УДК 517.9; 519.248.2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ СПРАВА В R^N

С. В. Азарина, Ю. Е. Гликлих

Воронежский государственный университет

Описываются и изучаются стохастические дифференциальные уравнения и включения, заданные в терминах производных в среднем по Нельсону. Доказаны теоремы существования слабого решения указанных уравнений и включений при некоторых естественных предположениях.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие производных в среднем было введено Э. Нельсоном (см. [19, 20, 21]) для нужд построенной им стохастической механики (вариант квантовой механики). Позже выяснилось, что уравнения в производных в среднем возникают также при описании движения вязкой несжимаемой жидкости (см. [8]). В [6, 7] (см. также [8]) было начато изучение уравнений в производных в среднем как специального типа стохастических дифференциальных уравнений. Во всех указанных случаях решения данных уравнений предполагались процессами диффузионного типа или даже марковскими диффузионными процессами, у которых диффузионный член был задан заранее.

В настоящей работе мы модифицируем одну из идей Э. Нельсона и вводим новый тип производных в среднем, в терминах которых выражается именно диффузионный член. Мы изучаем уравнения с такими и классическими производными в среднем, а также вводим и исследуем дифференциальные включения в производных в среднем. Это новый класс стохастических дифференциальных включений наиболее близкий к обыкновенным дифференциальным включениям. Несмотря на его естественность и большое поле для приложений, этот класс ранее не исследовался.

Настоящая публикация является первой в планируемой авторами серии, поэтому в ней мы рассматриваем наиболее простой и важный для приложений случай уравнений и включений с производными в среднем справа в евклидовом пространстве R^n. Для указанных уравнений и включений доказаны теоремы существования слабого решения при некоторых естественных предположениях.

Уравнения и включения с производными слева, текущими и осмотическими скоростями по Нельсону будут рассмотрены в последующих публикациях.

В статье мы всегда будем использовать координатное представление векторов и линейных операторов. Векторы из R^n мы будем записывать как векторы-столбцы. Если X — такой вектор-столбец, то транспонированный (сопряженный) вектор X^* — вектор-строка. Линейные операторы из R^n в R^n в координатной форме описываются $n \times n$ матрицами, * означает транспонирование матрицы (переход к матрице сопряженного оператора). Пространство $n \times n$ матриц мы обозначаем $L(R^n, R^n)$.

Символом $S(n)$ мы обозначаем линейное пространство симметрических матриц $n \times n$, которое является подпространством в пространстве $L(R^n, R^n)$. Символом $S_+(n)$ мы обозначаем множество положительно определенных симметрических матриц, которое является открытым выпуклым множеством в $S(n)$. Множество неотрицательно определенных симметрических матриц $n \times n$, которое является замыканием $S_+(n)$, мы обозначаем $\bar{S}_+(n)$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в R^n, $t \in [0, T]$, определенный на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) и такой, что $\xi(t)$ является L_1 — случайной величиной для всех t. Известно, что каждый такой процесс определяет три семейства σ-подалгебр σ-алгебры F:

(i) "прошлое" $\mathcal{P}_t^\xi$ — порожденное прообразами борелевских множеств в R^n при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to R^n$ для $0 < s < t$;

(ii) "будущее" $\mathcal{F}_t^\xi$ — порожденное аналогичным образом для $t < s < T$;

(iii) "настоящее" $\mathcal{N}_t^\xi$ — порожденное самим отображением $\xi(t)$.

Все семейства мы считаем полными, т.е. пополняем всеми множествами вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot \mid N_t^\xi)$ относительно "настоящего" $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$ через E_t^ξ.

Следуя [19, 20, 21], введем понятие производной в среднем справа.

Определение 1. *Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right), \qquad (1)$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$ и $\Delta t \to +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t > 0$.

Мы будем также использовать следующее обобщение понятия производной в среднем справа (см., например, [8]).

Определение 2. *Производная в среднем справа $D^\xi \eta(t)$ процесса $\eta(t)$ относительно $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D^\xi \eta(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{\eta(t+\Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} \right), \qquad (2)$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$ и $\Delta t \to +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t > 0$.

Введем дифференциальный оператор D_2, который на L_1-случайном процессе $\xi(t)$, $t \in [0,T]$ принимает следующее значение.

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^*}{\Delta t} \right), \qquad (3)$$

где $(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))$ рассматривается как вектор R^n (вектор-столбец), $(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^*$ — сопряженный вектор (транспонированный, вектор-строка), предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$.

Замечание 3. *Напомним (см., например, [14]), что из свойств условного математического ожидания следует существование борелевских отображений $a(t,x)$ и $\alpha(t,x)$ из $R \times R^n$ в R^n и $\overline{S}_+$ соответственнотаких,что $D\xi(t) = a(t, \xi(t))$ и $D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t))$. Следуя [14], мы будем называть $a(t,x)$ и $\alpha(t,x)$ регрессиями.*

Пусть $A : [0,T] \times \Omega \to L(R^k, R^n)$ — случайная операторная функция, $\mathcal{B}_t$ — неубывающее семейство σ-подалгебр σ-алгебры F. Напомним стандартное определение.

