УДК 539.374

ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ЗАДАЧИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Н. Д. Вервейко, А. В. Купцов

Воронежский государственный университет

Для расчета поля скоростей пространственного напряженного деформированного состояния производится линеаризация условия Мизеса, путем введения малого параметра $\varepsilon = \Delta k / k$, и рассматривается условие полной пластичности, что позволяет замкнуть систему дифференциальных уравнений, полученную подстановкой условий Коши в соотношения ассоциированного закона пластичности. Исследование данной системы показывает, что она гиперболична и имеет вещественные характеристики. Нахождение дифференциальных соотношений вдоль характеристических плоскостей позволяет сформулировать конечноразностную схему.

ВВЕДЕНИЕ

В случае пространственного напряженного деформированного состояния для получения замкнутой системы уравнений для скоростей перемещений и неизвестных коэффициентов $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$, входящих в соотношения ассоциированного закона, используются два линеаризированных условия, аппроксимирующих нелинейное условие пластичности Мизеса, условие полной пластичности и соотношения Коши для скорости деформирования. Нелинейное условие пластичности Мизеса заменяется в точках M^0 и $M^{0'}$ двумя касательными плоскостями к поверхности текучести, расположенной на расстоянии $k + \Delta k$ от нее, проведенными через прямую $M^*M^{*'}$ (рис. 1) [1, 2, 3].

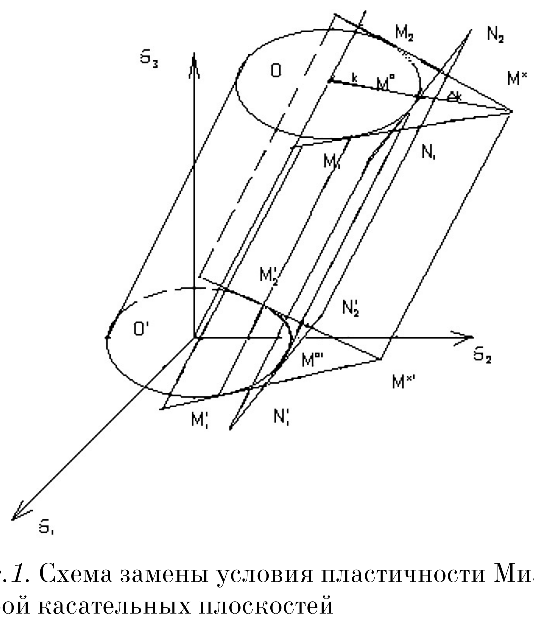

Рис.1. Схема замены условия пластичности Мизеса парой касательных плоскостей

В результате подстановки соотношений Коши в уравнения ассоциированного закона пластического течения получается замкнутая система 6-ти уравнений относительно трех компонент скоростей перемещений u_i и коэффициентов $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$.

Выражение λ_i через скорости деформаций из любых трех уравнений системы и подстановка в оставшиеся уравнения позволяет получить систему дифференциальных уравнений относительно скоростей перемещений. Полученная система является гиперболической и имеет вещественные характеристики. Дифференциальные соотношения, построенные вдоль них, позволили записать конечно-разностную схему для расчета поля скоростей.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ниже для случая пространственного напряженного и деформированного состояния тела приведена процедура линеаризации условия пластичности Мизеса заменой его двумя касательными плоскостями (линиями в случае плоской задачи) в пространстве главных напряжений σ (рис. 1). Это позволяет осуществить траекторию пластического деформирования в пространстве напряжений, находясь на одном или другом из линейных участков линеаризированного условия пластичности, а сама результирующая траектория изменения напряжений в малом может рассматриваться ортогонально невозмущенной поверхности текучести (рис. 1), т. е. путь нагружения $M^*N_1M^0$ вдоль касательных к условию пластичности векторно эквивалентен пути M^*M^0, вдоль которого условие пластичности не выполняется.

Условие пластичности Мизеса для случая пластического течения представим в следующем виде:

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = k^2, \tag{1}$$

где τ_1, τ_2, τ_3 — главные касательные напряжения:

$$\begin{gathered}\tau_1 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2,\ \ \tau_2 = (\sigma_2 - \sigma_3)/2,\\ \tau_3 = (\sigma_3 - \sigma_1)/2.\end{gathered} \tag{2}$$

Построим уравнения касательных плоскоей к поверхности текучести Мизеса в таких точках M_1 и M_2 так, чтобы их точка пересечения M^* находилась на расстоянии Δk от рассматриваемой точки M^0 поверхности текучести (рис. 1).

