УДК 517.518

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА—ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ГРАФЕ*

М. Ш. Бурлуцкая

Воронежский государственный университет

Пусть L — дифференциальный оператор первого порядка $Ly(x)=y'(x)$, заданный на связном геометрическом графе Γ, отвечающий краевым условиям, связывающим значения y в узлах Γ. Изучается вопрос о разложимости на Γ произвольной функции $f(x)$ в ряд Фурье по системе собственных функций оператора L. Для исследования сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$ используется метод контурного интегрирования. В рассматриваемой задаче краевые условия являются нерегулярными по Биркгофу, и здесь возникают трудности, связанные с экспоненциальным ростом резольвенты при больших $|\lambda|$.

В работе рассматриваются достаточные условия сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$, а именно, получен аналог теоремы Жордана—Дирихле.

Пусть L — дифференциальный оператор первого порядка, заданный на связном геометрическом графе $\Gamma: Ly = y'(x), x \in \Gamma$, с граничными условиями $U(y) = 0$, представляющими собой условия непрерывности $y(x)$ во внутренних вершинах графа.

Изучается вопрос о разложимости произвольной непрерывной на Γ функции $f(x)$ в ряд Фурье по системе собственных функций оператора L. Для изучения сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$ используется метод контурного интегрирования ([1]), который требует исследования при больших $|\lambda|$ решения $y(x,\lambda)$ краевой задачи

$$(Ly)(x) = \lambda y(x) + f(x),\ \ x \in \Gamma;\ \ U(y) = 0.$$

Используя векторный подход ([2], с. 21), сводим данную задачу к краевой задаче в пространстве вектор-функций, заданных на отрезке $[0,1]$.

Такие задачи при общих краевых условиях подробно изучены (напр., [1], [3]). Особенность рассматриваемой задачи в специфике краевых условий, которые определяются структурой графа, а именно порождены условиями непрерывности решения во внутренних узлах графа. В случае графа-цикла, ребра которого ориентированы в одном направлении, краевые условия оказываются регулярными по Биркгофу, и для оператора y' на таком графе имеет место аналог теоремы равносходимости [4]. Для оператора L, заданного на графе любой другой структуры, краевые условия нерегулярны, и здесь возникают трудности, связанные с экспоненциальным ростом ядра резольвенты при больших $|\lambda|$.

В данной работе приводятся достаточные условия сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$ в случае произвольного графа (аналог известной теоремы Жордана—Дирихле). Сначала изучается случай графа, состоящего из двух ребер, одно из которых образует цикл. Затем, используя полученный результат, исследуется общий случай.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 04-01-00049, 06-01-00003, 04-01-00697).

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА—ДИРИХЛЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НА ПРОСТЕЙШЕМ ГРАФЕ

1. Постановка задачи. Рассматривается простейший связный геометрический граф Γ, состоящий из двух ребер различной длины, одно из которых образует цикл. Рассмотрим на Γ уравнение

$$(Ly)(x) = \lambda y(x) + f(x),\ \ x \in \Gamma, \tag{1}$$

требуя от его решения $y(x)$ непрерывности всюду на Γ (в том числе и в узле) и дифференцируемости внутри каждого ребра.

Параметризуем каждое ребро отрезком $[0,1]$, выбирая ориентацию ребра, не входящего в цикл, в направлении от внутреннего узла. Полагая $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $x \in [0,1]$, сведем данное уравнение к векторной краевой задаче

$$\begin{gathered} y_{1'}(x) = \lambda y_1(x) + f_1(x), \\ y_{2'}(x) = \lambda d y_2(x) + d f_2(x),\ \ x \in [0,1], \end{gathered} \tag{2}$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \tag{3}$$

Здесь коэффициент $d>0$ возник в результате параметризации ребер, а краевые условия порождены требованием непрерывности решения уравнения (1) в узле. Оператор L теперь принимает вид:

$$Ly = y', \ y = (y_1, y_2)^T, \ y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \quad (4)$$

Вектор-функция $y(x,\lambda) = (R_\lambda f)(x)$, где R_λ — резольвента оператора L, является решением задачи (2)—(3) (R_λ определена в пространстве $L_2[0,1]$, где под $L_2[0,1]$ понимаем пространство вектор-функций, каждая компонента которых интегрируема с квадратом на отрезке $[0,1]$). Для частичной суммы ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L имеем $S_r(f,x) = -\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda f)(x)d\lambda$, где $S_r(f,x)$ включает слагаемые, для которых $|\lambda_k| < r$, а интегрирование ведется по замкнутым контурам, лежащим в области S_{δ_0}, образованной выбрасыванием из комплексной плоскости собственных значений оператора L вместе с окрестностями одного и того же радиуса δ_0. Тогда частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$, соответствующая аргументам j-го ребра ($j=1,2$), есть $(S_r(f,x))_j = -\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda f)_j(x)d\lambda.$

Необходимо выяснить при каких условиях на функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ сумма $(S_r(f,x))_j$ сходится к $f_j(x)$ при $r\to\infty$ равномерно по $x\in[0,1]$ $(j=1,2)$. Полученный результат является аналогом теоремы Жордана—Дирихле в скалярном случае.

