УДК 517.946

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. Д. Баев

Воронежский государственный университет

В работе изучаются псевдодифференциальные операторы, построенные по специальному весовому интегральному преобразованию F_α. Рассматриваются различные классы символов таких операторов. Изучаются свойства коммутации таких операторов с операторами дифференцирования и предельные при $t \to 0$ свойства таких операторов.

В работе рассматриваются псевдодифференциальные операторы, построенные с помощью специального интегрального преобразования F_α. Это преобразование было введено В. П. Глушко в [1]. Псевдодифференциальные операторы, построенные с помощью этого преобразования, впервые были рассмотрены в [2] и названы весовыми певдодифференциальными операторами (в.п.д.о.). В настоящей работе исследуются свойства коммутации в.п.д.о. с оператором дифференцирования и предельные свойства в.п.д.о. при $t \to +0$.

Рассмотрим функцию $\alpha(\mathring{a}), t \in R_+^1$, для которой $\alpha(0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0, \alpha(t) =$ $= \text{const}$ для $t \ge d$ при некотором $d > 0$. Следуя работе [1], введем интегральное преобразование

$$F_\alpha\left[u(t)\right](\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t)\exp\left(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right)\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \quad (1)$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty\left(R_+^1\right)$. Преобразование (1) связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}\left[u\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau, \eta \in R^1$$

следующим равенством

$$F_\alpha\left[u(t)\right](\eta) = F_{\tau\to\eta}\left[u_\alpha(\tau)\right], \quad (2)$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}, t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \dfrac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\left\|F_\alpha\left[u\right](\eta)\right\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\left\|u\right\|_{L_2(R_+^1)}, \quad (3)$$

что дает возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм $L_2(R^1)$ и $L_2(R_+^1)$. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение, где F_α^{-1} есть обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R_+^1)$.

Легко показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha\left[D_{\alpha,t}^j u\right](\eta) = \eta^j F_\alpha\left[u\right](\eta), j = 1, 2, ...,$$

где $D_{\alpha,t} = \dfrac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$.

Следуя работе [1], определим пространства $H_{s,\alpha}; H_{s,\alpha,q}$.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R_+^n)$ (s — действительное) состоит из тех же функций $\mathrm{v}(x,t) \in H_{s,\alpha}(R_+^n)$, для которых конечная норма

$$\|\mathrm{v}\|_{s,\alpha} = \left\{\int\limits_{R_n}\left(1 + |\xi|^2 + \eta^2\right)^s\left|F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v(x,t)\right]\right|^2 d\xi d\eta\right\}^{1/2}. \quad (4)$$

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ $(s \ge 0, q > 1)$ состоит из тех функций $\mathrm{v}(x,t) \in$ $\in H_{s,\alpha}(R_+^n)$, для которых конечная норма

$$\|\mathrm{v}\|_{s,\alpha,q} = \left\{\sum_{l=0}^{[s/q]}\left\|F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1} \times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[\left(1 + |\xi|^2 + \eta^2\right)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}\left[\partial_t^l v\right]\right]\right\|_{L_2(R_+^n)}^2\right\}^{1/2}. \quad (5)$$

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $\left|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)\right| \le c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \ge 2N - |\sigma|$, где

$$N \ge \max_{0 \le p_1 \le l}\left\{2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1, \sigma + 1, \sigma + \frac{l}{2}\right\},$$
$$l = 1, 2, ...,$$

σ — некоторое действительное число.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^{(\sigma)}(D_x, D_{\alpha,t})\,\mathrm{v} = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}[\lambda(\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[\mathrm{v}(x,t)]] \quad (6)$$

на функциях $\mathrm{v}(x,t)$, принадлежащих, например, $C_0^\infty(R^n_+)$.

В силу свойств весового преобразования получаем, что в.п.д.о., определенный в (6), коммутирует с оператором весового дифференцирования. Ниже выясняются свойства коммутации в.п.д.о. с оператором дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial t}$.