Определение 4. *Если $A(t)$ измеримо относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_t$ при каждом t, то говорят, что $A(t)$ не упреждает относительно $\mathcal{B}_t$.*

Процессом Ито называется процесс $\xi(t)$ вида

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t A(s)dw(s),$$

где $a(t)$ — процесс в R^n, у которого выборочные траектории почти наверное имеют ограниченную вариацию; $A(t)$ — процесс со значениями в пространстве $n \times n$ матриц такой, что для каждого элемента $A_{ij}(t)$ матрицы $A(t)$ выполняется $\mathbf{P}(\omega \mid \int_0^T A_{ij}^2 dt < \infty) = 1$; $w(t)$ — винеровский процесс в R^n; первый интеграл — интеграл Лебега, второй — интеграл Ито.

Напомним, что для процесса Ито вектор-столбец $a(t)$ называется коэффициентом сноса, а $\alpha(t) = A(t)A^*(t) \in \overline{S}_+(n)$ (квадратная симметрическая неотрицательно определенная $n \times n$ матрица), где $A^*(t)$ — матрица сопряженного оператора, коэффициентом диффузии.

Определение 5. *Процесс Ито $\xi(t)$ называется процессом диффузионного типа, если $a(t)$ и $A(t)$ не упреждают относительно $\mathcal{P}_t^\xi$ и винеровский процесс $w(t)$ подчинен $\mathcal{P}_t^\xi$. Если $a(t) = a(t, \xi(t))$ и $A(t) = A(t, \xi(t))$, где $a(t,x)$ и $A(t,x)$ — измеримые по Борелю отображения $[0,T] \times R^n$ в R^n и в пространство матриц $L(R^n, R^n)$ соответственно, то процесс Ито называется диффузионным процессом.*

Процессы диффузионного типа являются решениями так называемых уравнений диффузионного типа, которые задаются следующим образом. Рассмотрим отображения

$$a : [0,T] \times C^0([0,l], R^n) \to R^n,$$

$$A : [0,T] \times C^0([0,T], R^n) \to L(R^n, R^n),$$

где $L(R^n, R^n)$ — пространство $n \times n$ матриц. Будем предполагать, что $a(t, x(\cdot))$ и $A(t, x(\cdot))$ непрерывны по совокупности переменных и для всех $t \in [0,T]$ отображения $a(t,\cdot)$, $A(t,\cdot)$ измеримы относительно σ-алгебры, пророжденной цилиндрическими множествами с основаниями на $[0, t]$.

Определение 6. *Уравнение типа Ито*

$$\xi(t) = \int_0^t a(t, \xi(\cdot))d\tau + \int_0^t A(t, \xi(\cdot))dw(\tau) \qquad (4)$$

называется стохастическим дифференциальным уравнением диффузионного типа.

Нетрудно видеть (см., например, [8]), что для любого мартингала $\eta(t)$ относительно $\mathcal{P}_t^\xi$ выполняется равенство $D^\xi\eta(t) = 0$. Поскольку $\int_0^t A(s)dw(s)$ — мартингал относительно $\mathcal{P}_t^\xi$, справедливо следующее утверждение (см., например, [8]).

Теорема 7. *Для процесса Ито $\xi(t)$ диффузионного типа $D\xi(t)$ существует и равно $E_t^\xi(a(t))$. В частности, если $\xi(t)$ — диффузионный процесс, то $D\xi(t) = a(t,\xi(t))$.*

Теорема 8. *Пусть $\xi(t)$ — процесс диффузионного типа. Тогда $D_2\xi(t) = E_t^\xi[\alpha(t)]$, где $\alpha(t)$ — коэффициент диффузии.*

Доказательство. Поскольку $\xi(t+\Delta t) - \xi(t) = \int_t^{t+\Delta t} a(s)ds + \int_t^{t+\Delta t} A(s)dw(s)$, то, используя свойства интеграла Ито, нетрудно видеть, что $(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^* = \int_t^{t+\Delta t} AA^* ds + o(\Delta t)$. Утверждение теоремы вытекает из того, что $AA^* = \alpha$ (см. выше). ■

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ

Всюду в дальнейшем мы для простоты будем рассматривать уравнения, их решения и другие объекты на конечном отрезке времени $t \in [0,T]$.

Пусть заданы измеримые по Борелю отображения $a(t,x)$ и $\alpha(t,x)$ из $[0,T]\times R^n$ в R_n и в $\bar{S}_+(n)$ соответственно.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t)), \end{cases} \tag{4}$$

которую назовем дифференциальным уравнением первого порядка в производных в среднем справа.

Учитывая замечание 3, теорему 7 и теорему 8, легко видеть, что корректна задача нахождения процесса диффузионного типа, **P**-п.н. удовлетворяющего (4). Понятно, что первое уравнение системы (4) определяет коэффициент сноса, а второе — коэффициент диффузии процесса.

Определение 9. *Будем говорить, что* (5) *имеет слабое решение на* $[0, T]$ *с начальным условием* $\xi(0) = x_0$, *если существует вероятностное пространство* (Ω, F, P) *и заданный на нем процесс диффузионного типа* $\xi(t) = x_0 + \int_0^t a(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau)dw(\tau)$ *со значениями в* R_n *(т. е. существуют* $a(t)$, $A(t)$ *и* $w(t)$, *удовлетворяющие определению 5) такой, что при всех* $t \in [0,T]$ *для* $\xi(t)$ **P**-*п.н.выполняется* (5).

Для дальнейшего нам потребуется следующее техническое утверждение.