Получим следующие уравнения касательных к поверхности текучести в пространстве главных напряжений:

$$\begin{cases}(2 + (3k' + 1)tg\varphi)\tau_1 + (2tg\varphi + (1 - 3k'))\tau_2 = \\ = k(1 + \varepsilon)\sqrt{2(1 + tg\varphi + tg^2\varphi)},\\ (2 + (1 - 3k')tg\varphi)\tau_1 + (2tg\varphi + (3k' + 1))\tau_2 = \\ = k(1 + \varepsilon)\sqrt{2(1 + tg\varphi + tg^2\varphi)},\end{cases} \tag{3}$$

где $k' = \sqrt{(2\varepsilon + \varepsilon^2)/3}$, $tg\varphi = \tau_2^* / \tau_1^* = \tau_2^{(0)} / \tau_1^{(0)}$, $i = 1, 2$.

Координаты точки пересечения касательных плоскостей определяются из (3):

$$\begin{gathered}\tau_1^* = \frac{(1 + \varepsilon)k}{\sqrt{2(1 + tg\varphi + tg^2\varphi)}},\\ \tau_2^* = \frac{(1 + \varepsilon)k \cdot tg\varphi}{\sqrt{2(1 + tg\varphi + tg^2\varphi)}},\end{gathered} \tag{4}$$

где φ — параметр, определяющий напряженное состояние этой точки в пространстве главных напряжений. Дополнительным условием полной пластичности, замыкающим систему уравнений идеальной пластичности в пространственном случае, является условие полной пластичности:

$$\sigma_1 = \sigma_2. \tag{5}$$

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В случае пространственного напряженного и деформированного состояния тела условия пластичности (4), (5) и соотношения ассоциированного закона пластического течения в компонентах главных напряжений и скоростей деформации примут вид:

$$\begin{gathered}g_p(\sigma_i) = 0, \varepsilon_i = \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_i},\\ \lambda_p \geq 0, p = 1, 2, 3.\end{gathered} \tag{6}$$

Формулы связи главных компонент напряжений σ_k и компонент σ_{ij} имеют вид:

$$\sigma_{ij} = c_{ik} \cdot c_{jk} \cdot \sigma_k, \varepsilon_{ij} = c_{ik} \cdot c_{jk} \cdot \varepsilon_k, \tag{7}$$

где c_{ij} — направляющие косинусы, ориентирующие главные напряжения σ_i (деформации ε_i) в пространстве главных напряжений. Соотношения ортогональности и ортонормированности для них выполняются в виде:

$$c_{ik} \cdot c_{jk} = \delta_{ij}. \tag{8}$$

Используя формулы (7), преобразуем соотношения (6) ассоциированного закона пластического течения:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij} = c_{ik} \cdot c_{jk} \cdot \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_i},\\ \lambda_p \geq 0, p = 1, 2, 3.\end{gathered} \tag{9}$$

Преобразуя данные соотношения для трех произвольных условий пластичности $g_p (p = 1, 2, 3)$ и обозначая производные от них по главным напряжениям следующим образом $g_{pq} = \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_q} (p, q = 1, 2, 3)$, получим

$$\varepsilon_{ij} = \lambda_k \cdot H_{ij}^k \left(\sum k\right), \tag{10}$$

где $H_{ij}^p = c_{ik} \cdot c_{jk} \cdot g_{pk}$.

Построение системы уравнений для скоростей перемещений методом исключения неопределенных множителей Лагранжа

Рассмотрим первые три уравнения системы (10), выразим из них $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ через ε_{kk} и H_{ij}^p получим следующее:

$$\begin{cases}\lambda_1 = \frac{1}{\Delta}\big[\varepsilon_{11} \cdot (H_{22}^2 H_{33}^3 - H_{33}^2 H_{22}^3) + \\ \quad + \varepsilon_{22} \cdot (H_{11}^3 H_{33}^2 - H_{33}^3 H_{11}^2) + \\ \quad + \varepsilon_{33} \cdot (H_{22}^3 H_{11}^2 - H_{11}^3 H_{22}^2)\big],\\ \lambda_2 = \frac{1}{\Delta}\big[\varepsilon_{11} \cdot (H_{22}^3 H_{33}^1 - H_{33}^3 H_{22}^1) + \\ \quad + \varepsilon_{22} \cdot (H_{11}^1 H_{33}^3 - H_{33}^1 H_{11}^3) + \\ \quad + \varepsilon_{33} \cdot (H_{22}^1 H_{11}^3 - H_{11}^1 H_{22}^3)\big],\\ \lambda_3 = \frac{1}{\Delta}\big[\varepsilon_{11} \cdot (H_{22}^1 H_{33}^2 - H_{33}^1 H_{22}^2) + \\ \quad + \varepsilon_{22} \cdot (H_{11}^2 H_{33}^1 - H_{33}^2 H_{11}^1) + \\ \quad + \varepsilon_{33} \cdot (H_{22}^2 H_{11}^1 - H_{11}^2 H_{22}^1)\big],\end{cases} \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta = H_{11}^2 H_{22}^2 H_{33}^3 + H_{11}^2 H_{22}^3 H_{33}^1 + H_{11}^3 H_{22}^1 H_{33}^2 - \\ - H_{11}^3 H_{22}^2 H_{33}^1 - H_{11}^1 H_{22}^3 H_{33}^2 - H_{11}^2 H_{22}^1 H_{33}^3.\end{gathered}$$

