УДК 517.98

БИФУРКАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ФРЕДГОЛЬМОВА ФУНКЦИОНАЛА ИЗ ОМБИЛИЧЕСКОЙ ТОЧКИ МИНИМУМ В ВЕРШИНЕ УГЛА

А. В. Белоглазов

Воронежский государственный университет

Рассмотренна общая схема изучения угловых особенностей фредгольмовых функционалов. Описано геометрическое строение каустического множества для омбилической особой точки гиперболического типа в вершине угла, приведен полный список раскладов, бифурцирующих морсовских экстремалей.

Многие нелинейные краевые задачи математической физики, имеющие вариационное происхождение, допускают применение разнообразных методов абстрактного вариационного исчисления на банаховых многообразиях [1], [2]. В биффуркационном анализе фредгольмовых функционалов с полуограничениями достаточно хорошо зарекомендовал себя метод конечномерных редукций [3]—[5]. Решение подобных задач в условиях непрерывной симметрии может быть сведено к анализу миниверсальных разверток краевых и угловых особенностей гладких функций, изученных В. И. Арнольдом, С. Т. С. Уоллом, Д. Сирсмой, Д. Питом, Т. Постоном и др. [6], [7].

Ряд новых результатов по приложениям краевых и угловых особенностей к задачам вариационного исчисления был получен Ю. И. Сапроновым, А. В. Гнездиловым, О. Ю. Даниловой, О. В. Швыревой, и М. А. Хуссаином (в рамках теории фредгольмовых функционалов на банаховых многообразиях) [8], [9].

Статья посвященна малоисследованному случаю гиперболической омбилики в подвижном угле. Отбрасывая подробности, последнее можно охарактеризовать как редуцируемость экстремальной задачи $V(x) \to extr$ к задаче о бифуркации критических точек семейства полиномов

$$W(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1^3}{3} + \xi_1\xi_2^2 + \delta\xi_1^2 + p_1\xi_1 + p_2\xi_2 \quad (1)$$

в угловом секторе

$$\begin{cases} \xi_1 + a_1\xi_2 \geq \varepsilon_1; \\ \xi_1 + a_2\xi_2 \geq \varepsilon_2. \end{cases} \quad (2)$$

Существует большое количество задач математической физики, приводящих к необходимости исследования полинома (1) в области (2). Среди них — задача о прогибе упругой балки с двумя односторонними ограничениями [10], [11]; задача о зарождении периодических волн [12]; задача о периодических траекториях гамильтоновой динамической системы [13] и др.

Исследование этих задач можно осуществить по одной геометрической схеме, которую удобнее всего изложить в абстрактной форме — в виде задачи

$$V(x) \to extr, g_1(x) \geq 0, g_2(x) \geq 0,$$

где $V(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ — гладкие функционалы.

1. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ С ПОЛУОГРАНИЧЕНИЯМИ.

Пусть E, F — банаховы пространства и $f : E \to F$ — фредгольмово потенциальное отображение нулевого индекса, $E \subset F \subset \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство (все вложения непрерывны и E плотно в $\mathcal{H}$). Гладкий функционал V называется потенциалом f, если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \langle f(x), h\rangle_{\mathcal{H}}, \ \ x, h \in E$$

($\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$). Уравнение

$$f(x) = 0 \quad (3)$$

определяет экстремали (критические точки) гладкого функционала $V(x)$.

Если $f(x, \lambda) : E \times \mathbf{R}^q \to F$ — семейство гладких фредгольмовых отображений, гладко зависящее от параметра λ, и если отображение $f(\cdot, \lambda)$ потенциально с потенциалом $V(\cdot, \lambda)$, то его потенциал также гладко зависит от данного параметра.