Лемма 10. *Пусть $\alpha(t,x)$ — непрерывное по совокупности переменных отображение из $[0,T]\times R^n$ в $S_+(n)$. Тогда существует непрерывное по совокупности переменных отображение $A(t,x)$ из $[0,T]\times R^n$ в пространство$L(R^n, R_n)$ такое, что при любых $t \in R$, $x \in R^n$ выполняется $A(t,x)A^*(t,x) = \alpha(t,x)$.*

Доказательство. Поскольку симметрические матрицы $\alpha(t,x)$ положительно определены, то все их диагональные миноры положительны и, в частности, отличны от нуля. Тогда имеет место разложение Гаусса (см. теорему II.9.3 [9]): $\alpha = \zeta\delta z$, где ζ —нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, z — верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали, δ — диагональная матрица. При этом элементы матриц ζ, δ и z выражаются рационально через элементы α, т.е. указанные матрицы непрерывны по совокупности переменных t, x. Из того, что α — симметрические матрицы, легко увидеть, что $z = \zeta^*$ (z равно транспонированному ζ). Также нетрудно видеть, что в рассматриваемых условиях элементы диагональной матрицы δ положительны. Следовательно корректно определена диагональная матрица $\sqrt{\delta}$, на диагонали которой стоят квадратные корни из соответствующих элементов матрицы δ. Рассмотрим матрицы $A(t,x) = \zeta\sqrt{\delta}$. По построению $A(t,x)$ непрерывно по совокупности переменных t, x и при этом $A(t,x)A^*(t,x) = \zeta(t,x)\delta(t,x)z(t,x) = \alpha(t,x)$. ■

Следствие 11. *Если в условии леммы 10 заменить требование непрерывности $A(t,x)$ требованием измеримости по Борелю, то существует измеримое по Борелю отображение $A(t,x)$ из $[0,T]\times R^n$ в пространство $L(R^n,R^n)$ матриц такое, что при любых $t \in R, x \in R^n$ выполняется $A(t,x)A^*(t,x) = \alpha(t,x)$.*

Для случая, когда $\alpha(t,x)$ действует в $\bar{S}_+(n)$, можно построить непрерывное $A(t,x)$ при более обременительных предположениях.

Лемма 12. *Если $\alpha(t,x)$ — отображение гладкости C^2 из $[0,T]\times R^n$ в $\bar{S}_+(n)$, то существует непрерывное по совокупности переменных отображение $A(t,x)$ из $[0,T]\times R^n$ в пространство*

$L(R^n, R^n)$ матриц такое, что при любых $t \in R, x \in R^n$ выполняется $A(t,x)A^*(t,x) = \alpha(t,x)$.

Лемма 12 выводится из теоремы 1 [16].

Теорема 13. *Пусть в системе* (5) $\alpha(t,x)$ *непрерывно по совокупности переменных, положительно определено (т. е. при всех $t \in [0,T], x \in R^n$ принадлежит $S_+(n)$) и для него выполняется оценка*

$$\| tr\alpha(t,x) \| < K(1 + \| x \|)^2 \qquad (6)$$

для некоторого $K > 0$. Пусть $a(t,x)$ измеримо по Борелю и для него выполняется оценка

$$\| a(t,x) \| < K(1 + \| x \|) \qquad (7)$$

для некоторого $K > 0$. Тогда для любого начального условия $\xi(0) = x_0 \in R^n$ уравнение (5) имеет слабое решение, определенное на всем отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Так как $\alpha(t,x)$ непрерывно и положительно определено, то по лемме 10 существует непрерывное $A(t,x)$ такое, что $A(t,x)A^*(t,x) = \alpha(t,x)$. Непосредственно из определения следа в данном случае мы получаем, что $tr\alpha(t,x)$ равен сумме квадратов всех элементов матрицы $A(t,x)$, т. е. является квадратом евклидовой нормы в пространстве $n \times n$ матриц. Поскольку в конечномерном пространстве $S(n)$ симметрических $n \times n$ матриц все нормы эквивалентны, из условия (6) сразу следует, что $\| A(t,x) \| < K(1 + \| x \|)$ для некотрого $K > 0$. Так как $\alpha(t,x)$ положительно определено, то матрица $A(t,x)$ при всех t, x не вырождена. Поскольку $a(t,x)$ измеримо и удовлетворяет (7), то при описанных выше свойствах $A(t,x)$ по теореме III.3.3 [4] существует слабое решение стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s))ds + \\ + \int_0^t A(s, \xi(s))dw(s),\end{aligned} \qquad (8)$$

определенное на всем отрезке $[0,T]$. Из теорем 7 и 8 очевидным образом следует, что решение $\xi(t)$ последнего уравнения $\mathbf{P}$-п.н. удовлетворяет (5). ■

Теорема 14. *Пусть $\alpha(t,x)$ C^2 — гладко, неотрицательно определено (т. е. при всех $t \in [0,T]$, $x \in R^n$ принадлежит $\overline{S}_+(n)$) и удовлетворяет* (6)*. Пусть $a(t,x)$ непрерывно и удовлетворяет* (7)*. Тогда для любого начального условия $\xi(0) = x_0 \in R^n$ уравнение* (5) *имеет слабое решение, определенное на всем отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. По лемме 12 существует непрерывное $A(t,x)$ такое, что $\alpha(t,x) = A(t,x)A^*(t,x)$. Так же, как в доказательстве теоремы 13, выводится оценка $\|A(t,x)\| < K(1 + \|x\|)$ для некоторого $K > 0$. Тогда, так как $a(t,x)$ и $A(t,x)$ непрерывны и выполнено (7), уравнение (8) удовлетворяет условиям теоремы III.2.4 [4], т. е. для него существует слабое решение, определенное на всем отрезке $[0,T]$. Как и ранее, очевидно, что $\mathbf{P}$-п.н. оно удовлетворяет (5). ■