2. Найдем аналитическое представление для $R_\lambda f$. Согласно (2)—(3) для первой компоненты $y_1 = (R_\lambda f)_1$ имеем:

$$y_{1'}(x) = \lambda y_1(x) + f_1(x), \ x\in[0,1],$$
$$y_1(0) = y_1(1).$$

Поэтому $(R_\lambda f)_1 = R^0_\lambda f_1$, где R^0_λ — резольвента скалярного оператора

$$L_0 : (L_0 y)(x) = y'(x), \ y(0) = y(1),$$

собственные функции которого образуют тригонометрическую систему $\{e^{2k\pi i x}\}_{k=-\infty}^{k=+\infty}$. Непосредственно решая данную задачу, получим:

$$(R_\lambda f)_1(x) = R^0_\lambda f_1(x) =$$
$$= \frac{e^{\lambda x}}{1-e^\lambda}\int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)}f_1(t)dt + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}f_1(t)dt.$$

Для второй компоненты $y_2 = (R_\lambda f)_2$ имеем:

$$y_{2'}(x) = \lambda d y_2(x) + df_2(x), \ x\in[0,1],$$
$$y_2(0) = y_1(1),$$

откуда

$$(R_\lambda f)_2(x) = R^0_\lambda f_1(x)\,|_{x=1}\, e^{\lambda dx} + \int\limits_0^x e^{\lambda d(x-t)} df_2(t)dt.$$

Как уже отмечалось, ядро резольвенты имеет экспоненциальный рост по λ [4]. Но, интегрируя $(R_\lambda f)_2(x)$ по замкнутому контуру, получим

$$\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda f)_2(x)d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=r} R^0_\lambda f_1\,|_{x=1}\, e^{\lambda dx}d\lambda$$

(второй интеграл обращается в ноль, как интеграл по замкнутому контуру от целой функции). Следовательно частичная сумма ряда Фурье не зависит от функции $f_2(x)$. Поэтому за счет ее выбора можно добиться ограниченности ядра $R_\lambda f$. Правило, по которому следует выбирать $f_2(x)$, а также аналитическое представление для $y_2(x) = (R_\lambda f)_2(x)$ получено А. П. Хромовым в [5]. Процитируем приведенную в [5] теорему.

Теорема. *Пусть N_0 — неотрицательное целое число такое, что $N_0 < d \le N_0 + 1$. Если $f_2(x) = f_1(dx-j)$ при $x\in[jd^{-1},(j+1)d^{-1}]$ $(j=0,\dots,N_0)$, то для второй компоненты $(R_\lambda f)_2$ вектор-функции $R_\lambda f$ имеет место формула*

$$(R_\lambda f)_2 = \frac{e^{\lambda(dx-j+1)}}{1-e^\lambda}\left\{\int\limits_0^{dx-j} e^{-\lambda(1+t)}f_1(t)dt + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{dx-j}^1 e^{-\lambda t}f_1(t)dt\right\}.$$

Отсюда, при указанном выборе $f_2(x)$ для $x\in[jd^{-1},(j+1)d^{-1}]$ $(j=0,\dots,N_0)$, имеем

$$(R_\lambda f)_2(x) = \frac{e^{\lambda(dx-j)}}{1-e^\lambda}\int\limits_0^{dx-j} e^{-\lambda t}f_1(t)dt + \frac{e^{\lambda(dx-j)}}{1-e^\lambda}\int\limits_{dx-j}^1 e^{\lambda(1-t)}f_1(t)dt. \quad (5)$$

3. На первом ребре (т. е. для функции $f_1(x)$) мы имеем задачу о разложении функции $f_1(x)$ по собственным функциям скалярного дифференциального оператора L_0, т. е. задачу разложения в тригонометрический ряд Фурье в скалярном случае.

Имеет место следующий известный результат.