Предположим, что символ в.п.д.о. $\lambda(\xi,\eta)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 2. Функция $\lambda(\xi,\eta)\in C^\infty(R^n)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left|\frac{\partial^j\lambda(\xi,\eta)}{\partial\eta^j}\right| \le c_j\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-j)},\ j=0,1,..., \quad (7)$$

где постоянные $c_j>0$ не зависят от $(\xi,\eta)\in R^n$; $\sigma\in R^1$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть σ, s — любые действительные числа, $v(x,t)\in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$, $\partial_t^l\,\mathrm{v}(x,t)\in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+), l=1,2,...$. Тогда при выполнении условия (1) (с заменой σ на $s+\sigma$) и условия (2) для оператора

$$M_{l,\sigma} = \partial_t^l K^{(\sigma)}(D_x,D_{\alpha,t}) - K^{(\sigma)}(D_x,D_{\alpha,t})\partial_t^l \quad (8)$$

справедлива оценка

$$\left\|M_{l,\sigma}\,\mathrm{v}\right\|_{s,\alpha} \le c\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j\,\mathrm{v}\right\|_{\rho+\sigma-1,\alpha}. \quad (9)$$

Константа $c>0$ не зависит от v.

Теорема 2. Пусть $q>1, s\ge 0$ — действительные числа; $l=1,2,...$; $\mathrm{v}(x,t)\in H_{s+lq+\sigma,\alpha,q}(R^n_+)$. Тогда при выполнении условия 1 (при $\sigma=s+q$) и условия 2 для оператора $M_{l,\sigma}$, определенного в (8), справедлива оценка

$$\left\|M_{l,\sigma}\,\mathrm{v}\right\|_{s,\alpha,q} \le c\left\|\mathrm{v}\right\|_{s+lq+\sigma-1,\alpha,q} \quad (10)$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от v.

Теорема 3. Пусть $q>1,\sigma$ — действительные числа, $\mathrm{v}(x,t)\in H_{q+\sigma,\alpha,q}(R^n_+)$. Тогда при выполнении условий 1 и 2 справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0}K^{(\sigma)}(D_x,D_{\alpha,t})\,\mathrm{v} = \lim_{t\to+0}K^{(\sigma)}(D_x,0)\,\mathrm{v}(x,t) = \\ = \lim_{t\to+0}F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(\xi,0)F_{x\to\xi}[v(x,t)]]. \quad (11)$$

Это равенство понимается в смысле равенства обобщенных функций.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1 и 2; $\mathrm{v}(x,t)\in H_{\sigma,\alpha}(R^n_+)$, $\mathrm{v}(x,t)\equiv 0$ при $t>d>0$. Тогда $K^{(\sigma)}(D_x,D_{\alpha,t})\,\mathrm{v}(x,t)=0$ при $t>d>0$.

Рассмотрим теперь в.п.д.о. с переменными символами.

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda(x,t,\xi,\eta)$ принадлежит классу символов $S^\sigma_\alpha, \sigma\in R^1$, если $\lambda(x,t,\xi,\eta)\in C^\infty(R^{n-1}\times(0;+\infty)\times\times R^{n-1}\times R^1)$ и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m\frac{\partial^l}{\partial\xi^l}\frac{\partial^p}{\partial t^p}\lambda(x,t,\xi,\eta)\right| \le \\ \le c_{k,m,l,p}\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-l-p)}, \quad (12)$$

где $k,m,l,p=0,1,2,...;c_{k,m,l,p}>0$ — некоторые константы, не зависящие от x,t,ξ,η,σ.

Рассмотрим в.п.д.о. вида

$$K(x,t,D_x,D_{\alpha,t})\,\mathrm{v}(x,t) = \\ = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[\lambda(x,t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[\mathrm{v}(x,t)]]. \quad (13)$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 5. Пусть $\sigma, s\in R^1$, $\mathrm{v}(x,t)\in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$; $\partial_t^l\,\mathrm{v}(x,t)\in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$, $l=1,2,...$; $\lambda(x,t,\xi,\eta)\in S^\sigma_\alpha$. Тогда при выполнении условия 1 (с заменой σ на $s+\sigma$) для оператора

$$M_{l,\sigma} = \frac{\partial_t^l}{\partial t^l}K^{(\sigma)}(x,t,D_x,D_{\alpha,t}) - \\ -K^{(\sigma)}(x,t,D_x,D_{\alpha,t})\frac{\partial_t^l}{\partial t^l} \quad (14)$$

справедлива оценка

$$\left\|M_{l,\sigma}\,\mathrm{v}\right\|_{s,\alpha} \le c\left(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j\,\mathrm{v}\right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l-1}\left\|\partial_t^j\,\mathrm{v}\right\|_{s+\sigma,\alpha}\right). \quad (15)$$

Константа $c>0$ не зависит от v.