Вычислим коэффициенты H_{ij}^p, исходя из того, что два первых условия пластичности g_1, g_2 произвольные, а третье g_3 является условием полной пластичности:

$$\begin{cases} H_{11}^1 = g_{11}\cdot(c_{11}^2 - c_{12}^2) - g_{13}\cdot(c_{12}^2 - c_{13}^2), \\ H_{22}^1 = g_{11}\cdot(c_{21}^2 - c_{22}^2) - g_{13}\cdot(c_{22}^2 - c_{23}^2), \\ H_{11}^2 = g_{21}\cdot(c_{11}^2 - c_{12}^2) - g_{23}\cdot(c_{12}^2 - c_{13}^2), \\ H_{22}^2 = g_{21}\cdot(c_{21}^2 - c_{22}^2) - g_{23}\cdot(c_{22}^2 - c_{23}^2), \\ H_{11}^3 = (c_{11}^2 - c_{12}^2), H_{22}^3 = (c_{21}^2 - c_{22}^2), \\ H_{33}^1 = g_{11}\cdot(c_{31}^2 - c_{32}^2) - g_{13}\cdot(c_{32}^2 - c_{33}^2), \\ H_{33}^2 = g_{21}\cdot(c_{31}^2 - c_{32}^2) - g_{23}\cdot(c_{32}^2 - c_{33}^2), \\ H_{33}^3 = (c_{31}^2 - c_{32}^2). \end{cases} \quad (12)$$

Вычислим коэффициенты перед деформациями ε_{kk} в соотношениях (11):

$$\begin{cases} (H_{22}^2 H_{33}^3 - H_{33}^2 H_{22}^3) = \\ = -g_{23}\cdot\left[(c_{22}^2 - c_{23}^2)\cdot(c_{31}^2 - c_{32}^2) - (c_{21}^2 - c_{22}^2)\cdot(c_{32}^2 - c_{33}^2)\right], \\ (H_{11}^3 H_{33}^2 - H_{33}^3 H_{11}^2) = \\ = -g_{23}\cdot\left[(c_{22}^2 - c_{23}^2)\cdot(c_{31}^2 - c_{32}^2) - (c_{21}^2 - c_{22}^2)\cdot(c_{32}^2 - c_{33}^2)\right], \\ (H_{22}^3 H_{11}^2 - H_{11}^3 H_{22}^2) = \\ = -g_{23}\cdot\left[(c_{22}^2 - c_{23}^2)\cdot(c_{31}^2 - c_{32}^2) - (c_{21}^2 - c_{22}^2)\cdot(c_{32}^2 - c_{33}^2)\right], \\ (H_{22}^3 H_{33}^1 - H_{33}^3 H_{22}^1) = \\ = g_{13}\cdot\left[(c_{22}^2 - c_{23}^2)\cdot(c_{31}^2 - c_{32}^2) - (c_{21}^2 - c_{22}^2)\cdot(c_{32}^2 - c_{33}^2)\right], \\ (H_{11}^1 H_{33}^3 - H_{33}^1 H_{11}^3) = \\ = g_{13}\cdot\left[(c_{22}^2 - c_{23}^2)\cdot(c_{31}^2 - c_{32}^2) - (c_{21}^2 - c_{22}^2)\cdot(c_{32}^2 - c_{33}^2)\right], \\ (H_{22}^1 H_{11}^3 - H_{11}^1 H_{22}^3) = \\ = g_{13}\cdot\left[(c_{22}^2 - c_{23}^2)\cdot(c_{31}^2 - c_{32}^2) - (c_{21}^2 - c_{22}^2)\cdot(c_{32}^2 - c_{33}^2)\right], \\ (H_{22}^1 H_{33}^2 - H_{33}^1 H_{22}^2) = \left[g_{23}\cdot g_{11} - g_{21}\cdot g_{13}\right]\times \\ \times\left[(c_{22}^2 - c_{23}^2)\cdot(c_{31}^2 - c_{32}^2) - (c_{21}^2 - c_{22}^2)\cdot(c_{32}^2 - c_{33}^2)\right], \\ (H_{11}^2 H_{33}^1 - H_{33}^2 H_{11}^1) = \left[g_{23}\cdot g_{11} - g_{21}\cdot g_{13}\right]\times \\ \times\left[(c_{22}^2 - c_{23}^2)\cdot(c_{31}^2 - c_{32}^2) - (c_{21}^2 - c_{22}^2)\cdot(c_{32}^2 - c_{33}^2)\right], \\ (H_{22}^2 H_{11}^1 - H_{11}^2 H_{22}^1) = \left[g_{23}\cdot g_{11} - g_{21}\cdot g_{13}\right]\times \\ \times\left[(c_{22}^2 - c_{23}^2)\cdot(c_{31}^2 - c_{32}^2) - (c_{21}^2 - c_{22}^2)\cdot(c_{32}^2 - c_{33}^2)\right]. \end{cases} \quad (13)$$

