УДК 519.81

СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК*

Ю. В. Бугаев, Б. Е. Никитин, С. Н. Черняева

Воронежская государственная технологическая академия

Предлагается метод сужения множества недоминируемых альтернатив посредством бинарного отношения, построенного с помощью экспертных предпочтений. Исследуются свойства полученной функции выбора, определены условия сужения исходного набора.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1, 2], для сужения множества недоминируемых по Парето альтернатив применяются неформальные процедуры, использующие информацию, полученную от экспертов. Наиболее исследован так называемый парнодоминантный подход, при котором строится некоторое бинарное отношение R, более слабое, чем отношение Парето Par, т. е. такое, что $Par \subseteq R$, а затем осуществляется выбор альтернатив, недоминируемых по этому отношению, т. е. применяется функция выбора согласно механизму блокировки [2].

Отметим наиболее известные процедуры этого класса. Прежде всего, это методы группы ELECTRE [3, 4], предложенные в конце 60-х гг. группой французских ученых, во главе с профессором Б. Руа. Основу этих методов составляет подсчет на основе мнений экспертов значений двух параметров, характеризующих отношение превосходства внутри анализируемой пары альтернатив: индексы согласия и несогласия. Методы ELECTRE неоднократно критиковались, поскольку в построенном бинарном отношении нарушалось условие ацикличности. В 1996 г. в работе [5] был предложен улучшенный вариант процедуры, свободный от этого недостатка.

Также следует указать метод В. В. Подиновского [6, 7] и процедуру порядковой оптимизации [8], в основе которых лежит экспертное упорядочение критериев по важности. Способ, предложенный в [9], также использует информацию о важности критериев, но она выражается в количественной форме.

Характеризуя перечисленные методы, следует отметить высокую сложность теории, лежащей в их основе, в то время как, по сути, все они сводятся к экспертному сравнению нескольких альтернатив. Идея сужения множества Парето на основе прямого сравнения альтернативных вариантов была высказана в 1984 г. в работе [10]. Исходной предпосылкой для построения такого сужения является существование функции обобщенного критерия (ОК)

$$F(x) = \sum b_u f_u(x) = b^T f(x), \qquad (1)$$

линейного по частным критериям $f_u(x)$. Результат его применения близок к результатам метода [9], однако в [10] используются более простые и легко интерпретируемые исходные допущения и выкладки. Например, в [9] вводится допущение, что предпочтение эксперта "является сужением некоторого заданного на всем критериальном пространстве иррефлексивного, транзитивного и инвариантного относительно положительного линейного преобразования бинарного отношения", содержательный смысл и происхождение данного отношения не поясняется. Кроме того, при рассмотрении процедуры сравнения альтернатив с числом критериев более двух авторам [9] приходится решать достаточно трудоемкую задачу совместимости предпочтений по отдельным группам критериев. Показано, что предпочтение совместимо по группам критериев лишь при определенных допущениях. При использовании же метода [10] эта проблема решается автоматически: совместимость вытекает из условия существования ОК. Можно привести и другие примеры предпочтительности подхода работы [10].

К сожалению, работа [10] имела ярко выраженную прикладную направленность и не содержала формального подтверждения высказанных идей.

В предлагаемой статье метод [10] проработан теоретически, в частности (в этом отличие от более ранних работ авторов настоящей статьи), определены условия, при которых проис-

* Работа выполнена при финансировании РФФИ, проект 06-07-89189.

ходит сужение множества Парето посредством бинарного отношения, построенного с помощью экспертных предпочтений.

1. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

В методе экстраполяции экспертных оценок (МЭЭО) на основе экспертного сравнения альтернатив из некоторой небольшой обучающей выборки строится система равенств и неравенств, описывающая область возможных значений вектора b коэффициентов функции ОК (1).

