УДК: 517.968.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА

Ван Лой Н.

Воронежский государственный педагогический университет

В работе устанавливаются теоремы о существовании решений интегральных включений типа Гаммерштейна в конечномерном пространстве для случаев, когда подынтегральная мультифункция удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и когда она почти полунепрерывна снизу.

В данной работе рассматривается задача о разрешимости интегрального включения типа Гаммерштейна

$$u(t) \in \int_a^b K(t,s)F(s,u(s))ds$$

в пространстве непрерывных функций $C([a,b];\mathbb{R}^n),(n \geq 1)$. Устанавливаются теоремы о существовании решений этого включения в случаях, когда мультиотображение F удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и когда F почти полунепрерывно снизу.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть X,Y — нормированные пространства. Символами $P(Y)\,[C(Y),\,K(Y),\,Cv(Y),\,Kv(Y)]$ мы обозначаем совокупности всех непустых (соответственно, непустых: замкнутых, компактных, выпуклых замкнутых и выпуклых компактных) подмножеств Y. Напомним (см., например, [1]), что многозначное отображение (мультиотображение) $F : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (снизу), если множество $F_+^{-1}(V) = \{x \in X \mid F(x) \subset V\}$ открыто для любого открытого (соответственно, замкнутого) множества $V \subset Y$. Укажем также, что мультиотображение F называется компактным, если область значений $F(X)$ относительно компактна в Y.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — действительное n-мерное пространство; $C([a,b];\mathbb{R}^n)[L^1([a,b];\mathbb{R}^n)]$ обозначает совокупность всех непрерывных (соответственно, суммируемых) функций, определенных на отрезке $[a,b]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Пусть мультиотображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

(F_1) для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ мультифункция $F(\cdot,x) : [a,b] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ имеет измеримое сечение, т. е. существует измеримая функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ такая, что $f(t) \in F(t,x)$ для п.в. $t \in [a,b]$;

(F_2) для почти всех $t \in [a,b]$ мультиотображение $F(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху;

(F_3) для любого непустого ограниченного подмножества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существует такая функция $\vartheta_\Omega \in L_+^1[a,b]$, что:

$$\|F(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \vartheta_\Omega(t),$$

для всех $x \in \Omega$ и п.в. $t \in [a,b]$, где $\|F(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} = \max\{\|y\|_{\mathbb{R}^n} : y \in F(t,x)\}$.

Известно (см., например, [1]), что при этих условиях мультиотображение суперпозиции $\wp_F : C([a,b];\mathbb{R}^n) \to Cv(L^1([a,b];\mathbb{R}^n))$, сопоставляющее каждой непрерывной функции $q \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$ множество всех суммируемых сечений мультифункции $\Phi(t) = F(t,q(t))$, корректно определено и замкнуто (т. е. имеет замкнутый график).

Рассмотрим линейный интегральный оператор

$$A : L^1([a,b];\mathbb{R}^n) \to C([a,b];\mathbb{R}^n),$$
$$A(f)(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)ds,$$

где $K : [a,b]\times[a,b] \to L(\mathbb{R}^n)$, а $L(\mathbb{R}^n)$ обозначает множество всех линейных операторов в $\mathbb{R}^n$. Нетрудно проверить следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть ядро K удовлетворяет следующим условиям:*

(K_1) *существует такое число* $K>0$, *что* $\|K(t,s)\|_L \leq K$ *для любого* $t \in [a,b]$ *и п.в.* $s \in [a,b]$;

(K_2) *для каждого* $t \in [a,b]$ *функция* $s \mapsto K(t,s)x$ *суммируема,* $\forall x \in \mathbb{R}^n$;

(K_3) *существует функция* $\alpha(\cdot) \in L_+^1[a,b]$ *такая, что:*

$$\|K(t_1,s) - K(t_2,s)\|_L \leq \alpha(s)|t_1 - t_2|,$$

для любых $t_1,t_2 \in [a,b]$ *и п.в.* $s \in [a,b]$.