В этом случае, подставляя соотношения (11) с вычисленными коэффициентами перед ε_{kk} в виде (13) в оставшиеся три уравнения системы (10), получим:

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = \dfrac{\delta}{\Delta}\Big[-g_{23}\cdot H_{12}^1 + g_{13}\cdot H_{12}^2 + \\ +\left[g_{23}\cdot g_{11} - g_{21}\cdot g_{13}\right]\cdot H_{12}^3\Big]\times\left[\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right], \\ \varepsilon_{13} = \dfrac{\delta}{\Delta}\Big[-g_{23}\cdot H_{13}^1 + g_{13}\cdot H_{13}^2 + \\ +\left[g_{23}\cdot g_{11} - g_{21}\cdot g_{13}\right]\cdot H_{13}^3\Big]\times\left[\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right], \\ \varepsilon_{23} = \dfrac{\delta}{\Delta}\Big[-g_{23}\cdot H_{23}^1 + g_{13}\cdot H_{23}^2 + \\ +\left[g_{23}\cdot g_{11} - g_{21}\cdot g_{13}\right]\cdot H_{23}^3\Big]\times\left[\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right], \end{cases} \quad (14)$$

где

$$\delta = [(c_{22}^2 - c_{23}^2)\cdot(c_{31}^2 - c_{32}^2) - (c_{21}^2 - c_{22}^2)\cdot(c_{32}^2 - c_{33}^2)].$$

Введем новые обозначения для упрощения системы уравнений (14):

$$R_{ij} = \frac{\delta}{\Delta}[-g_{23}\cdot H_{ij}^1 + g_{13}\cdot H_{ij}^2 + \\ +[g_{23}\cdot g_{11} - g_{21}\cdot g_{13}]\cdot H_{ij}^3]. \quad (15)$$

Используя соотношения Коши ($\varepsilon_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$), представим систему (14) в виде дифференциальных уравнений относительно скоростей перемещений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = R_{12}\cdot\left[\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right], \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = R_{13}\cdot\left[\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right], \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} = R_{23}\cdot\left[\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]. \end{cases} \quad (16)$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СКОРОСТЯХ

Исследуем характеристические свойства системы уравнений (16). Пусть $f(x_1,x_2,x_3)=0$ некоторая неподвижная поверхность в декартовой системе координат, вдоль которой заданы значения функций u_i. Этими значениями однозначно определяются на поверхности $f(x_1,x_2,x_3)=0$ все производные перечисленных функций кроме случая, когда данная поверхность является характеристической.

В этом случае производные от величин u_i по нормали к характеристической поверхности не определены или определены неоднозначно [6]. Определим условие для функции $f(x_1,x_2,x_3)$, при котором поверхность $f(x_1,x_2,x_3)=0$ была бы характеристической. Рассматривая все величины как функции точек на поверхности $f(x_1,x_2,x_3)=0$, можно записать:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{du_i}{df}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\, i,j=1,2,3.$$