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ

Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ — многозначные отображения из $[0,T] \times R^n$ в R^n и в $\overline{S}_+(n)$ соответственно. Дифференциальным включением с производными в среднем справа мы будем называть систему вида

$$\begin{cases} D\xi(t) \in \mathbf{a}(t,x), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(t)). \end{cases} \qquad (9)$$

Определение 15. *Будем говорить, что* (9) *имеет слабое решение на $[0,T]$ с начальным условием $\xi(0) = x_0$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и заданный на нем процесс диффузионного типа $\xi(t) = x_0 + \int_0^t a(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau)dw(\tau)$ со значениями в R^n (т. е. существуют $a(t)$, $A(t)$ и $w(t)$, удовлетворяющие определению 5) такой, что $\mathbf{P}$-п.н. $E_t^\xi(a(t)) \in \mathbf{a}(t, \xi(t))$ и $E_t^\xi(A(t)A^*(t)) \in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(t))$ при всех $t \in [0;T]$.*

Из теорем 7 и 8 сразу следует, что для процесса $\xi(t)$ из определения 15 $\mathbf{P}$-п.н. при всех $t \in [0,T]$ выполняется (9).

В простейших случаях вопрос о существовании слабого решения для (9) сводится к теоремам существования слабого решения для (5). Приведем примеры подобных утверждений.

Везде в дальнейшем для множества B в пространстве R^n или в пространстве $L(R^n, R^n)$ мы используем норму, введенную по формуле $\| B \| = \sup_{y \in B} \| y \|$.

Теорема 16. *Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ принимает значения в положительно определенных матрицах $S_+(n)$, имеет замкнутые выпуклые образы, полунепрерывно снизу и для каждого $\alpha \in \boldsymbol{\alpha}(t,x)$ выполняется оценка*

$$\| tr\alpha(t,x) \| < K(1 + \| x \|)^2$$

для некоторого $K > 0$. Пусть $a(t,x)$ является измеримым по Борелю многозначным отобра-

жением и удовлетворяет оценке

$$\| \mathbf{a}(t,x) \| < K(1+\| x \|) \qquad (10)$$

для некоторого $K>0$. Тогда для любого начального условия $\xi(0)=\xi_0$ существует слабое решение (9), *определенное на всем отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. При сделанных предположениях по теореме Майкла многозначное отображение $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ имеет непрерывное однозначное сечение $\alpha(t,x)$. Измеримое по Борелю многозначное отображение $\mathbf{a}(t,x)$ имеет измеримое однозначное сечение $a(t,x)$. Тогда уравнение

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t)) \end{cases}$$

удовлетворяет условиям теоремы 13 и, следовательно, имеет слабое решение, которое очевидным образом является и решением (9). ■

В случае, когда и $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$, и $\mathbf{a}(t,x)$ полунепрерывны снизу, имеют замкнутые выпуклые образы в $\bar{S}_+$, удовлетворяют оценкам из условия теоремы 16 и известно, что непрерывное сечение $\alpha(t,x)$ отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ (которое существует по теореме Майкла) представимо в виде $\alpha(t,x)=A(t,x)A^*(t,x)$ с непрерывным $A(t,x)$, нетрудно доказать существование слабого решения для (9) путем сведения к теореме 14.

Для случая, когда $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ и $\mathbf{a}(t,x)$ не имеют непрерывных сечений, докажем следующее утверждение о существовании слабого решения.

Теорема 17. *Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ — ограниченное измеримое по Борелю многозначное отображение из $[0,T]\times R^n$ в R^n с замкнутыми образами.*

Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ — ограниченное измеримое по Борелю многозначное отображение с замкнутыми образами из $[0,T]\times R^n$ в $S_+(n)$ и существует $\varepsilon_0>0$ такое, что для всех t, x ε_0-окрестность множества $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ в $S(n)$ не пересекает множество $S_0(n)$ симметрических вырожденных $n\times n$ матриц.

Тогда для любого начального условия $\xi(0)=\xi_0\in R^n$ включение (9) *имеет слабое решение.*

Доказательство. Так как $\mathbf{a}(t,x)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ являются измеримыми по Борелю многозначными отображениями, то они имеют измеримые по Борелю сечения $a(t,x)$ и $\alpha(t,x)$, которые по построению ограничены. По следствию 11 существует измеримое $A(t,x)$ такое, что $\alpha(t,x)=A(t,x)A^*(t,x)$. При этом по построению $A(t,x)$ ограничено и равномерно отделено от $S_0(n)$. Тогда стохастическое дифференциальное уравнение

$$\xi(t)=\xi_0+\int_0^t a(s,\xi(s))ds+\int_0^t A(s,\xi(s))dw(s)$$

удовлетворяет условиям теоремы II.6.1 [12] и имеет слабое решение, которое очевидным образом является слабым решением (9). ■

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом настоящей статьи является теорема существования решения в случае, когда $\mathbf{a}(t,x)$ и $\boldsymbol{\alpha}_i(t,x)$ полунепрерывны сверху и удовлетворяют условию типа линейного роста. Напомним некоторые технические факты и определения.