Тогда оператор A вполне непрерывен.

Определение. Композиция $A \circ \wp_F : C([a,b];\mathbb{R}^n) \to Kv(C([a,b];\mathbb{R}^n))$ называется мультиоператором Гаммерштейна и обозначается

$$\Gamma(u) = \int_a^b K(t,s)F(s,u(s))ds.$$

Применяя Теорему 1.5.30, Теорему 1.2.48 (см. [1]) и Теорему 1, мы получаем следующее утверждение о свойствах мультиоператора Гаммерштейна.

Теорема 2. *При выполнении условий* (F_1)—(F_2) *и* (K_1)—(K_2) *мультиоператор* Γ *приводит ограниченные множества в относительно компактные и полунепрерывен сверху.*

Рассмотрим теперь случай, когда мультиотображение F почти полунепрерывно снизу. Напомним (см., например, [1]), что мультиотображение

$$F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$$

называется почти полунепрерывным снизу, если

(F_L) существует последовательность непересекающихся компактных подмножеств $\{I_m\}, I_m \subset [a,b]$, такая, что:

(i) $\mu([a,b] \setminus \cup_m I_m) = 0$, где μ — мера Лебега;

(ii) сужение F на каждое множество $J_m = I_m \times \mathbb{R}^n$ полунепрерывно снизу.

Мы будем предполагать, что мультиотображение F удовлетворяет условию интегральной ограниченности (F_3). Тогда мультиоператор суперпозиции

$$\wp_F : C([a,b];\mathbb{R}^n) \to C(L^1([a,b];\mathbb{R}^n))$$

полунепрерывен снизу (см., например, [1], [2]). Рассмотрим опять мультиоператор

$$A \circ \wp_F : C([a,b];\mathbb{R}^n) \to P(C([a,b];\mathbb{R}^n)),$$

где оператор A задан выше условиями (K_1)—(K_3). Из Теоремы 1.3.11 [1] следует, что мультиоператор $A \circ \wp_F$ полунепрерывен снизу. Аналогично Теореме 2, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если мультиоператор Гаммерштейна*

$$\Gamma : C([a,b];\mathbb{R}^n) \to P(C([a,b];\mathbb{R}^n)),$$

$$\Gamma(u)(t) = \int_a^b K(t,s)F(s,u(s))ds$$

удовлетворяет условиям (F_L), (F_3) и $(K_1)-(K_3)$, то образ $\Gamma(\Omega)$ любого ограниченного множества $\Omega \subset C([a,b];\mathbb{R}^n)$ относительно компактен в $C([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Пусть E — банахово пространство. Напомним (см., например [1], [2], [6], [7]), что непустое множество $M \subset L^1([a,b];E)$ называется разложимым, если для любых функций $f, h \in M$ и любого измеримого по Лебегу множества $m \subset [a,b]$ выполнено

$$f \cdot k_m + h \cdot k_{([a,b]\setminus m)} \in M,$$

где k_m — характеристическая функция множества m.

Символом $D(L^1([a,b];E))$ мы будем обозначать совокупность всех замкнутых разложимых подмножеств пространства $L^1([a,b];E)$. Справедлив следующий аналог теоремы Майкла (см., например, [6]).

Теорема 4. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство. Тогда каждое полунепрерывное снизу мультиотображение*

$$G : X \to D(L^1([a,b];E))$$

имеет непрерывное сечение, т. е. существует непрерывное отображение $g : X \to L^1([a,b];E)$ *такое, что* $g(x) \in G(x)$ *для каждой точки* $x \in X$.