Теорема 6. Пусть $q>1, s\ge 0$ — действительные числа, $\mathrm{v}(x,t)\in H_{s+lq+\sigma,\alpha,q}(R^n_+)$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma=s+q$; $\lambda(x,t,\xi,\eta)\in S^\sigma_\alpha$. Тогда для оператора $M_{l,\sigma}$, определенного в (14), справедлива оценка

$$\left\|M_{l,\sigma}\,\mathrm{v}\right\|_{s,\alpha,q} \le c\left(\left\|\mathrm{v}\right\|_{s+lq+\sigma-1,\alpha,q} + \left\|\mathrm{v}\right\|_{s+(l-1)q+\sigma,\alpha,q}\right), \\ l=0,1,2,... \quad (16)$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от v.

Теорема 7. Пусть $q>1,\sigma$ — действительные числа, $\lambda(x,t,\xi,\eta)\in S^\sigma_\alpha$, $\mathrm{v}(x,t)\in H_{\sigma,\alpha,q}(R^n_+)$. Тогда при выполнении условия 1 справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0}K^{(\sigma)}(x,t,D_x,D_{\alpha,t})\,\mathrm{v} = \\ = \lim_{t\to+0}K^{(\sigma)}(x,0,D_x,0)\,\mathrm{v}(x,t) = \\ = \lim_{t\to+0}F^{-1}_{\xi\to x}\left[\lambda(x,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right]. \quad (17)$$

Это равенство понимается в смысле равенства обобщенных функций.

Теорема 8. Пусть $\sigma \in R^1$, $\lambda(x,t,\xi,\eta) \in S_\alpha^\sigma$, $\mathrm{v}(x,t) \in H_{\sigma,\alpha}(R_+^n)$, $\mathrm{v}(x,t) = 0$ при $t > d > 0$. Тогда $K^{(\sigma)}(D_x, D_{\alpha,t})\,\mathrm{v}(x,t) = 0$ при $t > d > 0$.

Определение 4. Будем говорить, что символ $\lambda(x,t,\xi,\eta)$ принадлежит классу символов $S_\alpha^{\sigma,\rho,\delta}$, $0 < \rho < 1$, $0 < \delta < 1$, если $\lambda(x,t,\xi,\eta) \in C^\infty(R^{n-1} \times (0;+\infty) \times R^{n-1} \times R^1)$ и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \frac{\partial^l}{\partial \xi^l}\frac{\partial^p}{\partial \eta^p}\lambda(x,t,\xi,\eta)\right| \le$$

$$\le c_{k,m,l,p}\left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma - p - l + \rho k + \delta m)}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 9. Пусть $\sigma, s \in R^1, v(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R_+^n)$; $\lambda(x,t,\xi,\eta) \in S_\alpha^{\sigma,\rho,\delta}$, $\partial_t^l\,\mathrm{v}(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R_+^n), l = 1,2,\ldots$. Тогда при выполнении условия 1 (с заменой σ на $s+\sigma$) для оператора $M_{l,\sigma}$, определенного в (14), справедлива оценка

$$\left\|M_{l,\sigma}\,\mathrm{v}\right\|_{s,\alpha} \le c\left(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j\,\mathrm{v}\right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l-1}\left\|\partial_t^j\,\mathrm{v}\right\|_{s+\sigma+\delta j,\alpha}\right)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от v.

Теорема 10. Пусть $q > 1, s \ge 0$ — действительные числа; $\mathrm{v}(x,t) \in H_{s+lq+\sigma,\alpha,q}(R_+^n), \lambda(x,t,\xi,\eta) \in S_\alpha^{\sigma,\rho,\delta}$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = s+q$. Тогда для оператора $M_{l,\sigma}$, определенного в (14), справедлива оценка

$$\left\|M_{l,\sigma}\,\mathrm{v}\right\|_{s,\alpha,q} \le c\left(\|\mathrm{v}\|_{s+lq-1,\alpha,q} + \|\mathrm{v}\|_{s+(l-1)q+\sigma,\alpha,q}\right)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от v.

