 — некоторая фиксированная функция из множества G, $\tau \in E = \{\tau \in C^1[0, \pi/3] : \tau(0) = \tau(\pi/3) = \tau'(\pi/3) = 0\}$. E является линейным пространством. В качестве его подпространств рассмотрим

$E_n = S(\Delta_n) \cap E$, где $S(\Delta_n)$ — пространства квадратичных сплайнов дефекта 1 с $2^n + 1$ узлами, определенных на отрезке $[0, \pi/3]$:

$$E_n := \{\tau(\omega) = \sum_{k=1}^{2^n} (a_k \omega^2 + b_k \omega + c_k) \times$$
$$\times \chi_{\left[\left(1-\frac{k}{2^n}\right)\frac{\pi}{3}, \left(1-\frac{k-1}{2^n}\right)\frac{\pi}{3}\right]}(\omega) \mid \tau \in G\}.$$

Из условия $\tau \in E$ получим, что коэффициенты a_k, b_k, c_k определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$c_k = -(a_{k-1} - a_k)\omega_{k-1}^2 + c_{k-1},$$
$$b_k = 2(a_{k-1} - a_k)\omega_{k-1} + b_{k-1},$$
$$c_{2^n} = 0, b_1 = -2a_1 \frac{\pi}{3}, c_1 = a_1 \left(\frac{\pi}{3}\right)^2,$$
$$a_{2^n} = -\frac{c_{2^n-1}}{\omega_{2^n-1}^2} + a_{2^n-1},$$

где $\omega_{k-1} = \left(1 - \dfrac{k-1}{2^n}\right)\dfrac{\pi}{3}$ — узлы сплайнов. Таким образом, каждая функция $\tau(\omega) \in E$ однозначно определяется набором $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n-1}$, а значит, пространство E изоморфно пространству $\mathbb{R}^{2^n-1}$.

Обозначим $\tilde{N}(\tau) := N(\Theta_0 + \tau), \tilde{N} : E \to \mathbb{R}$. В соответствии с методом Ритца вместо функционала $\tilde{N}$ рассмотрим функционал $\tilde{N}_n : \mathbb{R}^{2^n-1} \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{N}_n(a_1, a_2, \ldots, a_{2^n-1}) =$$
$$= \tilde{N}\left(\sum_{k=1}^{2^n} (a_k \omega^2 + b_k \omega + c_k\right) \chi_{[\omega_k, \omega_{k-1}]}(\omega)),$$

и тогда задача о построении минимизирующей последовательности для функционала $\tilde{N}$ сводится к задаче о нахождении точки минимума функционала $\tilde{N}_n$ на $\mathbb{R}^{2^n-1}$ для $n = 1, 2, 3 \ldots$.

Справедливо следующее утверждение ([3], с. 160):

Утверждение 2. *Пусть функционал F непрерывен, ограничен снизу, а последовательность $\{E_n\}$ является полной. Если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует функция $\tau_n \in E_n$, такая, что $F(\tau_n) = \inf_{\tau \in E_n} F(\tau)$, то последовательность $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является минимизирующей, то есть*

$$\lim_{n\to\infty} F(\tau_n) = \inf_{\tau \in E} F(\tau).$$

Докажем, что для функционала N (а значит, и для $\tilde{N}$) выполнены условия утверждения 2. Заметим, что функционал N ограничен снизу в соответствии с теоремой 1. Найдем более точную оценку.

Лемма 1. *Для показателя неопределенности N справедлива оценка:*

$$N(\Theta) \geq \frac{\pi^2}{24} \approx 0,4112 \qquad (5)$$

для всех $\Theta(\omega) \in G$.

Доказательство.

Оценим вначале второй множитель с помощью неравенства Коши—Буняковского. Получим:

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\Theta'(\omega))^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}} \geq$$
$$\geq \left(\sqrt{\frac{3}{\pi}}\right) \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\Theta'(\omega)| d\omega = \left(\sqrt{\frac{3}{\pi}}\right) \frac{\pi}{4}.$$

Тогда $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\Theta'(\omega))^2 d\omega \geq \dfrac{3}{16}$.

Рассмотрим первый множитель. Так как $0 \leq \omega \sin(\Theta(\omega)) \leq \omega \leq \dfrac{\pi}{3}$, то

$$\frac{4\pi^2}{9} - 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \omega \sin(2\Theta(\omega)) d\omega \geq$$
$$\geq \frac{4\pi^2}{9} - 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{3} d\omega = \frac{2\pi^2}{9}.$$

В результате получаем следующую оценку:

$$N(\Theta) \geq \frac{\pi^2}{24} \approx 0,4112$$

для всех $\Theta(\omega) \in G$, то есть оценка (5) доказана.