Иногда функционал $V(x, \lambda)$ рассматривается в окрестности нуля при ограничениях на основную переменную в виде m неравенств, задающих неособо пересекающиеся гладкие поверхности и выделяющих m-гранный угол:

$$\mathcal{C} = \{x \in E \,|_i\, (x) \geq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

В случае $m = 1$ (одного неравенства) получаем так называемую краевую особенность. Точка $a \in \mathcal{C}$ называется условно критической для гладкого функционала $V(x, \lambda)$, если $grad_H V(0)$ ортогонален грани $\mathcal{C}$, содержащей a. Число элементов носителя

$$supp(a) = \{k \in \{1, \dots, m\} \mid g_k(a) \neq 0\}$$

(приведенная размерность минимальной грани угла, содержащей эту точку) называется порядком точки a.

Анализ поведения $V(x, \lambda)$ можно проводить на основе перехода к ключевой функции

$$W(\xi) := \inf_{x: g(x) = \xi} V(x),$$

полученной в какой-либо схеме конечномерной редукции [8].

Здесь $g(x) = (g_1, \dots, g_n)^{\mathrm{T}}, \{g_i\}_{i=1}^n$ — набор независимых гладких функционалов (ключевых параметров), включающий в себя семейство ограничителей $\{g_k\}_{k=1}^m$ (определяющих угол). Функционалы $g_i(x)$ подчинены, как правило, дополнительным условиям технического характера. Предполагается, что

$$grad_H g_i(x) \in F \quad \forall x \in E.$$

Считается также, что вблизи нуля в каждом слое $g^{-1}(\xi)$ существует единственная (морсовская) экстремаль $\varphi(\xi)$.

Тогда исследование V в угле $\mathcal{C}$ сводится к исследованию функции W в координатном угле $\xi_j \geq 0, = 1, \dots, m$.

Кратность μ условно критической точки $x_0 \in \mathcal{C}$ определяется как размерность фактор-алгебры

$$Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - a]] / \mathcal{T}(W, a),$$

где a — образ x_0 в пространстве ключевых переменных, $\mathbb{R}[[\xi - a]]$ — алгебра формальных степенных рядов от $\xi - a$, а $\mathcal{T}(W, a)$ — угловой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - a]]$, порожденный двумя следующими наборами функций (тейлоровскими разложениями этих функций):

$$\left\{\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right\}_{i \in \mathrm{supp}(a)}, \quad \left\{\xi_k \frac{\partial W}{\partial \xi_k}\right\}_{k \notin \mathrm{supp}(a)}.$$

Точка, для которой $\mu = 1$, называется простой или регулярной.

Пусть $\hat{M} \in E \times R^q$ — многообразие катастроф, то есть

$$\hat{M} = M_0 \cup M_1 \cup \dots \cup M_m,$$

где M_k определяется соотношениями:

$$f(x, \lambda) = 0, x \in \mathcal{C}_k, \dim Ker \frac{\partial [f]_k}{\partial x}(x, \lambda) > 0.$$

Здесь $\mathcal{C}_k$ — совокупность граней угла $\mathcal{C}$ приведенной размерности k, $\mathcal{C}_0$ — вершинная грань угла, а $[f]_k = grad_H(V\,|_{\mathcal{C}_k})$.

Каустика Σ является образом многообразия катастроф относительно канонической проекции $\pi : E \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q, \Sigma = \pi(\hat{M})$.

Если известна оценка сверху числом d значений индексов Морса всех бифурцирующих экстремалей, то каждый *bif*-расклад описывается матрицей

$$L = \begin{pmatrix} l_0^0 & \dots & l_d^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ l_0^m & \dots & l_d^m \end{pmatrix},$$

в которой элемент l_k^j совпадает с количеством критических точек (углового) индекса k на j-мерных гранях (в приведенном смысле: m-j-коразмерность грани). Как обычно, версальные деформации угловых особенностей содержат информацию о всех метаморфозах, происходящих при всевозможных гладких деформированиях функции — о перестройках поверхностей уровня, расклейках и склейках особых точек, о различных бифуркационных эффектах и т. д., и поэтому они играют центральную роль в теории угловых особенностей (как и в теории обычных особенностей).