Определение 18. *При заданном $\varepsilon>0$ непрерывное однозначное отображение $f_\varepsilon: X\to Y$ называется ε-аппроксимацией многозначного отображения $F: X\to Y$, если график отображения f, как множество в $X\times Y$, лежит в ε-окрестности графика отображения F.*

Известно (см., например, [2]), что ε-аппроксимациями для любого $\varepsilon>0$ обладают:

— полунепрерывные сверху отображения с выпуклыми замкнутыми образами;

— полунепрерывные сверху отображения с замкнутыми образами асферичными во всех размерностях от 1 до $n-1$ и слабо асферичными в размерности n (см. [3]). Этот класс многозначных отображений был впервые рассмотрен А. Д. Мышкисом в 1954 г. [13], в [3] и [5] для него были построены топологические характеристики типа числа Лефшеца и топологического индекса. Позже (в 80-х гг. XX в.) этот класс был переоткрыт и назван «отображениями, чьи образы в каждой точке имеют uv^k-свойство при $k=1,\dots n$» (см. точное определение, например, в [18]).

Лемма 19. *Для решения стохастического дифференциального уравнения диффузионного типа*

$$\xi(t)=\xi_0+\int_0^t a(s,\xi(\cdot))ds+\int_0^t A(s,\xi(\cdot))dw(s)$$

в R^n при $t\in[0,T]$, коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\| a(t,\xi(\cdot)) \| + \| A(t,\xi(\cdot)) \| < K(1+\| x(\cdot) \|),$$

для каждого натурального $p>1$ существует константа C_p, зависящая только от K и T, такая что выполняется неравенство $E(\sup\limits_{t\le T} \| \xi(t) \|^n) < C_p$.

Доказательство этого утверждения имеется в [4] (лемма III.2.1 и замечание после нее).

Теорема 20. *Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ является полунепрерывным сверху многозначным отображе-*

нием из $[0,T]\times R^n$ в R^n с замкнутыми выпуклыми образами и удовлетворяет оценке

$$\| a(t,x) \|^2 < K(1+\| x \|^2). \qquad (11)$$

Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ является полунепрерывным сверху многозначным отображением с замкнутыми выпуклыми образами из $[0,T]\times R^n$ в $\overline{S}_+(n)$ и для каждого $\alpha(t,x)\in\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ выполняется оценка

$$\| tr\alpha(t,x) \| < K(1+\| x \|^2) \qquad (12)$$

для некоторого $K>0$.

Тогда включение (9) *имеет слабое решение.*

Доказательство. В качестве нормы в пространстве $S(n)$ выберем сужение евклидовой нормы (т. е., корень квадратный из суммы квадратов всех элементов матрицы) в пространстве R^{n^2}, изоморфного $L(R^n,R^n)$. Так как все нормы в конечномерном пространстве $S(n)$ эквивалентны, для указанной нормы выполняется (12), возможно с другой константой, для которой мы для простоты сохраним обозначение K.

Рассмотрим банахово пространство $\Omega = C^0([0,T],R^n)$ с обычной нормой $\|x(\cdot)\|_{C^0} = \sup\limits_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$. Через $\mathcal{F}$ обозначим σ-алгебру на нем, порожденную цилиндрическими множествами. Через $\mathcal{P}_t$ обозначим σ-подалгебру σ-алгебры $\mathcal{F}$, порожденную цилиндрическими множествами с основаниями на $[0,t]$.

Рассмотрим также измеримое пространство $([0,T],\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра; символом λ обозначим меру Лебега на $[0,T]$.

Так как $\mathbf{a}(t,x)$ является полунепрерывным сверху многозначным отображением с замкнутыми выпуклыми образами, то для любого $\varepsilon>0$ существует его ε-аппроксимация (см. [2]).

Выберем последовательность $\varepsilon_i\to 0$ таких, что $\varepsilon_i>0$ для всех $i\in[0,\infty)$. Обозначим через $a_i(t,x)$ непрерывные ε_i-аппроксимации отображения $\mathbf{a}(t,x)$ в R^n, которые существуют по условию теоремы. При этом $a_i(t,x)$ удовлетворяют условию (11), где константа несколько больше константы K из условия теоремы, так как $\alpha_k(t,x)$ есть ε_i-аппроксимация. Поскольку очевидным образом $1+\| x \|^2\le(1+\| x \|)^2$, то для $a_i(t,x)$ также выполняется оценка (10).

Для $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ воспользуемся конструкцией ε_i-аппроксимаций из теоремы 1.4.11 [2]. Из этой конструкции видно, что в $\overline{S}_+(n)$ существуют гладкие ε_i-аппроксимации отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$, в частности C^2-гладкие. Обозначим через $\alpha_i(t,x)$ указанные C^2-гладкие ε_i-аппроксимации отображения $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ в $\overline{S}_+(n)$. Отметим, что в этом случае по лемме 12 существует непрерывные $A_i(t,x)$ такие, что $\alpha_i(t,x)=A_i(t,x)A_i^*(t,x)$. При этом $\alpha_i(t,x)$ удовлетворяют условию

$$tr\alpha_i(t,x)\le K(1+\| x \|^2)\le K(1+\| x \|)^2, \quad (13)$$

где константа $K>0$ несколько больше константы K из условия теоремы, так как $\alpha_i(t,x)$ есть ε_i-аппроксимация.