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (F_L) и (F_3) мультиоператор $\wp_F$ имеет замкнутые разложимые значения. Тогда мультиотображение $\wp_F$ имеет непрерывное сечение

$$\ell : C([a,b];\mathbb{R}^n) \to L^1([a,b];\mathbb{R}^n),$$

$$\ell(u) \in \wp_F(u).$$

Но тогда непрерывный оператор

$$\gamma : C([a,b];\mathbb{R}^n) \to C([a,b];\mathbb{R}^n),$$

$$\gamma(u)(t) = \int_a^b K(t,s)\ell(u)(s)ds,$$

в свою очередь, является непрерывным сечением мультиоператора Γ. Из Теоремы 3 следует, что оператор γ вполне непрерывен на $C([a,b];\mathbb{R}^n)$. Заметим также, что его неподвижные точки будут являться неподвижными точками мультиоператора Γ.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим теперь вопрос о разрешимости интегрального включения Гаммерштейна

$$u(t) \in \int_a^b K(t,s)F(s,u(s))ds. \tag{1}$$

Справедливы следующие теоремы о существовании решений такого включения.

Теорема 5. *Пусть ядро* $K : [a,b] \times [a,b] \to L(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условиям* (K_1)—(K_3), *и мультиотображение* $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$

удовлетворяет условиям (F_1)—(F_3). *Дополнительно будем предполагать, что:*

(F_3') *существует такая функция* $\omega \in L^1_+[a,b]$, *что*

$$\|F(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \le \omega(t)(1+\|x\|_{\mathbb{R}^n}),$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$, п.в. $t \in [a,b]$ и

(F_4) $K\int_a^b \omega(t)dt < 1$, *где* K — *константа из условия* (K_1).

Тогда интегральное включение Гаммерштейна (1) имеет по крайней мере одно решение.

Доказательство. Прежде всего ясно, что из (F_3') вытекает условие (F_3). Тогда мы можем использовать все результаты, приведенные выше.

Рассмотрим мультиоператор Гаммерштейна Γ на некотором шаре $T = T(\|u\|_C \le \rho)$. Имеем

$$\|\Gamma(u)\|_C =$$
$$= \max\left\{\left\|\int_a^b K(t,s)f(s)ds\right\|_C : f \in \wp_F(u)\right\},$$

где

$$\left\|\int_a^b K(t,s)f(s)ds\right\|_C =$$
$$= \sup_{t\in[a,b]}\left\{\left\|\int_a^b K(t,s)f(s)ds\right\|_{\mathbb{R}^n}\right\}.$$

Справедлива оценка

$$\left\|\int_a^b K(t,s)f(s)ds\right\|_{\mathbb{R}^n} \le$$
$$\le \int_a^b \|K(t,s)\|_L \cdot \|f(s)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot ds \le$$
$$\le K\int_a^b \|f(s)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot ds.$$

Так как $f(s) \in F(s,u(s))$ для п.в. $s \in [a,b]$, то в силу (F_3') получаем

$$\|f(s)\|_{\mathbb{R}^n} \le \|F(s,u(s))\|_{\mathbb{R}^n} \le$$
$$\le \omega(s)(1+\|u(s)\|_{\mathbb{R}^n}) \le \omega(s)(1+\|u\|_C) \le$$
$$\le \omega(s)(1+\rho)$$

для п.в. $s \in [a,b]$.

Следовательно,

$$\left\|\int_a^b K(t,s)f(s)ds\right\|_{\mathbb{R}^n} \le K(1+\rho)\int_a^b \omega(s)ds,$$

и тогда

$$\left\|\int_a^b K(t,s)f(s)ds\right\|_C \le K(1+\rho)\int_a^b \omega(s)ds.$$

Последнее неравенство справедливо для всех $f \in \wp_F(u)$, поэтому получаем

$$\|\Gamma(u)\|_C \le K(1+\rho)\int_a^b \omega(s)ds.$$

Выбираем ρ так, что $\rho \ge \dfrac{K\int_a^b \omega(s)ds}{1 - K\int_a^b \omega(s)ds}$.

Тогда $\|\Gamma(u)\|_C \le \rho$. Последнее неравенство означает, что мультиоператор Γ отображает шар T в себя. Из Теоремы 2 следует, что полунепрерывный сверху мультиоператор

$$\Gamma : T \to Kv(T)$$

компактен. Применяя Теорему Боненбласта—Карлина о неподвижной точке (см., например, [1], Теорема 2.2.22) мы заключаем, что мультиоператор Γ имеет неподвижную точку: $u_* \in \Gamma(u_*)$. Функция u_* является решением включения (1). ■

Чтобы установить существование решений интегрального включения (1) в случае почти полунепрерывности снизу мультиотображения F, нам понадобится следующее утверждение (см., например, [3]).