В угловом случае версальная деформация определяется как функция $V(x, \lambda)$, для которой совокупность ростков функций $\dfrac{\partial V}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ (начальных скоростей деформации) дает систему линейных образующих в угловом кольце особенности $\hat{Q}_0(V)$. Если эта совокупность является базисом $\hat{Q}_0(V)$, то деформация называется миниверсальной. Если вместо кольца ростков гладких функций использовать максимальный (в нем) идеал и профакторизовать его по угловому якобиеву идеалу, то получим усеченное угловое локальное кольцо $\hat{Q}_0^*(V)$. Деформация $V(x, \lambda)$, для которой $V(x, 0) = 0$ и совокупность ростков функций $\dfrac{\partial V}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ образует базис $\hat{Q}_0^*(V)$, называется ограниченной миниверсальной деформацией. Каустика такой деформации называется главной и обозначается Σ (чаще всего каустикой особенности называют главную каустику).

Каустика разбивает базу ограниченной миниверсальной деформации на ячейки, каждой из которых отвечает единственный расклад бифурцирующих экстремалей.

В бифуркационном анализе угловой особой точки выделяются, как и в обычной теории, следующие две основные задачи: (1) описание геометрического строения (главной) каустики и (2) описание *bif*-раскладов, соответствующих компонентам связности дополнения к каустике (в базе ограниченной миниверсальной деформации).

2. ОМБИЛИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. СТРОЕНИЕ КАУСТИКИ

От функционала $V(x,\lambda)$ в дальнейшем потребуем, чтобы его ключевая функция $W(\xi,\lambda)$ обладала генотипом особенности гиперболической омбилики. Тогда ключевая функция представима в виде:

$$W(\xi,\lambda) = \frac{\xi_1^3}{3} + \xi_1\xi_2^2 + \delta\xi_1^2 + p_1\xi_1 + p_2\xi_2,$$
$$\lambda = (\delta, p_1, p_2)^T.$$

Наличие ограничений на функционал V приводит к рассмотрению функции в угле

$$\begin{cases} \xi_1 + a_1\xi_2 \ge \varepsilon_1; \\ \xi_1 + a_2\xi_2 \ge \varepsilon_2. \end{cases}$$

Описание строения каустики Σ оказывается более удобным после перехода к новой системе координат, переводящей вершину угла в начало координат.

$$\begin{cases} u = \xi_1 - \dfrac{a_1\varepsilon_2 - a_2\varepsilon_1}{a_1 - a_2}; \\ v = \xi_2 - \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{a_1 - a_2}. \end{cases}$$

В координатах (u,v) ключевая функция может быть представлена в виде:

$$\tilde{W}(u,v,\tilde{\lambda}) = \frac{u^3}{3} + uv^2 + d_1u^2 + d_2v^2 + +2d_3uv + q_1u + q_2v,\ \ \tilde{\lambda} = (d_1,d_2,d_3,q_1,q_2)^T. \tag{4}$$

Данная функция рассматривается в угле

$$\begin{cases} u + a_1v \ge 0; \\ u + a_2v \ge 0. \end{cases} \tag{5}$$

Наложим на решаемую задачу дополнительное требование. Потребуем коэрцитивности функции $\tilde{W}(u,v)$ в угле (5) или, что эквивалентно, будем считать, что вершина угла — точка локального минимума (в угловой области) для кубической части функции.

Предложение. *Функция $\tilde{W}(u,v)$ коэрцитивна в угле* (5), *если $a_1a_2 < 0$.*

Заметим, что задача (4)—(5) симметрична относительно перемены местами параметров a_1, a_2. Поэтому достаточно рассмотреть случай $a_1 > 0$, $a_2 < 0$.