Будем предполагать, что для каждой задачи векторной оптимизации объективно существует ОК вида (1), где b_u — неизвестные параметры (веса). Очевидно, функция (1) удовлетворяет всем условиям, чтобы ее можно было считать обобщенным критерием в соответствии с определением В. В. Подиновского [11]. Согласно определению ОК, альтернатива x не хуже альтернативы y тогда и только тогда, когда $F(x) \geq F(y)$. ОК может субъективно оцениваться экспертом на интуитивном уровне, причем при оценивании вносятся случайные ошибки, вследствие которых может возникать нетранзитивность и противоречивость в предпочтениях.

Пусть X — исходное множество альтернатив и $D \subset X$ — некоторое его конечное подмножество (обучающая выборка). Предположим, что эксперт каждый раз сравнивает некоторую пару альтернатив (x,y), $x, y \in D$ на порядковой шкале. Каждое такое сравнение позволяет построить в пространстве весов b_u полупространство, определяемое неравенством

$$\sum_{u=1}^{m} b_u[f_u(x) - f_u(y)] = b^T[f(x) - f(y)] \geq 0. \quad (2)$$

Знак неравенства определяется тем, что, с точки зрения эксперта, альтернатива x лучше, чем y. Пересечение этих полупространств, когда (x,y) пробегает множество всех пар $x, y \in D$ определяет при дополнительном условии $b \in \Lambda_m$, где

$$\Lambda_m = \left\{ b \in E^m \middle| b_i \geq 0; \sum b_u = 1 \right\}, \quad (3)$$

$(m-1)$-мерный выпуклый многогранник $B \subseteq \Lambda_m$.

Построим бинарное отношение $R(B)$, позволяющее сравнивать две произвольные альтернативы $x, y \in X$.

$$(x,y) \in R(B) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall b \in B \;\; b^T f(x) \geq b^T f(y), \\ \exists b^0 \in B : (b^0)^T f(x) > (b^0)^T f(y) \;. \end{cases} \quad (4)$$

Свойства $R(B)$ определяются следующим утверждением.

Утверждение 1. Отношение $R(B)$ асимметрично и транзитивно.

Доказательство изложено в [12].

На основании построенного отношения введем функцию выбора (ФВ) $C^R(X)$, реализующую механизм блокировки [2]:

$$C^R(X) = \{ x \in X \,|\, \forall y \in X (y,x) \notin R \}.$$

Асимметричные, транзитивные отношения, называемые также качественным порядком, определяют важный класс ФВ, обладающих следующими свойствами [2]:

— выбор $C^R(X)$ не пуст;

— ФВ обладает фундаментальными свойствами наследования (H), отбрасывания (O), согласия (C).

2. УСЛОВИЯ СУЖЕНИЯ И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ФВ

Определим условия, при которых построенная ФВ осуществляет сужение множества Парето, т. е. выполняется включение $C^{R(B)}(X) \subseteq P(X)$, где $P(X)$ — множество Парето набора X.

Будем рассматривать множества коэффициентов $B \subseteq \Lambda_m$ (Λ_m — симплекс в пространстве E^m, см. выражение (3)), у которых относительная внутренность $rint(B)$ не пуста.

Теорема 1. Пусть $B_1, B_2 \subseteq \Lambda_m$, $B_1 \subseteq B_2$ — два множества с непустой относительной внутренностью, а R_1, R_2 — бинарные отношения на множестве альтернатив X, порожденных B_1 и B_2 соответственно. Тогда

1) $C^{R_1}(X) \subseteq C^{R_2}(X)$;

2) из строгого включения $C^{R_1}(X) \subset C^{R_2}(X)$ следует строгое же включение $B_1 \subset B_2$.