Теорема 6. *Пусть* A — *нелинейный, а* B — *линейный вполне непрерывные операторы, действующие в банаховом пространстве* E. *Пусть на сфере* $S(\|x\| = \rho)$ *выполняется условие*

$$\|Ax - Bx\| < \|x - Bx\|.$$

Тогда оператор A имеет неподвижную точку $x_* = Ax_*$ в шаре $T(\|x\| \le \rho)$.

Используя это предложение, мы можем установить следующий результат.

Теорема 7. *Пусть ядро* K *удовлетворяет условиям* (K_1)—(K_3), *мультиотображение* $F : [a,b]\times\mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условию* (F_L). *Допустим, что существуют числа* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}; \beta > 0$ *и функция* $\omega \in L^1_+[a,b]$ *такие, что:*

(F_3'') $\|F(t,x) - \lambda x\|_{\mathbb{R}^n} \le \beta\|x\|_{\mathbb{R}^n} + \omega(t), \forall x \in \mathbb{R}^n$ *и для п.в.* $t \in [a,b]$;

(F_5) $K(b-a)(\beta + |\lambda|) < 1$, *где* K — *константа из условия* (K_1).

Тогда интегральное включение Гаммерштейна (1) *имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условия (F_3'') следует, что

$$\|F(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \le (\beta + |\lambda|)\|x\|_{\mathbb{R}^n} + \omega(t),$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $t \in [a,b]$. Отсюда сразу получаем условие (F_3).

Введем в рассмотрение линейный интегральный оператор

$$Bu = \lambda\int_a^b K(t,s)u(s)ds, u \in C([a,b];\mathbb{R}^n).$$

Легко видеть, что оператор B действует в $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ и является вполне непрерывным.

Рассмотрим мультиоператор Гаммерштейна Γ и оператор B на сфере $S = S(\|u\|_C = \rho)$. Для каждой функции $u \in S$ имеем

$$\|\Gamma u - Bu\|_C =$$

$$= \sup\left\{\left\|\int_a^b K(t,s)[f(s) - \lambda u(s)]ds\right\|_C : f \in \wp_F(u)\right\}.$$

Кроме того, получаем

$$\left\|\int_a^b K(t,s)[f(s) - \lambda u(s)]ds\right\|_C =$$

$$= \sup_{t\in[a,b]}\left\{\left\|\int_a^b K(t,s)[f(s) - \lambda u(s)]ds\right\|_{\mathbb{R}^n}\right\} \le$$

$$\le \sup_{t\in[a,b]}\int_a^b \|K(t,s)\|_L \cdot \|f(s) - \lambda u(s)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot ds.$$

Так как $f(s) \in F(s,u(s))$ для п.в. $s \in [a,b]$, то в силу (F_3'') имеем

$$\|f(s) - \lambda u(s)\|_{\mathbb{R}^n} \le \beta\|u(s)\|_{\mathbb{R}^n} + \omega(s) \le$$