Для задачи (4)— (5) каустическое множество может быть представлено в виде следующего объединения:

$$\Sigma = \Sigma_{0,0} \cup \Sigma_{0,1}^{\text{int}} \cup \Sigma_{0,1}^{ext} \cup \Sigma_{1,0}^{\text{int}} \cup \Sigma_{1,0}^{ext} \cup \Sigma_{1,1}.$$

Здесь $\Sigma_{0,0}$ — множество параметров, при которых вырождается, как критическая точка, вершина угла (5); $\Sigma_{0,1}^{int}$ — множество параметров, при которых сужение функции $\tilde{W}(u,v)$ на грань угла $u + a_1v = 0$ имеет вырожденную критическую точку; множество $\Sigma_{1,0}^{int}$ содержит параметры, при которых имеется вырожденный экстремум у сужения функции $\tilde{W}(u,v)$ на грань угла $u + a_2v = 0$; компоненты $\Sigma_{0,1}^{ext}$ и $\Sigma_{1,0}^{ext}$ отвечают за попадание критической точки функции $\tilde{W}(u,v)$ на соответствующие грани угла; если параметр принадлежит множеству $\Sigma_{1,1}$, то во внутренности угла (5) имеется вырожденная критическая точка.

Теорема 1. *Входящие в каустику функции* (4) *множества можно задать следующими соотношениями* (*неравенства, участвующие в системах, отвечают за попадание критической точки в угол* (5))*:*

$$\Sigma_{0,0} : q_2 = a_1q_1, q_2 = a_2q_1. \tag{6}$$

$$\Sigma_{0,1}^{\text{int}} : \begin{cases} q_2 = a_1q_1 - \dfrac{(d_1a_1^2 + d_2^2)^2 - 4d_3a_1(d_1a_1^2 + d_2 - d_3a_1)}{a_1(a_1^2 + 3)}; \\ d_1a_1^2 + d_2 - 2d_3a_1 \le 0. \end{cases} \tag{7}$$

$$\Sigma_{1,0}^{\text{int}} : \begin{cases} q_2 = a_2q_1 + \dfrac{(d_1a_2^2 + d_2^2)^2 - 4d_3a_2(d_1a_2^2 + d_2 - d_3a_2)}{a_2(a_2^2 + 3)}; \\ d_1a_2^2 + d_2 - 2d_3a_2 \le 0. \end{cases} \tag{8}$$

Компоненту $\Sigma_{0,1}^{ext}$ определим системой:

$$\begin{cases} ((1 + a_1^2)q_2 + 2a_1q_1)^2 + 4(2d_1a_1^2 + d_3a_1^3 - \\ -d_2a_1^2 - d_3a_1 - d_2)(a_1d_3 - d_2)q_1 + \\ +4(2d_1a_1^2 + d_3a_1^3 - d_2a_1^2 - d_3a_1 - d_2)\times \\ \times(d_3 - a_1d_1)q_2 = 0; \\ \dfrac{2a_1q_1 + a_1^2q_2 + q_2}{2d_1a_1^2 - d_2(a_1^2 + 1) + d_3a_1(a_1^2 - 1)} \le 0. \end{cases} \tag{9}$$

Компоненту $\Sigma_{1,0}^{ext}$ *зададим следующим образом:*

$$\begin{cases} ((1+a_2^2)q_2 + 2a_2q_1)^2 + 4(2d_1a_2^2 + d_3a_2^3 - \\ -d_2a_2^2 - d_3a_2 - d_2)(a_2d_3 - d_2)q_1 + \\ +4(2d_1a_2^2 + d_3a_2^3 - d_2a_2^2 - d_3a_2 - d_2)\times \\ \times(d_3 - a_2d_1)q_2 = 0; \\ \dfrac{2a_2q_1 + a_2^2q_2 + q_2}{2d_1a_2^2 - d_2(a_2^2+1) + d_3a_2(a_2^2-1)} \geq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Компоненту $\Sigma_{1,1}$ *можно задать, как объединение двух множеств:*