Теорема 11. Пусть $q > 1, \sigma$ — действительные числа, $\lambda(x,t,\xi,\eta) \in S_\alpha^{\sigma,\rho,\delta}$, $\mathrm{v}(x,t) \in H_{q+\sigma,\alpha,q}(R_+^n)$. Тогда при выполнении условия 1 справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0} K^{(\sigma)}\left(x,t,D_x,D_{\alpha,t}\right)\mathrm{v} =$$

$$= \lim_{t\to+0} K^{(\sigma)}(x,0,D_x,0)\,\mathrm{v}(x,t) =$$

$$= \lim_{t\to+0} F_{\xi\to x}^{-1}\left[\lambda(x,0,\xi,0)F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right].$$

Равенство понимается в смысле равенства обобщенных функций.

Теорема 12. Пусть $\sigma \in R^1, \lambda(x,t,\xi,\eta) \in S_\alpha^{\sigma,\rho,\sigma}$, $\mathrm{v}(x,t) \in H_{\sigma,\alpha}(R_+^n), \mathrm{v}(x,t) = 0$ при $t > d > 0$. Тогда $K^{(\sigma)}(D_x, D_{\alpha,t})\,\mathrm{v}(x,t) = 0$ при $t > d > 0$.

Доказательство этих утверждений основано на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 1. Пусть $f(x)(1+|x|)^{-s} \in L_2(R^1)$ (s — действительное), $g(x) \in S(R^1)$, тогда

$$f(x)\cdot g(x) = F_{\tau\to x}^{-1}\left[F_{x\to\tau}[f] * F_{x\to\tau}[g]\right], \qquad (18)$$

$$F_{x\to\tau}[f\cdot g] = F_{x\to\tau}[f] * F_{x\to\tau}[g]. \qquad (19)$$

Участвующие в (18)—(19) операции понимаются в смысле теории обобщенных функций S' (см. [3]).

Лемма 2. Пусть $\beta(\tau)$ принадлежит $C^N(R^1)$ ($N \ge \sigma, \sigma$ — действительное число), $\beta(\tau) = \mathrm{const}$ при $\tau < 0$ и $D_\tau^N\beta(\tau) \in H_{N-\sigma}(R^1)$. Пусть $\lambda(y) \in C^\infty(R^1)$ и выполняются оценки

$$\left|\partial_y^j\lambda(y)\right| \le c(1+y^2)^{\frac{1}{2}(\sigma - j)}, j = 0,1,2,\ldots.$$

Тогда справедливо следующее представление при любой функции $\mathrm{w}(\tau) \in S(R^1)$:

$$\beta(\tau)F_{y\to\tau}^{-1}\left[\lambda(y)F_{\tau\to y}[\mathrm{w}]\right] - F_{y\to\tau}^{-1}\left[\lambda(y)F_{\tau\to y}[\beta\cdot\mathrm{w}]\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} F_{y\to\tau}^{-1}\left[\lambda_i(y)F_{\tau\to y}\left[D_\tau^i\beta(\tau)\cdot\mathrm{w}(\tau)\right]\right] +$$

$$+F_{y\to\tau}^{-1}\left[\int_{R_1} g_N(y-z,z)F_{\tau\to(y-z)}\left[D_\tau^N\beta(\tau)\right]\cdot F_{\tau\to z}[\mathrm{w}]dz\right], \qquad (20)$$

где

$$\lambda_i(y) = \frac{(-1)^i}{i!}\partial_y^i\lambda(y), i = 1,2,\ldots N,$$

$$g_n(y-z,z) = N\int_0^1 \lambda_N(y - t(y-z))(1-t)^{N-1}dt.$$

Следствие 1. Пусть функция $\beta(\tau)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Пусть функция $\lambda(y)$ принадлежит $C^\infty(R^1)$ и $\left|\partial_y^j\lambda(y)\right| \le c < +\infty$, $j = 0,1,2,\ldots$, где число $c > 0$ не зависит от y. Тогда при всех $\mathrm{w} \in S(R^1)$ справедливо представление (20).