$$\le \beta\|u(s)\|_C + \omega(s) = \beta\rho + \omega(s),$$

для п.в. $s \in [a,b]$. Отсюда получаем

$$\left\|\int_a^b K(t,s)[f(s) - \lambda u(s)]ds\right\|_{\mathbb{R}^n} \le$$

$$\le \int_a^b K(\beta\rho + \omega(s))ds =$$

$$= K\beta\rho(b-a) + K\int_a^b \omega(s)ds.$$

И тогда

$$\left\|\int_a^b K(t,s)[f(s) - \lambda u(s)]ds\right\|_C \le$$

$$\le K\beta\rho(b-a) + K\int_a^b \omega(s)ds.$$

Последнее неравенство справедливо для всех $f \in \wp_F(u)$, поэтому получаем

$$\|\Gamma u - Bu\|_C \le K\beta\rho(b-a) +$$

$$+K\int_a^b \omega(s)ds, \ \forall u \in S.$$

Сдругой стороны, для каждого $t \in [a,b]$ имеем

$$\|u(t) - B(u)(t)\|_{\mathbb{R}^n} =$$

$$= \left\|u(t) - \lambda\int_a^b K(t,s)u(s)ds\right\|_{\mathbb{R}^n} \ge$$

$$\ge \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} - \left\|\lambda\int_a^b K(t,s)u(s)ds\right\|_{\mathbb{R}^n} \ge$$

$$\ge \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} - |\lambda|\int_a^b \|K(t,s)\|_L \cdot \|u(s)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot ds,$$

так как $\|u(s)\|_{\mathbb{R}^n} \le \|u\|_C = \rho$, то

$$\|u(t) - B(u)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \ge$$

$$\ge \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} - K\rho\,|\,\lambda\,|\,(b-a).$$

Следовательно,

$$\|u - Bu\|_C = \sup_{t\in[a,b]}\|u(t) - B(u)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \ge$$

$$\ge \sup_{t\in[a,b]}\|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} - K\rho\,|\,\lambda\,|\,(b-a) =$$

$$= \rho(1 - K\,|\,\lambda\,|\,(b-a)).$$

Выбираем $\rho > 0$ так, чтобы $\rho > \dfrac{K\int_a^b \omega(s)ds}{1 - K(b-a)(\beta + |\,\lambda\,|)}$. Тогда получаем

$$\|\Gamma u - Bu\|_C < \|u - Bu\|_C, \ \forall u \in S.$$

Пусть γ — непрерывное сечение мультиоператора Γ. Тогда на сфере S выполняется

$$\|\gamma u - Bu\|_C \le \|\Gamma u - Bu\|_C < \|u - Bu\|_C.$$

Из Теоремы 6 следует, что оператор γ имеет в шаре $T(\|u\|_C \le \rho)$ по крайней мере одну неподвижную точку: $u_* = \gamma u_*$. Функция u_* является решением включения (1). ■

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть ядро K удовлетворяет условиям* (K_1)—(K_3), *мультиотображение* $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условиям* $(F_L), (F_3')$ *и* (F_4). *Тогда интегральное включение Гаммерштейна* (1) *имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Как установлено при доказательстве Теоремы 5, при условиях (F_3') и (F_4) мы можем выбрать число $\rho > 0$ так, что мультиоператор Γ отображает шар $T = T(\|u\|_C \le \rho)$ в себя. Пусть γ — непрерывное сечение мультиоператора Γ. Тогда в силу Теоремы 3 оператор γ отображает шар T в его компактную часть и, следовательно, по теореме Шаудера (см., например, [3], [4]) получаем, что в шаре T оператор γ имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Эта точка является неподвижной для мультиоператора Γ, т. е. интегральное включение (1) имеет решение. ■

О других теоремах существования решений интегральных включений см., например, обзор [5].

В заключение автор хочет выразить благодарность своему научному руководителю профессору В. В. Обуховскому за помощь в подготовке данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисович Ю.Г.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М.: КомКнига, 2005. — 216 с.

2. *Deimling K.* Multivalued differential equations, Walter de Gruyter, Berlin—New York, 1992.

3. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Гос. изд., 1956.

4. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Гос. изд., 1962.

5. *Гельман Б.Д.* О новых результатах в теории многозначных отображений. II. Анализ и приложения. / Б. Д. Гельман, В. В. Обуховский // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 29. — ВИНИТИ, М., 1991. С. 107—159.

6. *Fryszkowski A.* Fixed point theory for decomposable sets. Topological Fixed Point Theory and Its Applications, 2. / A. Fryszkowski // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

7. *Hu S.* Handbook of multivalued analysis. Vol. I. / S. Hu, N.S. Papageorgiou // Theory. Kluwer, Dordrecht, 1997.