Лемма 2. *Показатель неопределенности N непрерывен на множестве G по норме $\|\cdot\|_{C^1}$.*

Доказательство: Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\Theta_1(\omega), \Theta_2(\omega) \in G$. Тогда:

$$|N(\Theta_1) - N(\Theta_2)| \leq$$
$$\leq \left|\frac{4\pi}{9} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \omega \sin(2\Theta_1(\omega)) d\omega\right| \times$$
$$\times \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left|\Theta_1'^2(\omega) - \Theta_2'^2(\omega)\right| d\omega +$$

$$+\left|2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\omega\sin(2\Theta_1(\omega))d\omega-\right.$$

$$\left.-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\omega\sin(2\Theta_2(\omega))d\omega\right|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\Theta_2'(\omega))^2d\omega.$$

Воспользовавшись определением нормы в пространстве C^1, оценим первое слагаемое следующим образом:

$$\left(\frac{4\pi}{9}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\omega\left|\sin(2\Theta_1(\omega))\right|d\omega\right)\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left|(\Theta_1'^2(\omega)-\Theta_2'(\omega)\right|d\omega\le C_1\left\|\Theta_1-\Theta_2\right\|_{C^1},$$

где $C_1=\frac{5\pi}{9}\int_0^{\frac{\pi}{3}}|\Theta_1'(\omega)+\Theta_2'(\omega)|\,d\omega$ — конечное число.

Оценим второе слагаемое. По теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$\left|\sin(2\Theta_1(\omega))-\sin(2\Theta_2(\omega))\right|=$$

$$=\left|\cos(2\Theta_1(\omega))+2\xi(\Theta_2(\omega)-\Theta_1(\omega)))\right|\cdot\left|\Theta_1(\omega)-\Theta_2(\omega)\right|,$$

где $0<\xi<1$. Тогда второе слагаемое можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\omega\left|\sin(2\Theta_1(\omega))-\sin(2\Theta_2(\omega))\right|d\omega\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\Theta_2'(\omega))^2d\omega\le C_2\left\|\Theta_1-\Theta_2\right\|_{C^1},$$

где $C_2=\frac{2}{9\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\Theta_2'(\omega))^2d\omega$ — конечное число.

Итак, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2C_1},\frac{\varepsilon}{2C_2}\right\}$ такое, что если $\left\|\Theta_1-\Theta_2\right\|_{C^1}<\delta$, то $\left|N(\Theta_1)-N(\Theta_2)\right|<\varepsilon$. Непрерывность функционала N доказана.

Лемма 3. *Для любого $n\in\mathbb{N}$ существует функция $\tau_n\in E_n$ такая, что $\tilde{N}(\tau_n)=\inf\limits_{\tau\in E_n}\tilde{N}(\tau)$.*

Таким образом, все требования утверждения 2 выполнены (полнота последовательности подпространств $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ следует непосредственно из определения сплайнов). Значит, полученная в соответствии с методом Ритца последовательность функций $\{\tau_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ будет сходится к точке глобального минимума функционала $\tilde{N}$.

С помощью численных экспериментов в пакете Mathematica 5.0 были получены приближения Ритца при $n=1,2,3,4$. На полученных функциях показатель неопределенности принимает следующие значения: 0.7499, 0.6999, 0.6765, 0.6655. Эти значения достаточно близки к оценке (5). На рис. 1 представлены графики полученных сглаживающих функций $\Theta_n(\omega)=\Theta_0(\omega)+\tau_n(\omega)$ при $n=1,2,3,4$ (сверху вниз соответственно). Очевидно, что при увеличении количества отрезков разбиения 2^n график функции $\Theta_n(\omega)$ приближается к графику линейной функции $\Theta(\omega)=\frac{3}{4}\omega$. Отметим, что эта функция не удовлетворяет условию гладкости и не принадлежит области определения функционала N.

С помощью свойств масштабирующей функции и всплеска, доказанных в [2] , получены следующие факты.

Утверждение 3. *Центры и радиусы преобразований Фурье масштабирующей функции ϕ и соответствующего всплеска ψ связаны следующими соотношениями:*

$$\omega^*(\hat{\psi})=3\omega^*(\hat{\phi}),\ \Delta^2(\hat{\psi})=7\Delta^2(\hat{\phi})-2\omega^*(\hat{\phi}).$$

Утверждение 3 *Для радиусов масштабирующей функции и всплеска И. Мейера справедлива формула:*

$$\Delta^2(\psi^M)=\frac{3}{2}\Delta^2(\phi^M).$$

Тогда последовательность Ритца для показателя неопределенности масштабирующей функции является минимизирующей последовательностью и для показателя неопределенности всплеска И. Мейера. На построенных приближениях Ритца показатель неопределенности всплеска принимает значения 7.87, 7.34, 7.10, 6.98 при $n=1,2,3,4$ соответственно.

В работе [4] для нахождения всплеска И. Мейера наилучшей локализации авторы применяют представление сглаживающей функции в виде суммы линейной функции и некоторой линейной комбинации квадратичных краевых B-сплайнов. Приближения, полученные для минимума показателя неопределенности в этой статье (7.35, 7.15, 6.99, 6.94 при разбиении отрезка $[0,\pi/3]$ на 4, 8, 16, 32 частей соответственно), согласуются с результатами данной работы.

Автор выражает благодарность профессору И. Я. Новикову за постановку данной задачи и консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Meyer Y.* Principe d'incertitude bases Hilbertiennes et algebras d'operateurs / Y. Meyer // Seminaire Bourbaki. 1985—1986. — V. 38, № 662. P. 209—223.

2. *Новиков И.Я.* Теория всплесков. / И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. — М.: Физматлит, 2005. — 616 с.

3. *Буслаев В.С.* Вариационное исчисление / В. С. Буслаев. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. — 288 с.

4. *Лебедева Е. А.* Вейвлет Мейера улучшенной локализации / Е. А. Лебедева, Е. Б. Постников // Вычислительные методы и программирование, 2006. — Т. 7. — С. 122—124.