Лемма 3. Пусть выполнено условие 1 и функция $f(t)$ принадлежит $C^{s_1}[0,+\infty)$, где число s_1 определено в условии 1, пусть $\left|\partial_t^i f(t)\right| \le c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty), i = 0,1,\ldots,s_1$. Тогда при $s_1 \ge N \ge \max\limits_{0\le p\le l}\left\{2p + \dfrac{l+\rho-p}{\nu}\right\}$ ($\rho > 0, l > 0$ — действительные числа) равномерно по $t \in [0,+\infty)$ ограничена величина

$$\left|\alpha^{-\rho}(t)(\alpha(t)\partial_t)^N(f(t)\alpha^{-l}(t))\right| \le c < +\infty.$$

Можно показать, что справедливо тождество

$$\alpha^l(t)\partial_t^l u(t) = \sum_{i=0}^{l}\theta_i^l(t)\partial_{\alpha,t}^i u(t),$$

где $u(t) \in C^l[0,+\infty), \partial_{\alpha,t} = \sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, функции $\theta_i^l(t)$ строятся по рекуррентным соотношениям

$$(21)\begin{cases} \theta_i^{l+1}(t) = \theta_{i-1}^l(t) + \partial_{\alpha,t}\theta_i^l(t) - \left(l+\frac{1}{2}\right)\alpha'(t), \\ 1 \le i \le l, \\ \theta_0^{l+1}(t) = \partial_{\alpha,t}\theta_0^l(t) - \left(l+\frac{1}{2}\right)\alpha'(t), \\ \theta_l^l \equiv 1, \theta_0^1(t) = -\frac{\alpha'(t)}{2}, \end{cases}$$

причем из условия $\alpha(t) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ следует, что $\theta_i^l(t) \in C^{s_{1-l}}[0,+\infty)$, $l = 1,2,\ldots,s_1, i = 0,1,\ldots,l$.

Следствие 2. Пусть выполнено условие 1. Тогда при $s_1 - l \ge N \ge \max\limits_{0\le p\le l}\left\{2p + \frac{l-p+\frac{1}{2}}{\nu}\right\}$ ($l = 1,2,\ldots,s_1, s_1$ определено в условии 1) и при всех $t \in [0,+\infty)$ справедлива оценка

$$\left|\alpha(t)(\alpha(t)\partial_t)^N(\theta_i^l(t)\alpha^{-l}(t))\right| \le c < \infty,$$

$$i = 0,1,2,\ldots l.$$

Следствие 3. Пусть выполнено условие 1. Тогда при $s_1 \ge N \ge \max\left\{\frac{3}{2\nu}, 1+\frac{1}{\nu}\right\}$ выполняется оценка

$$\left|\alpha^{-1}(t)(\alpha(t)\partial_t)^N(\alpha^{-0,5}(t)\right| \le c < +\infty$$

при всех $t \in [0,+\infty)$, где число s_1определено в условии 1.

Следствие 4. Пусть выполнено условие 1. Тогда при всех $s_1 \ge N \ge \max\left\{\frac{1}{2\nu}, 1\right\}$ и при всех $t \in [0,+\infty)$ выполняется оценка

$$\left|(\alpha(t)\partial_t)^N(\alpha^{-0,5}(t)\right| \le c < +\infty.$$

Лемма 4. Пусть выполнено условие 1 и $s_1 \ge l+i, i, l = 1,2,\ldots$. Предположим, что функция $u(t)$ принадлежит $C^{l+i}[0,+\infty)$. Тогда для функции

$$G_i u(t) = \sum_{j=0}^{l}\alpha^{-l}(t)(\alpha(t)\partial_t)^i(\theta_j^l(t))\partial_{\alpha,t}^j u(t),$$

где $\theta_j^l(t)$ определены выше, справедлива формула представления

$$G_i(t) = \sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i-1} b_{i_1,j}^i(t)\partial_{\alpha,t}^{i_1}\partial_t^j u(t),$$

где $b_{i_1,j}^i(t) \in C^{s_1-li}[0,+\infty)$ и зависят лишь от функции $\alpha(t)$ и ее производных до порядка $l+i$.