$$\Sigma_{1,1} = \Sigma_{1,1}^1 \cup \Sigma_{1,1}^2.$$

Компонента $\Sigma_{1,1}^1$ *соответствует случаю, когда функция* (4) *имеет единственный экстремум во внутренности угла* (5), *являющийся вырожденным.*

$$\begin{cases} 27d_1^4 - 36d_1^3d_2 + 14d_1^2d_2^2 + 4d_1d_2^3 - d_2^4 - \\ -8q_2^2 - 12d_3^2d_2^2 - 40d_3^2d_2d_1 + 8d_3^4 + \\ +8q_1^2 + 32d_3q_2d_2 - 16d_3^2q_1 - 20q_1d_2^2 - \\ -36d_1^2q_1 + 36d_3^2d_1^2 + 40q_1d_2d_1 + \\ +\sqrt{(d_1-d_2)^2(9d_1^2 - 2d_1d_2 + 8d_3^2 + d_2^2 - 8q_1)^3} = 0; \\ \dfrac{A(a_1) - K(a_1)B}{3d_2 - 3d_1 + B} \geq 0; \\ \dfrac{A(a_2) - K(a_2)B}{3d_2 - 3d_1 + B} \geq 0, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} A(a) = 9d_1^2 - d_2^2 - 4(d_1d_2 + q_1 + aq_2) + \\ +2d_3(ad_2 + 3ad_1 + 2d_3), \\ K(a) = 3d_1 - d_2 + 2ad_3, \\ B = \operatorname{sgn}(d_2 - d_1)\times \\ \times\sqrt{9d_1^2 - 2d_1d_2 + d_2^2 - 8q_1 + 8d_3^2}. \end{gathered}$$

Аналогично, определяется компонента $\Sigma_{1,1}^2$*, на множестве параметров которой, функция* (4) *имеет три экстремума, один из которых является вырожденным.*

$$\begin{cases} 27d_1^4 - 36d_1^3d_2 + 14d_1^2d_2^2 + 4d_1d_2^3 - d_2^4 - \\ -8q_2^2 - 12d_3^2d_2^2 - 40d_3^2d_2d_1 + 8d_3^4 + \\ +8q_1^2 + 32d_3q_2d_2 - 16d_3^2q_1 - 20q_1d_2^2 - \\ -36d_1^2q_1 + 36d_3^2d_1^2 + 40q_1d_2d_1 - \\ -\sqrt{(d_1-d_2)^2(9d_1^2 - 2d_1d_2 + 8d_3^2 + d_2^2 - 8q_1)^3} = 0; \\ \dfrac{A(a_1) - K(a_1)B}{3d_2 - 3d_1 + B} \leq 0; \\ \dfrac{A(a_2) - K(a_2)B}{3d_2 - 3d_1 + B} \leq 0, \end{cases} \tag{12}$$

3. РАСКЛАДЫ БИФУРЦИРУЮЩИХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

Максимальное значение индексов Морса экстремалей задачи (4)—(5) равно 2. Поэтому наборы экстремумов будем представлять в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} l_0^0 & l_1^0 & l_2^0 \\ l_0^1 & l_1^1 & l_2^1 \\ l_0^2 & l_1^2 & l_2^2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Теорема 2. *Для функции* (4) *на коэффициенты* l_i^j *накладываются следующие ограничения:*

$$\begin{gathered} 1)\ l_0^0 - l_1^0 + l_2^0 + 2(l_0^1 - l_1^1 + l_2^1) + \\ +4(l_0^2 - l_1^2 + l_2^2) = 1; \\ 2)\ l_0^0 + l_1^0 + l_2^0 = 1; \\ 3)\ l_0^2 \leq 1; l_1^2 \leq 2; l_2^2 \leq 1. \end{gathered}$$

Первое соотношение представляет собой модифицированную формулу Эйлера. Второе — указывает на то, что вершина угла всегда является точкой экстремума. Третье соотношение обусловлено видом функции (4) и ограничивает количество критических точек внутри угла.