Теорема (Жордана—Дирихле) *Если $f(x)$ — непрерывна на отрезке* $[0,1]$, *имеет на нем огра-*

ниченную вариацию ($f(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$) *и* $f(0) = f(1)$, *то она разлагается в равномерно сходящийся на всем отрезке* $[0,1]$ *тригонометрический ряд Фурье.*

Для первой компоненты $S_r(f,x)$ имеем:

$$(S_r(f,x))_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}(R_\lambda f)_1(x)d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}R_\lambda^0 f_1(x)d\lambda = \sigma_r(f_1,x).$$

Здесь $\sigma_r(f_1,x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f_1(x)$, включающая слагаемые, для которых $|2\pi k| < r$. Потребуем, чтобы $f_1(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ и $f(0) = f(1)$. Тогда, согласно теореме Жордана—Дирихле, $(S_r(f,x))_1$ равномерно сходится к $f_1(x)$ на отрезке $[0,1]$.

Рассмотрим теперь вторую компоненту $S_r(f,x)$. Легко убедиться, что правая часть в (5) есть значение $R_\lambda^0 f_1$ в точке $(dx-j)$. Таким образом $(R_\lambda f)_2(x) = R_\lambda^0 f_1|_{dx-j}$, при $x \in [jd^{-1},(j+1)d^{-1}]$, $j = 0,\ldots,N_0$. Тогда для $(S_r(f,x))_2$ при $x \in [jd^{-1},(j+1)d^{-1}]\,(j=0,\ldots,N_0)$ имеем:

$$(S_r(f,x))_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}R_\lambda^0 f_1|_{dx-j}\,d\lambda =$$

$$= \sigma_r(f_1, dx-j),$$

т. е. $(S_r(f,x))_2$ есть разложение функции $f_1(dx-j)$, $x \in [jd^{-1},(j+1)d^{-1}]$ в тригонометрический ряд Фурье. Учитывая, что $f_1(dx-j)|_{x=jd^{-1}} = f_1(0)$, $f_1(dx-j)|_{x=(j+1)d^{-1}} = f_1(1)$, получаем, что при указанных ранее условиях на $f_1(x)$, согласно теореме Жордана—Дирихле, $(S_r(f,x))_2$ равномерно сходится к $f_1(dx-j) = f_2(x)$ на отрезке $x \in [jd^{-1},(j+1)d^{-1}]$.

Таким образом, справедлива следующая теорема

Теорема 1. *Пусть* $f_1(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ *и* $f(0) = f(1)$, *а* $f_2(x) = f_1(dx-j)$, *где* $x \in [jd^{-1},(j+1)d^{-1}]$. *Тогда функция* $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ *разлагается в равномерно сходящийся на всем отрезке* $[0,1]$ *ряд по собственным функциям оператора (4).*

Замечание. Так как все собственные значения рассматриваемого оператора однократны, то присоединенных функций в разложении $f(x)$ нет.

СЛУЧАЙ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ГРАФЕ

Пусть теперь граф Г состоит из N ребер. Рассматривается краевая задача

$$(Ly)(x) = \lambda y(x) + f(x),\ x \in \Gamma,\ U(y) = 0. \quad (6)$$

Если Г не содержит цикл, т. е. обладает структурой дерева, то условие $U(y) = 0$ есть $(N-1)$ условие непрерывности. Поэтому требуется добавление еще одного дополнительного условия, представляющего собой равенство нулю линейной комбинации значений $y(x)$ в граничных вершинах. В этом случае ядро резольвенты оператора L имеет экспоненциальный рост, и нам не удается исследовать сходимость разложений по собственным функциям. Если граф содержит более одного цикла, то число условий $U(y) = 0$ больше числа уравнений в краевой задаче. Поэтому этот случай также не рассматривается. Далее предполагается, что Г содержит только один цикл.

Параметризуем каждое ребро графа отрезком $[0,1]$, при этом введем следующую ориентацию на Г: ребра, входящие в цикл, ориентируем в круговом направлении от одной из вершин (например, по часовой стрелке), все остальные ребра ориентируются в направлении «от цикла».

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна и имеет ограниченную вариацию на цикле, то* $f(x)$ *разлагается в равномерно сходящийся на цикле ряд по собственным функциям оператора* L.

Доказательство. Пусть цикл содержит n ребер (перенумеруем ребра так, чтобы в цикл входили первые n ребер графа). Заметим, что если из соответствующей (**6**) векторной краевой задачи выделить уравнения и краевые условия, относящиеся только к циклу, то получим систему n уравнений и n граничных условий для соответствующих компонент решения, т. е. краевую задачу

$$y_{j'}(x) = \lambda d_j y_j(x) + d_j f_j(x), \quad x \in [0,1],\ j = 1,\ldots,n, \quad (7)$$