По теореме 14 для любого $\varepsilon_i>0$ задача

$$\begin{cases} D\xi(t)=a_i(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t)=\alpha_i(t,\xi(t)) \end{cases} \qquad (14)$$

имеет слабое решение для любого $\xi(0)=\xi_0\in R^n$, $t\in[0,T]$. Обозначим его $\xi_i(t)$. Этому процессу соответствует мера μ_i на $(\Omega,\mathcal{F})$. На вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mu_i)$ процесс $\xi_i(t)$ является координатным, т. е. $\xi_i(t,x(\cdot))=x(t), x(\cdot)\in\Omega$.

Как и в доказательстве теоремы 13, имеем равенство $tr\alpha_i(t,x)=\| A_i(t,x) \|^2$. Тогда из оценки (13) получаем

$$tr\alpha_i(t,x)=\| A_i(t,x) \|^2\le K(1+\| x \|^2). \quad (15)$$

Поскольку $K(1+\| x \|^2)\le K(1+\| x \|)^2$ и для $a(t,x)$ выполняется (7), то процессы $\xi_i(t)$ удовлетворяют условию леммы 19 при всех i и для процессов ξ_i выполнено

$$E(\sup_{t\le T}\| \xi_i(t) \|^2)\le C_2. \qquad (16)$$

По следствию III.2 [4] множество мер $\{\mu_i\}$ слабо компактно, т. е. из него можно выделить слабо сходящуюся к некоторой мере μ подпоследовательность. Обозначим через $\xi(t)$ координатный процесс на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. По теореме Прохорова для любого $\varepsilon>0$ существует компакт $\boldsymbol{K}_\varepsilon\subset\Omega$ такой, что $\mu_i(\boldsymbol{K}_\varepsilon)>1-\varepsilon$ для любой μ_i.

Воспользуемся следующим фактом (см. [17, 22]): так как $\Omega=C^0([0,T],R^n)$ является сепарабельным метрическим пространством и меры μ_i слабо сходятся к μ, то существуют некоторое вероятностное пространство $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathbf{P}})$ и случайные элементы $\overline{\xi}_i:\overline{\Omega}\to\Omega$ и $\overline{\xi}:\overline{\Omega}\to\Omega$ такие, что порожденные ими меры на $(\Omega,\mathcal{F})$ совпадают с μ_i и μ соответственно, и при этом $\overline{\xi}_i$ сходятся к $\overline{\xi}\overline{\mathbf{P}}$ почти наверное. Обозначим элементарные события из $\overline{\Omega}$ через $\overline{\omega}$.

Поскольку $\| a_i(t,\overline{\xi}_i(t)) \|^2\le K(1+\| \overline{\xi}_i(t) \|^2)$ по (11), то, используя (16), нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\overline{\Omega}\times[0,T]}\| a_i(t,\overline{\xi}_i(t)) \|^2\, d\mathbf{P}\times d\lambda\le K_1 \qquad (17)$$

и, значит, $a_i(t,\overline{\xi}_i(t))$ равномерно ограничены по норме в гильбертовом пространстве $L_2([0,T]\times$

$\times\bar{\Omega}, R^n)$. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L_2([0,T]\times\bar{\Omega}, R^n)$ к некоторому $\bar{a}:[0,T]\times\bar{\Omega}\to \to R^n$. При этом существует борелевское отображение $a:[0,T]\times\Omega\to R^n$ такое, что $\bar{a}(t,\bar{\varpi}) = = \mathbf{a}(t,\bar{\xi}(\bar{\varpi}))$. По общим свойствам слабой сходимости в пространствах L_p (см. [11]) все это означает, что для любого множества $B\in\mathcal{F}\times\mathcal{B}$ имеет место сходимость $\lim_{i\to\infty}\int_B a_i(t,\bar{\xi}_i)d\mathbf{P}\times d\lambda =$

$\lim_{i\to\infty}\int_B a_i(t,\bar{\xi}_i)d\mathbf{P}\times d\lambda = \int_B a(t,\bar{\xi})d\mathbf{P}\times d\lambda.$

Обозначим $a(t,x(\cdot))$ условное математическое ожидание $E(\mathbf{a}(t,x(\cdot))\mid\mathcal{P}_t)$ на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. Таким образом, $a(t,x(\cdot))$ измеримо относительно $\mathcal{P}_t$, и для каждого множества $Q\in\mathcal{P}_t$ выполняется равенство

$$\int_Q a(t,x(\cdot))d\mu = \int_{\bar{\xi}(\bar{\varpi})\in Q}\bar{a}(t,\bar{\varpi})d\bar{\mathbf{P}}.$$