Условие коэрцитивности функции (4) в угле (5) позволяет указать все возможные расклады на сторонах угла. Справедлива теорема:

Теорема 3. *Если* $l_0^0 = 1$ *(вершина угла — точка минимума), то на сторонах угла возможны следующие расклады:*

(0,0,0), (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1),
(0,2,0), (2,2,0), (1,2,1),
(2,1,1), (1,3,0), (0,2,2), (1,1,2),
(0,3,1), (2,0,2), (0,4,0);

если $l_1^0 = 1$ *(вершина угла — седло), то на сторонах угла получаем следующие наборы экстремумов:*

(1,0,0), (0,1,0), (2,1,0), (1,2,0),
(1,1,1), (0,2,1), (2,0,1), (0,3,0);

если $l_2^0 = 1$ *(вершина угла — максимум), то возможны следующие расклады:*

(1,1,0), (0,2,0), (2,0,0).

Теорема 4. *Если* $l_1^2 = 2$, *то* $l_0^2 = 1$.

Теорема 5. *Если* $l_2^0 = 1$, *то* $l_2^2 = 0$.

Теорема 6. *Следующие расклады для функции* (4) *являются недопустимыми:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Опираясь на утверждения теорем 2—6, можно выписать все матрицы возможных раскладов. Количество таких матриц равно 64. Все эти матрицы реализованы, т.е. найдены соответствующие значения параметров задачи (4)—(5), при которых осуществляются данные расклады.

Приведем список соответствующих матриц

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&2&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&2\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\2&1&0\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&0\\1&2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&1\\1&2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\2&1&0\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\1&2&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&2\\1&2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

4. ПРИМЕРЫ

4.1. ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА С ГАМИЛЬТОНИАНОМ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ БИРКГОФА

Из аналитической механики известно, что решение $q(t)$ уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\frac{d}{dt}L_{\dot q}(\dot q,q)-L_q(\dot q,q)=0, \qquad (14)$$

удовлетворяющее периодическому условию $q(t+2\pi)=q(t)$, можно искать как экстремаль функционала действия

$$V(q)=\int_0^{2\pi}L(\dot q,q)dt \qquad (15)$$

на банаховом пространстве C^2-функций $q:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условию $q(t+2\pi)=q(t)$. Этот функционал можно исследовать, при некоторых естественных дополнительных ограничениях, методом конечномерной редукции [3].

Как известно, существует двойственный подход к изучению задачи (14) — на основе гамильтонова формализма. В его рамках рассматривается система уравнений Гамильтона

$$\dot p=-\frac{\partial H(p,q)}{\partial q},\dot q=\frac{\partial H(p,q)}{\partial p},$$

где $H(p,q)$ — функция (гамильтониан), получаемая применением преобразования Лежандра к лагранжиану $L(\dot q,q)$ [14]:

$$H(p,q)=\sup_{\dot q}(<p,\dot q>-L(\dot q,q)).$$

Так же, как и в случае лагранжева формализма, решение системы уравнений Гамильтона эквивалентно отысканию экстремалей функционала

$$\hat V(p,q)=\int_0^{2\pi}(<p,\dot q>-H(p,q))dt. \qquad (16)$$

К функционалу (16) также можно применить схему конечномерной редукции. При этом возникает естественный вопрос сравнения свойств ключевых функций, полученных для одной и той же динамической системы в разных формализмах. В работе [13] показано, что функционал (15) является результатом редукции функционала (16).

Данный факт позволяет переходить от одного формализма к другому при изучении функционалов классического вариационного исчисления методом конечномерных редукций без обременения вопросом сравнения результатов. Исследование динамической системы в рамках гамильтонова формализма в некоторых случаях оказывается более удобным. В частности, имеется возможность использования нормальных форм гамильтоновых систем.