Лемма 5. Пусть выполнено условие 1, $s_1 \ge l+i; l, i = 1,2,\ldots,s_1$, предположим, что функция $u(t)$ принадлежит $C^{l+i}[0,+\infty)$. Тогда справедлива формула представления

$$\sum_{j=0}^{l}(\alpha\partial_t)^i(\theta_j^l(t)\alpha^{-l}(t))\partial_{\alpha,t}^j u(t) = \sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i-1} b_{i_1,j}^i(t)\partial_{\alpha,t}^{i_1}\partial_t^j u(t).$$

Следствие 5. Пусть выполнены условия леммы 5 при $l = 1$. Тогда справедливо тождество

$$\sum_{j=0}^{1}(\alpha(t)\partial_t)^i(\theta_j^1(t)\alpha^{-1}(t))\cdot\partial_{\alpha,t}^j u(t) =$$

$$= P_{i,1}(t)\partial_t u(t) - \sum_{i_1=1}^{i} c_{i,i_1}\partial_t(\alpha\partial_t)^{i_1-1}\left(\frac{\alpha'(t)}{2}\right)\times$$

$$\times P_{i-i_{1,1}}(t)u(t),$$

где функции $P_{i,1}(t)$ определяются по рекуррентным соотношениям $P_{N,l}(t) = P'_{N-1,l}(t)\alpha(t) - lP_{N-1,l}(t)\alpha'(t); P_{1,l}(t) = f'(t)\alpha(t) - lf(t)\alpha'(t)$ при $l = 1, f(t) = 1, P_{0,1}(t) = 1$. Здесь c_{i,i_1} — биномиальные коэффициенты, $i = 1,2,\ldots,s_1$.

Лемма 6. Пусть выполнено условие 1 и $1 + 1/\nu \le N \le s_1$. Если $u(t)$ принадлежит $C_0^N[0,+\infty)$, то функция $\beta(\tau)\,\mathrm{w}(\tau)$ принадлежит $L_1(R_1)$, где $\beta(\tau) = \alpha^{-0,5}(\varphi^{-1}(\tau))$, $\mathrm{w}(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}D_{\alpha,t}^N u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $D_{\alpha,t} = -\sqrt{-\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$.

Следствие 6. Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда справедливо включение

$$D_\tau^j\beta(\tau)\cdot\mathrm{w}(\tau) \in L_1\left(R^1\right),\ \ j = 1,2,\ldots,N,$$

где функции $\beta(\tau)$ и $\mathrm{w}(\tau)$ определены выше.

Следствие 7. Пусть выполнены условия леммы 6, тогда $\mathrm{w}(\tau) \in L_1(R^1)$.

Лемма 7. Пусть $\mathrm{v}(x,t) \in H_{s,\alpha}(R_+^n)$, s — действительное число, $b(t) \in C^{[|s|]+1}[0,+\infty)$ и $\left|\partial_t^i b(t)\right| \le \le c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty), i = 0,1,\ldots,[|s|]+1$. Тогда выполняется оценка $\|b(t)\,\mathrm{v}(x,t)\|_{s,\alpha} \le c\|\mathrm{v}\|_{s,\alpha}$ с константой $c > 0$, не зависящей от v.

Изложим кратко схему доказательства теоремы 1.

Обозначим $\lambda_i(\xi,\eta) = \frac{(-1)^i}{i!}\partial_\eta^i\lambda(\xi,\eta)$, $i = 1,2,\ldots,N$,

$$g_N(\xi,\eta-y,y) = N\int_0^1\lambda_N(\xi,\eta-\theta(\eta-y))(1-\theta)^{N-1}d\theta.$$

Введем операторы $Q_{i,\sigma}, i = 1,2,\ldots,N-1, R_{N,l,\sigma}$ по формулам

$$Q_{i,\sigma}[\mathrm{v}(x,t)] = F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[\lambda_i(\xi,\eta)]F_\alpha F_{x\to\xi}[\mathrm{v}(x,t)],\quad (22)$$

$$R_{N,l,\sigma}\,\mathrm{v}(x,t) = \sum_{j=0}^{l}\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F_{\xi\to x}^{-1}F_{\eta\to\tau}^{-1}\times$$

$$\times\left[\int_{R_1}F_{\tau\to(\eta-y)}\left[D_\tau^N\beta_{j,l}(\tau)\right]\times\right.\quad (23)$$

$$\left.\times F_{x\to\xi}F_{\tau\to y}\left[\left(\partial_{\alpha,t}^j v\right)_\alpha(x,\tau)\right]g_N(\xi,\tau-y,y)dy\right]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)},$$

где $\beta_{j,l}(\tau) = \theta_j^l(t)\alpha^{-l}(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}, j = 0,1,\ldots,l.$

Функции $\theta_j^l(t)$ определены выше, $t=\varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau=\varphi(t)=\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$,

$$(\partial_{\alpha,t}^j \mathrm{v})_\alpha(x,\tau)=\sqrt{\alpha(t)}\partial_{\alpha,t}^j v(x,t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}.$$

Используя вспомогательные утверждения (леммы 1—7, следствия 1—7), доказываются следующие.