Из слабой сходимости $a_i(t,\bar{\xi}_i)$ к $\mathbf{a}(t,\bar{\xi})$ в $L_2([0,T]\times\bar{\Omega}, R^n)$ легко вывести, что для любой непрерывной ограниченной вещественной функции f на Ω, при любом $t\in[0,T]$ и любом $\Delta t>0$ имеет место сходимость $\lim_{i\to\infty}\int_{\bar{\Omega}} f(\bar{\xi})\left[\int_t^{t+\Delta t}(a_i(s,\bar{\xi}_i)-\mathbf{a}(s,\bar{\xi}))ds\right]d\bar{\mathbf{P}}=0$ и, значит, для любой непрерывной ограниченной вещественной функции f_t на Ω, измеримой относительно $\mathcal{P}_t$,

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\bar{\Omega}} f_t(\bar{\xi})\left[\int_t^{t+\Delta t}(a_i(s,\bar{\xi}_i)-a(s,\bar{\xi}))ds\right]d\bar{\mathbf{P}}=0. \quad (18)$$

Выберем $\delta>0$. По теореме Егорова существует множество $\mathbf{K}_\delta\subset\bar{\Omega}$ такое, что $\bar{\mathbf{P}}\mathbf{K}_\delta>1-\delta$ и на этом множестве $\bar{\xi}_i$ сходятся к $\bar{\xi}$ равномерно. Пусть g_t — равномерно непрерывная ограниченная вещественная функция на Ω, измеримая относительно $\mathcal{P}_t$. Тогда на $\mathbf{K}_\delta$ функции $g_t(\bar{\xi}_i)$ сходятся к $g_t(\bar{\xi})$ равномерно. Отсюда легко видеть, что

$$\lim_{i\to\infty}\int_{K_\delta}\left[(g_t(\bar{\xi})-g_t(\bar{\xi}_i))\left(\int_t^{t+\Delta t}a_i(t,\bar{\xi}_i)ds\right)\right]d\bar{\mathbf{P}}=0. \quad (19)$$

Случайные элементы $[g_t(\bar{\xi})-g_t(\bar{\xi}_i)]a_i(t,\bar{\xi}_i)$ равномерно интегрируемы. Это следует из ограниченности $g_t(\bar{\xi})-g_t(\bar{\xi}_i)$ и из того факта, что по лемме 19 $\sup_i\int_{\bar{\Omega}}\|\bar{\xi}_i\|^2_{C^0}\,dP<C$ и что

$$\int_{\|\bar{\xi}_i\|>c}\|\bar{\xi}_i\|_{C^0}\,d\mu_i<\frac{1}{c}\int_{\|\bar{\xi}_i\|>c}\|\bar{\xi}_i\|^2_{C^0}\,d\bar{\mathbf{P}}$$

(см. [1]). Значит $\left\|\int_{\bar{\Omega}\setminus\mathbf{K}_\delta}[(g_t(\bar{\xi})-g_t(\bar{\xi}_i))(\int_t^{t+\Delta t}a_i(s,\bar{\xi}_i)ds)]d\bar{\mathbf{P}}\right\|$ при $\delta\to 0$ становится меньше любого положительного числа. Вместе с (19) это означает, что

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\bar{\Omega}}\left[(g_t(\bar{\xi})-g_t(\bar{\xi}_i))\left(\int_t^{t+\Delta t}a_i(s,\bar{\xi}_i)ds\right)\right]dP=0. \quad (20)$$

В (18) в качестве f_t можно выбрать g_t, как в (20). Тогда, используя (18) и (20), получим

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty}\left(\int_{\bar{\Omega}}g_t(\bar{\xi})\left(\int_t^{t+\Delta t}a(s,\bar{\xi})ds\right)d\bar{\mathbf{P}}-\right.\\
&\left.-\int_{\bar{\Omega}}g_t(\bar{\xi}_i)\left(\int_t^{t+\Delta t}a_i(s,\bar{\xi}_i)ds\right)d\bar{\mathbf{P}}\right)=\\
&=\lim_{i\to\infty}\left(\int_{\bar{\Omega}}g_t(\bar{\xi})\left(\int_t^{t+\Delta t}a(s,\bar{\xi})ds\right)d\bar{\mathbf{P}}-\right.\\
&-\int_{\bar{\Omega}}g_t(\bar{\xi})\left(\int_t^{t+\Delta t}a_i(s,\bar{\xi}_i)ds\right)d\bar{\mathbf{P}}+\\
&+\int_{\bar{\Omega}}g_t(\bar{\xi})\left(\int_t^{t+\Delta t}a_i(s,\bar{\xi}_i)ds\right)d\bar{\mathbf{P}}-\\
&\left.-\int_{\bar{\Omega}}g(\bar{\xi}_i)\left(\int_t^{t+\Delta t}a_i(s,\bar{\xi}_i)ds\right)d\bar{\mathbf{P}}\right)=\\
&=\lim_{i\to\infty}\left(\int_{\bar{\Omega}}g_t(\bar{\xi})\left[\int_t^{t+\Delta t}(a(s,\bar{\xi})-a_i(s,\bar{\xi}_i))ds\right]d\bar{\mathbf{P}}+\right.\\
&\left.+\int_{\bar{\Omega}}[g_t(\bar{\xi})-g_t(\bar{\xi}_i)]\left(\int_t^{t+\Delta t}a_i(s,\bar{\xi}_i)ds\right)d\bar{\mathbf{P}}\right)=0.
\end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что случайные элементы $g_t(\bar{\xi}_i)\bar{\xi}_i$ равномерно интегрируемы. Действительно, g_t ограничено, т. е. при всех i выполняется $|g_t(\bar{\xi}_i)|<\Xi$ для некоторого $\Xi>0$, по лемме 19 $\sup_i\|\bar{\xi}_i\|^2_{C^0}<C_2$ и при этом

$$\int_{|g_t(\bar{\xi}_i)|\|\bar{\xi}_i\|_{C^0}>c}|g_t(\bar{\xi}_i)|\|\bar{\xi}_i\|_{C^0}\,d\mathbf{P}<$$

$$<\frac{1}{c}\int_{|g_t(\bar{\xi}_i)|\|\bar{\xi}_i\|_{C^0}>c}|g_t(\bar{\xi}_i)|\|\bar{\xi}_i\|^2_{C^0}\,d\mathbf{P}<\frac{\Xi C_2}{c}.$$