Доказательство. 1. Пусть $x \in C^{R_1}(X)$. Предположим, что $x \notin C^{R_2}(X)$. Это должно означать, что существует такая альтернатива $y \in X$, что $(y,x) \in R_2$, т. е.

$$\forall b \in B_2 \;\; b^T[f(y) - f(x)] \geq 0.$$

В силу включения $B_1 \subseteq B_2$ имеем для любого $b \in B_1$

$$b^T[f(y) - f(x)] \geq 0. \quad (5)$$

Покажем, что найдется вектор $b^0 \in B_1$, делающий неравенство (5) строгим. Если такого вектора нет, то, поскольку (5) справедливо для всех b из B_1, оно обращается в равенство тождественно на B_1, т. е.

$$b^T[f(y) - f(x)] = 0. \quad (6)$$

Это означает, что B_1 включено в множество, определяемое равенством (6) и имеющее, очевидно, пустую относительную внутренность. Однако по условию B_1 имеет непустую относительную внутренность, и, значит, такое включение невозможно. Следовательно, b^0 существует и $(y,x) \in R_1$.

Но это также невозможно, поскольку $x \in C^{R_1}(X)$. Получили противоречие, доказывающее первую часть теоремы.

2. Пусть $z \in C^{R_2}(X) \setminus C^{R_1}(X)$. Это означает, что не существует элемента, доминирующего над z в смысле отношения R_2, но некоторый $y \in X$ доминирует над z в смысле отношения R_1. Иными словами

$$\forall b \in B_1 \;\; b^T[f(y) - f(z)] \geq 0, \tag{7}$$

при этом либо

$$\forall b \in B_2 \;\; b^T[f(y) - f(z)] \leq 0, \tag{8}$$

либо

$$\exists b^2 \in B_2 : (b^2)^T[f(y) - f(z)] < 0. \tag{9}$$

В силу того, что B_1 и B_2 имеют непустую относительную внутренность и непустое пересечение, неравенства (7) и (8) не могут выполняться одновременно. Поэтому справедливы (7) и (9). Это означает, что $b^2 \in B_2 \setminus B_1$, т. е. $B_2 \setminus B_1 \neq \varnothing$. Следовательно, в силу $B_1 \subseteq B_2$ имеем $B_1 \subset B_2$. Теорема доказана.

Следствие. Для любого множества $B \subseteq \Lambda_m$, у которого $rint(B) \neq \varnothing$, имеет место включение $C^{R(B)}(X) \subseteq P(X)$. Это утверждение с очевидностью вытекает из соотношения $C^{\Lambda m}(X) = P(X)$.

Для организации выбора необходимо посредством отношения $R(B)$ проанализировать все возможные пары $x, y \in X$ с целью подтверждения или опровержения отношения $(x,y) \in R(B)$. В свою очередь, для этого требуется многократно решать задачу линейного программирования. Более эффективный алгоритм сравнения альтернатив можно построить, если воспользоваться свойством качественного порядка, которое гласит [2], что любой качественный порядок можно представить как отношение Парето на некотором наборе критериальных функций.

Пусть B — выпуклый многогранник, определяемый системой неравенств (2). Обозначим b^i, $i = 1,...p$ — базисные точки системы (2).

Теорема 2. Отношение $R(B)$ можно представить в следующем виде

$$(x,y) \in R(B) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \;\; (b^i)^T(f(x) - f(y)) \geq 0, \\ \exists j : \;\; (b^j)^T(f(x) - f(y)) > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $(x,y) \in R(B)$ согласно определению (4). Тогда из верхнего неравенства (4) вытекает верхнее неравенство (10), т. к. $b^i \in B \forall i$.

Далее, соотношение (4) можно также представить в эквивалентной форме:

$$(x,y) \in R(B) \Leftrightarrow \begin{cases} \min\limits_{b \in B} b^T(f(x) - f(y)) \geq 0, \\ \max\limits_{b \in B} b^T(f(x) - f(y)) > 0 \;. \end{cases}$$

Поскольку максимум линейной функции $\psi(b) = b^T(f(x) - f(y))$ достигается в одной из базисных точек, то справедливо и нижнее неравенство (10). Т. е. из представления (4) следует представление (10).