В качестве примера рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом в нормальной форме Биркгофа степени два:

$$\begin{gathered}H(p_1,p_2,q_1,q_2)=\tilde H(p_1^2+q_1^2,p_2^2+q_2^2)=\\=\alpha_1(p_1^2+q_1^2)++\alpha_2(p_2^2+q_2^2)+\\+A_1(p_1^2+q_1^2)^2+A_2(p_2^2+q_2^2)^2+\\+2B(p_1^2+q_1^2)(p_2^2+q_2^2)+C_1(p_1^2+q_1^2)^3+\\+C_2(p_2^2+q_2^2)^3+2d_1(p_1^2+q_1^2)(p_2^2+q_2^2)^2+\\+2d_2(p_1^2+q_1^2)^2(p_2^2+q_2^2).\end{gathered}$$

Задача отыскания экстремалей функционала

$$\begin{gathered}V(p_1,p_2,q_1,q_2)=\\=\int_0^{2\pi}(p_1\dot q_1+p_2\dot q_2-H(p_1,p_2,q_1,q_2))dt,\end{gathered}$$

заданного на пространстве $(\Pi^2_{2\pi})^4$ — 4-мерных дважды непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций, может быть сведена (с помощью метода конечномерных редукций) к изучению экстремумов функции [13]

$$\begin{gathered}U(\xi)=\delta_1(\xi_1^2+\xi_2^2)+\delta_2(\xi_3^2+\xi_4^2)+\\+A_1(\xi_1^2+\xi_2^2)^2+A_2(\xi_3^2+\xi_4^2)^2+\\+2B(\xi_1^2+\xi_2^2)(\xi_3^2+\xi_4^2)+\\+C_1(\xi_1^2+\xi_2^2)^3+C_2(\xi_3^2+\xi_4^2)^3+\\+2d_1(\xi_1^2+\xi_2^2)(\xi_3^2+\xi_4^2)^2+\\+2d_2(\xi_1^2+\xi_2^2)^2(\xi_3^2+\xi_4^2).\end{gathered}$$

После замены переменных $r_1=\xi_1^2+\xi_2^2$, $r_2=\xi_3^2+\xi_4^2$, получим функцию

$$\begin{gathered}\tilde U(r_1,r_2)=\delta_1r_1+\delta_2r_2+A_1r_1^2+A_2r_2^2+\\+2Br_1r_2+C_1r_1^3+C_2r_2^3+2d_1r_1r_2^2+2d_2r_1^2r_2,\end{gathered}$$

определенную в области $r_1\ge0, r_2\ge0$.

Функцию $\tilde U(r_1,r_2)$ с помощью замены переменных можно свести к одному из следующих видов:

$$U_1(x,y)=\frac{x^3}{3}+xy^2+\delta x^2+p_1x+p_2y, \qquad (17)$$

$$U_2(x,y)=\frac{x^3}{3}-xy^2+\delta x^2+p_1x+p_2y.$$

Особенность в нуле первой функции является омбилической гиперболического типа, вторая — эллиптического. Причем изучение бифуркаций критических точек данных функций необходимо проводить в подвижном угле:

$$\begin{cases}x+a_1y\ge\varepsilon_1,\\x+a_2y\ge\varepsilon_2.\end{cases}$$

4.2. ЗАДАЧА О ПРОГИБАХ УПРУГОЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ПАРОЙ ОДНОСТОРОННИХ ОГРАНИЧИТЕЛЕЙ

Колебания и волновые движения упругой балки на упругом основании изучали Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков, J. M. T. Thompson, H. B. Stewart, Б. С. Бардин, С. Д. Фурта и др.