Уравнения, входящие в систему (16), представим в следующем виде, вводя обозначения $\alpha_i=\partial f/\partial x_i$:

$$\begin{cases}\alpha_2\cdot du_1/df+\alpha_1\cdot du_2/df=\\ =R_{12}\cdot\left[\alpha_1du_1/df+\alpha_2du_2/df+\alpha_3du_3/df\right],\\ \alpha_3\cdot du_1/df+\alpha_1\cdot du_3/df=\\ =R_{13}\cdot\left[\alpha_1du_1/df+\alpha_2du_2/df+\alpha_3du_3/df\right],\\ \alpha_3\cdot du_2/df+\alpha_2\cdot du_3/df=\\ =R_{23}\cdot\left[\alpha_1du_1/df+\alpha_2du_2/df+\alpha_3du_3/df\right].\end{cases}\tag{17}$$

Вычислим характеристический определитель системы уравнений (17) и приравняем его к нулю:

$$\begin{gathered}2\cdot(R_{12}\cdot\alpha_3^3+R_{13}\cdot\alpha_2^3+R_{23}\cdot\alpha_1^3)-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\\ =(R_{12}\cdot\alpha_3+R_{13}\cdot\alpha_2+R_{23}\cdot\alpha_1)\cdot(\alpha_3^2+\alpha_2^2+\alpha_1^2).\end{gathered}\tag{18}$$

Из уравнений (16) следует, что $R_{ij}=\varepsilon_{ij}/\varepsilon_{kk}$, и тогда (18) примет вид:

$$\begin{gathered}2\cdot(\varepsilon_{12}\cdot\alpha_3^3+\varepsilon_{13}\cdot\alpha_2^3+\varepsilon_{23}\cdot\alpha_1^3)-\\ -2\cdot\varepsilon_{kk}\alpha_1\alpha_2\alpha_3=(\varepsilon_{12}\cdot\alpha_3+\varepsilon_{13}\cdot\alpha_2+\varepsilon_{23}\cdot\alpha_1)\times\\ \times(\alpha_3^2+\alpha_2^2+\alpha_1^2).\end{gathered}\tag{19}$$

В случае, когда выполняется условие несжимаемости $\varepsilon_{kk}=0$, правые части в уравнениях (17) равны 0. Для несжимаемого материала методом характеристик исследуется однородная система уравнений (16), из которой следует соотношение

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=0.\tag{20}$$

Характеристические плоскости (20) получены для такого деформированного состояния, при котором $\varepsilon_{ij}=0\ (i\neq j)$ и $\varepsilon_{kk}=0$, т. е. для растяжения или сжатия материала.

СЛУЧАЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим случай, когда выполняются условия несжимаемости $\varepsilon_{kk}=0$ и $\varepsilon_{ij}\neq 0\ (i\neq j)$, т. е. касательные компоненты деформаций отличны от нуля, тогда уравнение (19) принимает вид:

$$\begin{gathered}(\varepsilon_{12}\cdot\alpha_3^3+\varepsilon_{13}\cdot\alpha_2^3+\varepsilon_{23}\cdot\alpha_1^3)=\\ =\frac{1}{2}(\varepsilon_{12}\cdot\alpha_3+\varepsilon_{13}\cdot\alpha_2+\varepsilon_{23}\cdot\alpha_1)\cdot(\alpha_3^2+\alpha_2^2+\alpha_1^2).\end{gathered}\tag{21}$$

Введем в рассмотрение направляюще косинусы нормали характеристической поверхности:

$$\begin{gathered}\alpha=\alpha_1/\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2},\\ \beta=\alpha_2/\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2},\\ \gamma=\alpha_3/\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}.\end{gathered}\tag{22}$$

С учетом обозначений (22) уравнение (21) принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}(\varepsilon_{12}\cdot\alpha_3\cdot\gamma^2+\varepsilon_{13}\cdot\alpha_2\cdot\beta^2+\varepsilon_{23}\cdot\alpha_1\cdot\alpha^2)=\\ =\frac{1}{2}(\varepsilon_{12}\cdot\alpha_3+\varepsilon_{13}\cdot\alpha_2+\varepsilon_{23}\cdot\alpha_1).\end{gathered}\tag{23}$$

Найдем такие значения α,β,γ, при которых уравнение (23) удовлетворяется автоматически, учитывая, что направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности должны удовлетворять условию нормированности $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

Из уравнения (23) видно, что существует три варианта таких значений и соответственно три типа характеристик:

$$\begin{cases}\chi_1:\alpha=\beta=\pm1/\sqrt{2};\gamma=0,\\ \chi_2:\alpha=\gamma=\pm1/\sqrt{2};\beta=0,\\ \chi_3:\gamma=\beta=\pm1/\sqrt{2};\alpha=0.\end{cases}\tag{24}$$

Таким образом видно, что характеристические плоскости в плоском случае составляют с двумя из главных направлений угол $\pm\pi/4$ в соответствующих плоскостях и ортогональны третьему [4, 5, 6].