Покажем обратное следование. Пусть выполнено (10). Выберем любой вектор $b \in B$. Имеем соотношение

$$b = \sum b^i \tau_i, \;\; \tau \in \Lambda_p.$$

Тогда для любых $x,y \in X$

$$\begin{aligned} b^T[f(x) - f(y)] &= \sum_u b_u[f_u(x) - f_u(y)] = \\ &= \sum_u \left(\sum_i b_u^i \tau_i \right) [f_u(x) - f_u(y)] = \\ &= \sum_i \tau_i \sum_u b_u^i [f_u(x) - f_u(y)]. \end{aligned}$$

Так как, согласно (10), при любом i внутренняя сумма в последнем выражении неотрицательна, а $\tau_i \geq 0$, то $b^T[f(x) - f(y)] \geq 0$. Следовательно, верно первое условие (4). Второе условие вытекает из второго неравенства соотношения (10), т. к. $b^j \in B$. Теорема доказана.

Следовательно, точки b^i могут быть использованы в качестве коэффициентов новых критериальных функций $r_i(x) = (b^i)^T f(x)$, а выбор $C^{R(B)}(X)$ будет совпадать с множеством $P_r(X)$ — множеством Парето на наборе критериальных функций $r_i(x)$.

Переход к новым критериальным функциям означает задание в пространстве критериев некоторого отображения $r: V \to r(V)$. Требование непустоты $rint(B)$, фигурирующее в теореме 1, обеспечивает инъективность этого отображения, т. е. различным точкам будут поставлены в соответствие различные образы. Помимо этого, данное условие обеспечивает также некое требование устойчивости результатов экспертизы. Определим условие непустоты $rint(B)$.

Пусть $K(A) \subset E^m$ — конус, натянутый на векторы, являющиеся строками матрицы A размера $N \times m$.

Теорема 3. $int\,K(A) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $rank\,A = m$.

Доказательство. Необходимость. Предположим противное, т. е. $int\,K(A) \neq \varnothing$, но $rank\,A = k < m$. Выберем любую точку $u^0 \in int\ K(A)$. Согласно определению $K(A)$, это означает существование таких $\alpha_j^0 > 0, j = 1,...N$, что

$$u^0 = A^T \alpha^0.$$

Возьмем теперь произвольную точку u^1 настолько близкую к u^0, что $u^1 \in int\,K(A)$. Это значит, что существуют такие $\alpha_j^1 > 0, j = 1,...N$, что

$$u^1 = A^T \alpha^1.$$

Отсюда $u^0 - u^1 = A^T(\alpha^0 - \alpha^1)$, или $A^T \Delta\alpha = \Delta u$.

Выделим в матрице A подматрицу A_k ранга k. Без ограничения общности можно допустить, что она состоит из первых k столбцов матрицы A. Обозначим Δu_k — вектор, состоящий из первых k компонент вектора Δu. Тогда $A_k^T \Delta\alpha = \Delta u_k$.

Т. к. $(k+1)$-й столбец матрицы A (вектор a_{k+1}) является линейной комбинацией первых k столбцов матрицы A, то $a_{k+1} = A_k \gamma$, где $0 \neq \gamma \in E^k$. Следовательно, $(k+1)$-я координата вектора Δu (обозначим ее z) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} z &= a_{k+1}^T \Delta\alpha = (A_k \gamma)^T \Delta\alpha = \\ &= \gamma^T A_k^T \Delta\alpha = \gamma^T \Delta u_k. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, $(k+1)$-я координата вектора Δu, а также и все следующие представляют собой линейные комбинации его первых k координат, и, следовательно, не могут быть произвольными. Это означает, что в любой сколь угодно малой окрестности точки u^0, являющейся внутренней для конуса $K(A)$, всегда можно указать точку, координаты которой, начиная с $(k+1)$-й, не удовлетворяют равенству (11), и, следовательно, не будут внутренними для конуса $K(A)$. Поэтому $int\,K(A) = \varnothing$, получаем противоречие.