Теорема 13. Пусть выполнено условие 1 и оценка (7), $\mathrm{v}(x,t)\in C_0^\infty(R_n)$. Тогда для оператора $M_{l,\sigma}$ справедлива формула представления

$$M_{l,\sigma}\,\mathrm{v}(x,t)=\sum_{i=1}^{N-1}Q_{i,\sigma}\left[\sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i-1}b_{i_1,j}^i(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^j v(x,t)\right]+ +R_{N,l,\sigma}\,\mathrm{v}(x,t), \tag{24}$$

где операторы $Q_{i,\sigma},R_{N,l,\sigma}$ определены выше.

Следствие 8. Пусть выполнены условия теоремы 13. Тогда при $l=1$ формулу (24) можно записать в виде

$$M_{1,\sigma}\,\mathrm{v}=\sum_{i=1}^{N-1}F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}\Bigg[\lambda_i(\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}\Bigg[P_{im1}(t)\partial_t\,\mathrm{v}- -\sum_{i_1=0}^{i}c_{i,i_1}\left\{\partial_t(\alpha\partial_t)^{i_1-1}\left(\frac{\alpha'(t)}{2}\right)\right\}P_{i-i_{1,1}}(t)\,\mathrm{v}\Bigg]\Bigg]+ +R_{N,1,\sigma}\,\mathrm{v}(x,t),$$

где c_{i,i_1} — биноминальные коэффициенты, функции $P_{i,1}(t)$ определяются выше при $l=1, f(t)\equiv 1$, оператор $R_{N,1,\sigma}$ определен в (23) при $l=1, P_{0,1}(t)\equiv 1$.

Обозначим в дальнейшем через $\|\cdot\|$ норму в $L_2(R_+^n)$.

Теорема 14. Пусть выполнены условие 1 и неравенство (7), $\mathrm{v}(x,t)\in C_0^\infty(R^n)$, оператор $K^{(\sigma)}$ определен в (6). Тогда для оператора $M_{l,\sigma}$ справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}\,\mathrm{v}\|\le c\sum_{j=0}^{l}\|\partial_t^j\,\mathrm{v}\|_{\sigma-1,\alpha}$$

с константой $c>0$, не зависящей от v.

Рассмотрим в.п.д.о. $\Lambda^\sigma(D_x,D_{\alpha,t})$ вида

$$\Lambda^\sigma(D_x,D_{\alpha,t})\,\mathrm{v}= =F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}\sigma}F_{x\to\xi}F_\alpha[\mathrm{v}]\right],$$

где σ — действительное число.

Следствие 9. Пусть s,σ — действительные числа, выполнены условие 1 (с заменой в нем σ на $s+\sigma$) и оценка

$$\|M_{l,\sigma}\,\mathrm{v}\|_{s,\alpha}\le c\sum_{j=0}^{l}\|\partial_t^j\,\mathrm{v}\|_{s+\sigma-1,\alpha}$$

с константой $c>0$, не зависящей от v.

Доказательство теоремы 1. Утверждение теоремы 1 для функций $\mathrm{v}(x,t)$, принадлежащих $C_0^\infty(R^n)$, вытекает из следствия 9. В общем случае утверждение теоремы 1 следует из того, что множество функций $C_0^\infty(R^n)$ плотно в пространстве $H_{s,\alpha}(R_+^n)$.

Изложим кратко схему доказательства теоремы 2. Утверждение теоремы 2 исходит из следующих утверждений, которые доказываются с использованием лемм 1—7 и следствий 1—7.