$$y_1(0) = y_n(1), y_2(0) = = y_1(1),\ldots, y_n(0) = y_{n-1}(1). \quad (8)$$

Используя скаляризующий подход ([2], с. 20), «вытягиваем» цикл в отрезок с замкнутыми концами (т. е. в «кольцо»), сводя таким образом векторную задачу к скалярной. А именно, пусть $z(x) = y_1(x)$ при $x \in [0,1]$, $z(x) = y_2(x-1)$ при $x \in [1,2],\ldots, z(x) = y_n(x-(n-1))$ при $x \in [n-1,n]$; $F(x) = f_1(x)$ при $x \in [0,1],\ldots, F(x) = f_n(x-(n-1))$ при $x \in [n-1,n]$. Тогда (7)—(8) принимает вид:

$$z'(x) = \lambda p(x)z(x) + p(x)F(x),\quad x \in [0,n]; z(0) = z(n), \tag{9}$$

где $p(x) = d_1$, при $x \in [0,1],\dots, p(x) = d_n$ при $x \in [n-1,n]$.

Далее, с помощью замены переменной $x = \tau d / d_1$, если $\tau \in [0, d_1 / d]$, $x = \tau d / d_2 + 1 - d_1 / d_2$, если $\tau \in [d_1 / d, (d_1 + d_2)/d],\dots, x = \tau d / d_n + (n-1) - (d_1 + \ldots + d_{n-1})/d_n$, если $\tau \in [(d_1 + \ldots + d_{n-1})/d, 1]$, где $d = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$, задача (9) сводится к скалярной задаче

$$w'(\tau) = \lambda d w(\tau) + d\Phi(\tau),\ w(0) = w(1),$$

где $\Phi(\tau) = f_1\left(\frac{\tau d}{d_1}\right)$, если $\tau \in [0, d_1 / d]$, $\Phi(\tau) = f_2\left(\frac{\tau d}{d_2} - \frac{d_1}{d_2}\right)$, если $\tau \in [d_1/d, (d_1+d_2)/d],\dots,$ $\Phi(\tau) = f_n\left(\frac{\tau d}{d_n} - \frac{d_1 + \ldots + d_{n-1}}{d_n}\right)$, если $\tau \in [(d_1 + \ldots + d_{n-1})/d, 1]$, причем условие $\Phi(0) = \Phi(1)$ требует непрерывности $f(x)$ на цикле. Из теоремы Жордана—Дирихле следует утверждение теоремы. □

Рассмотрим теперь какое-нибудь ребро вне цикла. Пусть $\hat{\Gamma} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — подграф, состоящий из цикла Γ_1 и Γ_2 — цепочки последовательно соединенных ребер, идущих от вершины цикла к этому ребру. Выделяя из (6) соответствующие ребрам из Γ_2 уравнения и краевые условия (при необходимости изменяя нумерацию ребер), получим векторную краевую задачу

$$y_{j'}(x) = \lambda d_j y_j(x) + d_j f_j(x),\quad j = n+1,\dots,n+m, \tag{10}$$

$$y_{n+1}(0) = y_n(1),\ y_{n+2}(0) = y_{n+1}(1),\dots, y_{n+m}(0) = y_{n+m-1}(1). \tag{11}$$

Скаляризуя (10)—(11), «вытягиваем» цепочку в одно ребро. Таким образом, векторная задача (7), (10)—(8), (11) на $\hat{\Gamma}$ сводится к задаче типа (2)—(3) на простейшем графе. Пользуясь полученным для нее результатом, имеем следующее.

Теорема 3. *Пусть $\hat{\Gamma}$ — подграф Γ, $\hat{\Gamma} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — цикл, Γ_2 — цепочка последовательно соединенных ребер графа, выходящих из какой-либо вершины цикла. Если: 1) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на Γ_1;2) при скаляризации соответствующей $\hat{\Gamma}$ векторной краевой задачи функция $f(x)$ продолжается с Γ_1 на Γ_2 также, как в теореме 1, то $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся на $\hat{\Gamma}$ ряд по собственным функциям оператора L.*

Выражаю большую благодарность профессору А. П. Хромову за постановку задачи, а также профессору Ю. В. Покорному и сотрудникам его семинара за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

2. Дифференциальные уравнения на графах / Ю.В. Покорный [и др.]. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.

3. *Хромов А.П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов / А. П. Хромов // Матем. сборник. — 1981. — Т. 114(156), № 3. — С. 378—405.

4. *Бурлуцкая М.Ш.* Теорема равносходимости для дифференциальных операторов первого порядка на графе-цикле / М. Ш. Бурлуцкая // Материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения-XVII» , Воронеж, 2006. — С. 30.

5. *Хромов А.П.* О резольвенте оператора оператора дифференцирования на простейшем графе из двух ребер, содержащих цикл / А. П. Хромов // Материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения-XVII». Воронеж. 2006, — С. 192.