Достаточность. Пусть $rank\,A = m$. Выберем любой вектор $\alpha^0 \in E_{>0}^m$ и положим $u^0 = A^T \alpha^0$. Очевидно, $u^1 \in int\,K(A)$.

Возьмем любую точку u^1 близкую к u^0, и обозначим $\Delta u = u^0 - u^1$. Рассмотрим линейную систему

$$A^T \lambda = \Delta u.$$

Пусть λ^0 — ее базисное решение, в котором первые m компонент неотрицательны и образуют вектор λ_m^0. Пусть A_m — невырожденная квадратная матрица, образованная первыми m строками матрицы A. Тогда $A_m^T \lambda_m^0 = \Delta u$. Следовательно, $\lambda_m^0 = (A_m^T)^{-1} \Delta u$, и из малости $\|\Delta u\|$ следует малость $\|\lambda_m^0\|$.

Обозначим $\alpha^1 = \alpha^0 - \lambda^0$. Так как $\alpha_j^0 > 0$ для всех j, то выбрав $\|\Delta u\|$ настолько малым, чтобы $\alpha_j^0 - \lambda_j^0 > 0$, получим $\alpha^1 \in E_{>0}^m$. Значит, в силу равенства $u^1 = A^T \alpha^1$ получим $u^1 \in int\,K(A)$. Т. е. любая точка достаточно близкая к u^0 будет внутренней для $K(A)$. Следовательно, $int\,K(A) \neq \varnothing$. Теорема полностью доказана.

В доказанной теореме речь шла о конусе допустимых векторов коэффициентов. Наложив дополнительное условие нормировки $b \in \Lambda_m$, легко перейти к многограннику допустимых векторов коэффициентов. Очевидно, теорема 3 будет справедлива и в этом случае, если в ее условии внутренность конуса заменить на относительную внутренность многогранника.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

В заключение рассмотрим численный пример сужения множества альтернатив (исходные данные взяты из работы [13], но в предлагаемой статье решается другая задача по сравнению с [13]).

Таблица 1

№ альтернативы	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	0.140	0.700	0.700
2	0.220	0.220	0.970
3	0.000	0.000	1.000
4	0.970	0.460	0.600
5	0.000	1.000	0.000
6	0.970	0.016	0.840
7	1.000	0.000	0.000

Пусть имеем набор из 7 альтернатив, характеризующихся тремя критериями: $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, каждый из которых надо максимизировать (табл. 1). Эксперты упорядочили набор следующим образом: $x^4 \succ x^6 \succ x^1 \succ x^2 \succ x^3 \succ x^5 \succ x^7$, где символ $\succ$ означает "лучше по предпочтению".

Пусть имеется информация о значимости критериев: самый значимый — первый критерий, за ним — второй и последний — третий. В данном случае это эквивалентно следующему результату экспертного ранжирования альтернатив: $x^3 \succ x^5 \succ x^7$ при обучающей выборке x^3, x^5, x^7. Исходя из структуры ОК, получаем систему условий:

$$\begin{cases} -b_2 + b_3 \geq 0, \\ -b_1 + b_2 \geq 0, \\ b_1 + b_2 + b_3 = 1, \\ b_1, b_2, b_3 \geq 0, \end{cases} \tag{12}$$

которая определяет область допустимых значений коэффициентов b_j.

Имеем следующие базисные решения системы (12) (табл. 2):

Таблица 2

№ точки	b_1	b_2	b_3
1	0.0000	0.0000	1.0000
2	0.0000	0.5000	0.5000
3	0.5000	0.0000	0.5000
4	0.3333	0.3333	0.3333

По табл. 2 построим 4 новых критериальных функции:

$$r_1(x) = f_3(x);\ r_2(x) = 0.5f_2(x) + 0.5f_3(x);$$

$$r_3(x) = 0.5f_1(x) + 0.5f_3(x);\ r_4(x) = \\ = (f_1(x) + f_2(x) + f_3(x))/3.$$

После отбора Парето-оптимальных альтернатив по новым критериальным функциям отсеялись точки №№ 5 и 7. Т. е. информации о значимости критериев оказалось недостаточно для отсева большого числа альтернатив.