Лемма 8. Пусть выполнено условие 1 и оценка (7). Тогда для любой функции $\mathrm{v}(x,t)\in C_0^\infty(R^n)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0}K^{(\sigma)}(D_x,D_{\alpha,t})\,\mathrm{v}(x,t)= =F_{\xi\to x}^{-1}\left[\lambda(\xi,0)F_{x\to\xi}[\mathrm{v}(x,0)]\right]+ +\lim_{t\to+0}F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}\left[g_N(\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[D_{\alpha,t}^N\,\mathrm{v}]\right],$$

где $N>0$ — целое число, причем s_1 в условии 1 таково, что $N\le s_1$,

$$g_N(\xi,\eta)=N\int\limits_0^1\lambda_N(\xi,\theta\eta)(1-\theta)^{N-1}d\theta,$$

$$\lambda_N(\xi,\eta)=\frac{(-1)^N}{N!}\partial_\eta^N\lambda(\xi,\eta).$$

Лемма 9. Пусть выполнено условие 1 и оценка (7). Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R_1)$ справедливо равенство

$$F_\alpha^{-1}\left[g_N(\xi,\eta)F_\alpha[D_{\alpha,t}^N u]\right]= =\Bigg\{F_{\eta\to\tau}\left[g_N(\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\beta\cdot\mathrm{w}]\right]+ +\sum_{i=1}^{N_1-1}F_{\eta\to\tau}^{-1}\left[g_{N,i}F_{\tau\to\eta}\left[D_\tau^i\beta(\tau)\cdot\mathrm{w}(\tau)\right]\right]+ +F_{\eta\to\tau}^{-1}\Bigg[\int\limits_{R_1}F_{\tau\to(\eta-y)}\left[D_\tau^{N_1}\beta(\tau)\right]\times \times\tilde g_{N,N_1}(\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[\mathrm{w}]dy\Bigg]\Bigg\}\Bigg|_{\tau=\varphi(t)},$$

где функции $\beta(\tau),\mathrm{w}(\tau)$ определены выше, $N\ge\sigma,\ N_1\ge\max\left\{\frac{3}{2\nu},2+\frac{1}{2\nu}\right\}$,

$$g_{N,i}(\xi,\eta)=\frac{(-1)^i}{i!}\partial_\eta^i g_N(\xi,\eta),\ i=1,2,\dots,N_1, \tag{25}$$

$$\tilde g_{N,N_1}(\xi,\eta-y,y)= =N\int\limits_0^1 g_{N,N_1}(\xi,\eta-\theta(\eta-y))(1-\theta)^{N_1-1}d\theta. \tag{26}$$

Лемма 10. Пусть выполнено условие 1 и оценка (7), функция $u(t)$ принадлежит $C_0^\infty(R^1)$. Тогда при каждом $\xi \in R^{n-1}$ функция

$$f_0(\xi,\eta) \equiv F_{\tau\to\eta}[\beta(\tau)\cdot \mathrm{w}(\tau)]g_N(\xi,\eta)$$

принадлежит $L_1(R^1)$ при $N_1 \geq \max\left\{\sigma+1, 1+\dfrac{1}{\nu}\right\}$, функции $\beta(\tau), \mathrm{w}(\tau)$ определены выше.

Следствие 10. Пусть выполнены условия леммы 10. Тогда при каждом $\xi \in R^{n-1}$ функция $f_i(\xi,\eta) = g_{N,i}(\xi,\eta) F_{\tau\to\eta}\left[D_\tau^i \beta(\tau)\cdot \mathrm{w}(\tau)\right]$ принадлежит $L_1\left(R^1\right)$ как функция переменной η. Функции $g_{N,i}(\xi,\eta), \beta(\varsigma), \mathrm{w}(\tau)$ определены выше.

Теорема 15. Пусть выполнено условие 1 и оценка (7). Тогда для любой функции $\mathrm{v}(x,t) \in C_0^\infty(R^n)$

$$\lim_{t\to+0} F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1}\left[g_N(\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha\left[D_{\alpha,t}^N \mathrm{v}(x,t)\right]\right] = 0$$

при $N_1 \geq \max\left\{\sigma+1, 1+\dfrac{1}{\nu}\right\}$.

Доказательство теоремы 3. Утверждение теоремы 3 для функций $\mathrm{v}(x,t) \in C_0^\infty(R^n)$ немедленно вытекает из леммы 8 и теоремы 15. В общем случае утверждение теоремы 3 вытекает из того, что множество функций $C_0^\infty(R^n)$ плотно в пространстве $H_{q+\sigma,\alpha,q}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушко В.П.* Пространства типа С. Л. Соболева дробного порядка с весом и их свойства / В. П. Глушко, М. И. Богатов. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 1979. — 38 с.

2. *Баев А.Д.* Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады АН СССР. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044—1046.

3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1976. — 527 с.