Простейшая нелинейная модель движений балки описывается уравнением

$$\frac{\partial^2w}{\partial t^2}+\frac{\partial^4w}{\partial x^4}+\alpha\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\beta w+w^2=\psi$$

(сила упругой реакции квадратична), w — прогиб балки, ψ — малый функциональный параметр несовершенства.

Первый шаг в изучении такой задачи — отыскание равновесных (стационарных) состояний, определяемых уравнением

$$\frac{d^4w}{dx^4}+\alpha\frac{d^2w}{dx^2}+\beta w+w^2=\psi. \qquad (18)$$

Если рассмотреть стандартные краевые условия

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0, \qquad (19)$$

то эта задача сводится (конечномерной редукцией) к задаче изучения экстремалей 3-параметрического семейства полиномов от двух переменных [9].

В случае наличия дополнительных ограничений на изгиб балки в виде системы неравенств

$$w(x_1) \geq \varepsilon_1, w(x_2) \geq \varepsilon_2, \qquad (20)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — малые параметры, $0 < x_1 < x_2 < 1$, задача может быть сведена с помощью конечномерной редукции к изучения экстремалей 3-параметрического семейства полиномов (1) в угловой области [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иллс Дж.* Основания глобального анализа / Иллс Дж. // Успехи матем. наук. — 1969. — Т. 24, № 3. — С. 157—210.

2. *Смейл С.* Топология и механика / С. Смейл // Успехи матем. наук. — 1972. — Т. 27, вып. 2. — С. 77—133.

3. *Красносельский М.А.* Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления / М. А. Красносельский, Н. А. Бобылев, Э. М. Мухамадиев // ДАН СССР. — 1978. — Т.240, № 3. — С. 530—533.

4. *Сапронов Ю.И.* Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах / Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. — 1996. — Т. 51, № 1. — С. 101—132.

5. *Сапронов Ю.И.* Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах / Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Матем. заметки. — 2000. — Т. 58, № 5. — С. 745—754.

6. *Арнольд В.И.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гуссейн-Заде. — М.: Наука. — 1982. — 304 с.

7. *Постон Т.* Теория катастроф и её приложения / Т. Постон, И. Стюарт. — М.: Мир. — 1980. — 608 с.

8. *Гнездилов А.В.* Угловые особенности фредгольмовых функционалов / А. В. Гнездилов, Ю. И. Сапронов, О.В. Швырева // Вестник ВГУ. Сер. «Физика, Математика». — Воронеж, ВГУ. — 2003. № 1. — С. 99—114.

9. *Даринский Б.М.* О двухмодовых бифуркациях решений одной вариационной краевой задачи для уравнения четвертого порядка / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов // Понтрягинские чтения — XI сборник трудов. Часть 1. — Воронеж, ВГУ. — 2000. С. 57—64.

10. *Сапронов Ю.И.* Угловые особенности гладких функционалов в задачах о прогибах упругих балок и зарождении нелинейных волн / Ю. И. Сапронов, М. А. Хуссаин // Труды ВЗМШ—2004. Воронеж, ВГУ. — 2004. — С. 155—167.

11. *Белоглазов А.В.* Об угловых особенностях гладких функций в нелинейных задачах математической физики / А. В. Белоглазов // Труды ВЗМШ С. Г.Крейна—2006. — Воронеж, ВГУ — 2006. — С. 18—33.

12. *Даринский Б.М.* Фредгольмовы функционалы с круговой симметрией и периодические волны / Б. М. Даринский, Е. В. Ладыкина, Ю. И. Сапронов // Математические модели и операторные уравнения. Том 2. Воронеж, ВГУ. — 2003. — С. 52—67.

13. *Белоглазов А.В.* Конечномерно редуцирующие схемы в лагранжевом и гамильтоновом формализмах / А. В. Белоглазов // Труды математического факультета. Вып. 9 (новая серия). — Воронеж, ВГУ. — 2004. — С. 3—8.

14. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика / К. Годбийон. — М.: Мир. — 1973. — 188 с.