Воспользуемся другой выборкой $x^6 \succ x^1 \succ x^2$ и на ее основании построим следующую систему:

$$\begin{cases} 0.83b_1 - 0.684b_2 + 0.140b_3 \geq 0, \\ -0.02b_1 + 0.47b_2 - 0.27b_3 \geq 0, \\ b_1 + b_2 + b_3 = 1, \\ b_1, b_2, b_3 \geq 0, \end{cases}$$

которая имеет базисные точки, приведенные в табл. 3. В результате отсева в наборе останутся варианты № 4 (лучшая альтернатива) и № 7. Т. е. отсев получился намного более эффективный.

Таблица 3

№ точки	b_1	b_2	b_3
1	0.4518	0.5482	0.0000
2	0.9592	0.0408	0.0000
3	0.1659	0.3088	0.5253

Присутствие в полученном наборе лучшей альтернативы не является случайностью. Имеет место следующее утверждение [14].

Теорема 4. Пусть истинный вектор коэффициентов b^0 ОК принадлежит множеству B, и на альтернативе $x \in X$ достигается максимум истинного ОК. Тогда она сохраняется в выборе $C^R(X)$, проведенном согласно механизму блокировки по отношению $R(B)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Подиновский В.В.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. — М. : Наука, 1982. — 256 с.

2. *Юдин Д.Б.* Вычислительные методы теории принятия решений / Д. Б. Юдин. — М. : Наука, 1989. — 316 с.

3. *Руа Б.* Проблемы и методы принятия решений в задачах со многими целевыми функциями / Б. Руа // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. — М. : Мир, 1976. — С. 20—58.

4. *Руа Б.* Классификация и выбор при наличии нескольких критериев (метод ЭЛЕКТРА) / Б. Руа // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. — М. : Мир, 1976. — С. 80—107.

5. *Анич И.* Метод “Электра” и проблема ацикличности отношений альтернатив / И. Аннич, О. И. Ларичев // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 8. — С. 108—118.

6. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями / В. В. Подиновский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1975. — Т. 15, № 2. — С. 130—141.

7. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями / В. В. Подиновский // Автоматика и телемеханика. — 1976. — № 11. — С. 118—127.

8. Многокритериальная оптимизация: математические аспекты / Б. А. Березовский, Ю. М. Барышников, В. И. Борзенко и др. — М. : Наука, 1989. — 126 с.

9. *Ногин В.Д.* Использование набора количественной информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений / В. Д. Ногин, И. В. Толстых // Журн. вычислит. математики и матем. физики. — 2000. — Т. 40, № 11. — С. 1593—1601.

10. *Сысоев В.В.* Выбор решений при проектировании линий и комплектов оборудования полупроводникового производства на основе экстраполяции экспертных предпочтений / В. В. Сысоев, В. М. Самойлов, М. С. Чирко // Электронная техника. Серия: Технология, организация пр-ва и оборудование. — 1984. — Вып. 2. — С. 51—53.

11. *Подиновский В.В.* Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах / В. В. Подиновский // Современное состояние теории исследования операций. — М. : Наука, 1979. — С. 117—145.

12. *Бугаев Ю.В.* Алгоритм бисекции в экстраполяции экспертных оценок / Ю. В. Бугаев // Экономика и математич. методы. — 2002. — Т. 38, № 3. — С. 121—125.

13. *Бугаев Ю.В.* Синтез моделей выбора технологических решений на основе двухэтапных мажоритарных схем : дис. ... доктора физ.-мат. наук / Ю. В. Бугаев. — Воронеж: ВГТА, 2005. — 322 с.

14. *Бугаев Ю.В.* Применение прямого обобщения скалярных алгоритмов в векторной оптимизации на графах / Ю. В. Бугаев // Дискретная математика. — 2001. — Т. 13, Вып. 3. — С. 110—124.