УРАВНЕНИЯ ВДОЛЬ ХАРАКТЕРИСТИК

Найдем соотношения вдоль полученных характеристик для случая растяжения (сжатия). Подставляя каждое из уравнений (20) в основные уравнения (17), получим:

$$\begin{cases}\chi_3:\alpha_2\cdot du_1/df+\alpha_1\cdot du_2/df=0,\\ \chi_2:\alpha_3\cdot du_1/df+\alpha_1\cdot du_3/df=0,\\ \chi_1:\alpha_3\cdot du_2/df+\alpha_2\cdot du_3/df=0.\end{cases}\tag{25}$$

Вводя направляюще косинусы нормали к характеристической поверхности (22), уравнения характеристик запишутся следующим образом:

$$\chi_1:\alpha=0,\chi_2:\beta=0,\chi_3:\gamma\cdot=0.\tag{26}$$

Учитывая это, построим соотношения на характеристиках, заменяя компоненты градиента в (25) компонентами нормали к характеристической поверхности:

$$\begin{cases} \chi_3 : \beta \cdot du_1 / df + \alpha \cdot du_2 / df = 0, \\ \chi_2 : \gamma \cdot du_1 / df + \alpha \cdot du_3 / df = 0, \\ \chi_1 : \gamma \cdot du_2 / df + \beta \cdot du_3 / df = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Так как направляющие косинусы α, β, γ нормали характеристической поверхности должны удовлетворять условию нормированности $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, то, учитывая уравнения самих характеристик, приходим к следующему:

$$\begin{cases} \chi_3 : \beta \cdot du_1 / df + \alpha \cdot du_2 / df = 0 \ \ \alpha^2 + \beta^2 = 1, \\ \chi_2 : \gamma \cdot du_1 / df + \alpha \cdot du_3 / df = 0 \ \ \alpha^2 + \gamma^2 = 1, \\ \chi_1 : \gamma \cdot du_2 / df + \beta \cdot du_3 / df = 0 \ \ \beta^2 + \gamma^2 = 1. \end{cases} \quad (28)$$

Обозначим направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности следующим образом: $\cos\theta_1 = \alpha, \cos\theta_2 = \beta, \cos\theta_3 = \gamma$. С учетом этого система дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{cases} \chi_3 : \cos\theta_2 \cdot du_1 / df + \sin\theta_2 \cdot du_2 / df = 0, \\ \chi_2 : \cos\theta_1 \cdot du_3 / df + \sin\theta_1 \cdot du_1 / df = 0, \\ \chi_1 : \cos\theta_3 \cdot du_2 / df + \sin\theta_3 \cdot du_3 / df = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Уравнения характеристических плоскостей $\alpha_i = 0 \ (i = 1, 2, 3)$ показывают, что они являются взаимоортогональными и полные дифференциалы в соотношениях (29) распишутся по двум направлениям, которые будут разными для каждой из характеристических плоскостей. Переходя к частным производным по этим направлениям, получим:

$$\begin{cases} \chi_3 : \cos\theta_2 \cdot \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial u_1}{\partial \beta} d\beta \right) + \\ + \sin\theta_2 \cdot \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial u_2}{\partial \beta} d\beta \right) = 0, \\ \chi_2 : \cos\theta_1 \cdot \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial u_3}{\partial \gamma} d\gamma \right) + \\ + \sin\theta_1 \cdot \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial u_1}{\partial \gamma} d\gamma \right) = 0, \\ \chi_1 : \cos\theta_3 \cdot \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial \gamma} d\gamma + \dfrac{\partial u_3}{\partial \beta} d\beta \right) + \\ + \sin\theta_3 \cdot \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial \gamma} d\gamma + \dfrac{\partial u_2}{\partial \beta} d\beta \right) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Учитывая, что $\cos\theta_1 = \alpha, \cos\theta_2 = \beta, \cos\theta_3 = \gamma$, а также соотношение нормированности $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ и уравнения характеристик, представим дифференциалы, входящие в систему (30), через одно приращение $d\theta_i$ разное для каждого из уравнений (30). Приравнивая коэффициенты, стоящие перед $d\theta_i$ к нулю, получим следующие дифференциальные уравнения вдоль характеристических направлений:

$$\begin{cases} \chi_3 : \cos^2\theta_2 \cdot \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \cos\theta_2 \sin\theta_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial \beta} + \\ + \cos\theta_2 \sin\theta_2 \cdot \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha} - \sin^2\theta_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \beta} = 0, \\ \chi_2 : \cos^2\theta_1 \cdot \dfrac{\partial u_3}{\partial \alpha} - \cos\theta_1 \sin\theta_1 \dfrac{\partial u_3}{\partial \gamma} + \\ + \cos\theta_1 \sin\theta_1 \cdot \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \sin^2\theta_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \gamma} = 0, \\ \chi_1 : \cos^2\theta_3 \cdot \dfrac{\partial u_3}{\partial \gamma} - \cos\theta_3 \sin\theta_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial \beta} + \\ + \cos\theta_3 \sin\theta_3 \cdot \dfrac{\partial u_2}{\partial \gamma} - \sin^2\theta_3 \dfrac{\partial u_2}{\partial \beta} = 0. \end{cases} \quad (31)$$

ЧИСЛОВОЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Решение системы дифференциальных уравнений (31) в точке О определяется численно, исходя из того, что оно известно в области зависимости ABC, показанной на (рис. 2). Введем в рассмотрение разностную сетку, показанную на (рис. 2) с шагами по направлениям α, β, γ равными $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$. В этом случае уравнение (31) в разностном виде запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \cos^2\theta_2 \cdot \left(u_1^{ijk} - u_1^{i+1jk}\right) / h_\alpha - \\ - \sin 2\theta_2 \left[\left(u_1^{ijk} - u_1^{ij+1k}\right) / h_\beta - \left(u_2^{ijk} - u_2^{i+1jk}\right) / h_\alpha \right] / 2 - \\ - \sin^2\theta_2 \left(u_2^{ijk} - u_2^{ij+1k}\right) / h_\beta = 0, \\ \cos^2\theta_1 \cdot \left(u_3^{ijk} - u_3^{i+1jk}\right) / h_\alpha - \\ - \sin 2\theta_1 \left[\left(u_3^{ijk} - u_3^{ijk+1}\right) / h_\gamma - \left(u_1^{ijk} - u_1^{i+1jk}\right) / h_\alpha \right] / 2 - \\ - \sin^2\theta_1 \left(u_1^{ijk} - u_1^{ijk+1}\right) / h_\gamma = 0, \\ \cos^2\theta_3 \cdot \left(u_3^{ijk} - u_3^{ijk+1}\right) / h_\gamma - \\ - \sin 2\theta_3 \left[\left(u_3^{ijk} - u_3^{ij+1k}\right) / h_\beta - \left(u_2^{ijk} - u_2^{ijk+1}\right) / h_\gamma \right] / 2 - \\ - \sin^2\theta_3 \left(u_2^{ijk} - u_2^{ij+1k}\right) / h_\beta = 0. \end{cases}$$

Будем рассматривать в качестве неизвестных функций $u_l^{ijk} \ (l = 1, 2, 3)$ и выразим их через все оставшееся, получим:

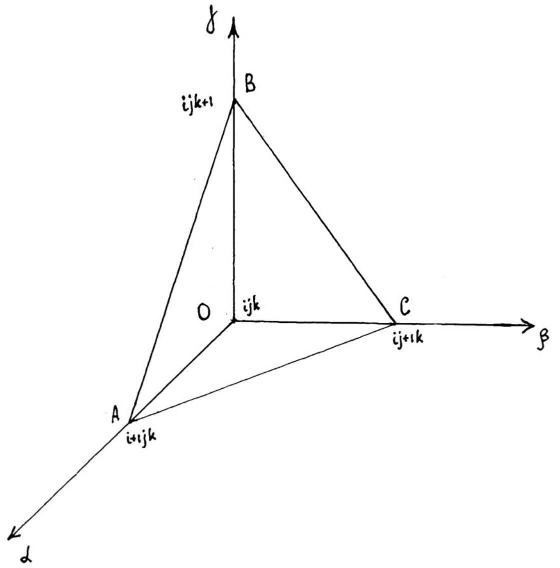

Рис.2. Конечно-разностная сетка

$$\begin{cases} u_1^{ijk} = \big[P_3 \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_1 \cdot (\cos\theta_2 - \sin\theta_2) \times \\ \times (\cos\theta_1 - \sin\theta_1) - P_2 \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_3 \cdot (\cos\theta_2 - \sin\theta_2) \times \\ \times (\cos\theta_3 - \sin\theta_3) - P_1 \cdot \sin\theta_3 \cdot \cos\theta_1 \cdot (\cos\theta_3 - \sin\theta_3) \times \\ \times (\cos\theta_1 - \sin\theta_1)\big] / (h_\beta \cdot h_\gamma \cdot P), \\ u_2^{ijk} = \big[-P_3 \cdot \cos\theta_2 \cdot \cos\theta_1 \cdot (\cos\theta_2 - \sin\theta_2) \times \\ \times (\cos\theta_1 - \sin\theta_1) + P_2 \cdot \cos\theta_2 \cdot \cos\theta_3 \cdot (\cos\theta_2 - \sin\theta_2) \times \\ \times (\cos\theta_3 - \sin\theta_3) - P_1 \cdot \cos\theta_3 \cdot \sin\theta_1 \cdot (\cos\theta_3 - \sin\theta_3) \times \\ \times (\cos\theta_1 - \sin\theta_1)\big] / (h_\alpha \cdot h_\gamma \cdot P), \\ u_3^{ijk} = \big[-P_3 \cdot \sin\theta_2 \cdot \sin\theta_1 \cdot (\cos\theta_2 - \sin\theta_2) \times \\ \times (\cos\theta_1 - \sin\theta_1) - P_2 \cdot \cos\theta_2 \cdot \sin\theta_3 \cdot (\cos\theta_2 - \sin\theta_2) \times \\ \times (\cos\theta_3 - \sin\theta_3) + P_1 \cdot \sin\theta_3 \cdot \sin\theta_1 \cdot (\cos\theta_3 - \sin\theta_3) \times \\ \times (\cos\theta_1 - \sin\theta_1)\big] / (h_\beta \cdot h_\alpha \cdot P), \end{cases} \tag{32}$$

где

$$\begin{cases} P = (\cos\theta_1 - \sin\theta_1)(\cos\theta_2 - \sin\theta_2)(\cos\theta_3 - \sin\theta_3) \times \\ \times (\cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3) / (h_\beta h_\gamma h_\alpha), \\ P_1 = \cos^2\theta_2 \cdot u_1^{i+1jk} / h_\alpha - \sin 2\theta_2 \big[u_1^{ij+1k} / h_\beta - u_2^{i+1jk} / h_\alpha\big] / 2 - \\ -\sin^2\theta_2 u_2^{ij+1k} / h_\beta, \\ P_2 = \cos^2\theta_1 \cdot u_3^{i+1jk} / h_\alpha - \sin 2\theta_1 \big[u_3^{ijk+1} / h_\gamma - u_1^{i+1jk} / h_\alpha\big] / 2 - \\ -\sin^2\theta_1 u_1^{ijk+1} / h_\gamma, \\ P_3 = \cos^2\theta_3 \cdot u_3^{ijk+1} / h_\gamma - \sin 2\theta_3 \big[u_3^{ij+1k} / h_\beta - u_2^{ijk+1} / h_\gamma\big] / 2 - \\ -\sin^2\theta_3 u_2^{ij+1k} / h_\beta. \end{cases}$$

Конечно-разностная схема (32) позволяет рассчитать деформированное состояние.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для расчета пространственного напряженного деформированного состояния была произведена линеаризация условия Мизеса путем введения малого параметра $\varepsilon = \Delta k / k$ и рассмотрено условие полной пластичности, что позволило замкнуть систему дифференциальных уравнений, полученную подстановкой условий Коши в соотношения ассоциированного закона пластичности. Исследование данной системы показало, что она гиперболична и имеет вещественные характеристики. Нахождение дифференциальных соотношений вдоль характеристических плоскостей позволило сформулировать конечно-разностную схему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Криштал М.М.* Неустойчивость и мезоскопическая неоднородность пластической деформации / М. М. Криштал // Физическая мезомеханика. — 2004. — Т. 7, № 5. — С. 31—45.

2. *Ивлев Д.Д.* Теория предельного состояния и идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2005. — 357 с.

3. *Ивлев Д.Д.* Мир эллиптический и мир гиперболический / Д. Д. Ивлев // Вестник СамГУ. — 2005. — № 5 (39).

4. *Радаев Ю.Н.* О t-гиперболичности пространственных задач теории

пластичности / Ю. Н. Радаев // Вестник СамГУ. — 2005. — №3 (37). — С. 57—70.

5. *Радаев Ю.Н.* К 75-летию Д. Д. Ивлева / Ю. Н. Радаев // Вестник СамГУ. — 2005. — № 5 (39).

6. *Вервейко Н.Д.* Итерационный метод решения задач теории идеальной пластичности / Н. Д. Вервейко, А. В. Купцов // Вестник Воронеж. гос. ун-т. Серия: Физика. Математика. — 2005. — №1. — С. 149—153.