Поскольку $|g_t(\bar{\xi}_i)|\bar{\xi}_i$ сходятся к $|g_t(\bar{\xi})|\bar{\xi}$ $\mathbf{P}$-п.н., отсюда следует, что

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\bar{\Omega}}g_t(\bar{\xi}_i)\bar{\xi}_i d\bar{\mathbf{P}}=\int_{\bar{\Omega}}g_t(\bar{\xi})\bar{\xi}d\bar{\mathbf{P}}. \quad (22)$$

Из (21) и (22) следует, что на $(\Omega,\mathcal{F})$ для любой равномерно непрерывной ограниченной вещественной функции $g_t:\Omega\to R$, которая измерима относительно $\mathcal{P}_t$, выполняется соотношение

$$\lim_{i\to\infty}\int_\Omega \Big[(x(t+\Delta t)-x(t)) - \int_t^{t+\Delta t} a_i(s,x(s))ds\Big] g_t(x(\cdot))d\mu_i = $$
$$= \int_\Omega \Big[(x(t+\Delta t)-x(t)) - \int_t^{t+\Delta t} a(s,x(\cdot))ds\Big] g_t(x(\cdot))d\mu.$$

Поскольку по построению для каждого i процесс $\xi_i(t)-\int_0^t a_i(s,\xi_i(s))ds$ является мартингалом относительно $\mathcal{P}_t$, то

$$\int_\Omega \Big[(x(t+\Delta t)-x(t)) - \int_t^{t+\Delta t} a_i(s,x(s))ds\Big] g_t(x(\cdot))d\mu_i = 0$$

для всех i. Следовательно,

$$\int_\Omega \Big[(x(t+\Delta t)-x(t)) - \int_t^{t+\Delta t} a(s,x(s))ds\Big] g_t(x(\cdot))d\mu = 0.$$

т. е. процесс $\xi(t)-\int_0^t a(t,\xi(t))dt$ является мартингалом относительно $\mathcal{P}_t$.

Перейдем к рассмотрению α_i и Ai. Поскольку $\|A_i(t,x(t))\|^2 \le K(1+\|x(t)\|^2)$, то на вероятностном пространстве $(\bar\Omega,\bar{\mathcal{F}},\bar{\mathbf{P}})$ получаем

$$\int_{[0,T]\times\bar\Omega} \| A_i(t,\bar\xi_i)\|^2 \, d\bar{\mathbf{P}}\times d\lambda. \le K_2, \qquad (23)$$

и, значит, $A_i(t,\bar\xi_i)$ равномерно ограничены по норме в гильбертовом пространстве $L_2([0,T]\times\bar\Omega, L(R^n,R^n))$, т. е. образуют слабо компактное множество.

Отметим, что из формулы $\alpha_i(t,x) = A_i(t,x)A_i^*(t,x)$ следует, что элементы матрицы $\alpha_i(t,x)$ являются суммами произведений элементов матрицы $A_i(t,x)$. Тогда из того, что $tr\alpha_i(t,x)$ равен сумме квадратов всех элементов матрицы $A_i(t,x)$, из (12) и леммы 19 нетрудно вывести, что при всех i выполняется

$$\int_{[0,T]\times\bar\Omega} \left\|\alpha_i(t,\bar\xi_i)\right\|^2 dP\times d\lambda, \le K_3, \qquad (24)$$

т. е. $\alpha_i(t,\bar\xi_i)$ равномерно ограничены по норме в пространстве $L_2([0,T]\times\bar\Omega, S(n))$ и, значит, образуют слабо компактное множество.

Таким образом, можно выбрать последовательность индексов i таких, что $A_i(t,\bar\xi_i)$ слабо в $L_2([0,T]\times\bar\Omega, L(R^n,R^n))$ сходятся к некоторому $\bar A:[0,T]\times\bar\Omega\to L(R^n,R^n)$ и одновременно $\alpha_i(t,\bar\xi_i)$ слабо в $L_2([0,T]\times\bar\Omega,S(n))$ сходятся к некоторому $\bar\alpha:[0,T]\times\bar\Omega\to S(n)$. И при этом $\alpha(t,\bar\varpi)=A(t,\bar\varpi)A^*(t,\bar\varpi)$.

Также существуют измеримые отображения $\mathbf{A}:[0,T]\times\Omega\to L(R^n,R^n)$ такие, что $\bar A(t,\bar\varpi) = \mathbf{A}(t,\bar\xi(\bar\varpi))$, и $\aleph:[0,T]\times\Omega\to S(n)$ такое, что $\bar\alpha(t,\bar\varpi)=\aleph(t,\bar\xi(\bar\varpi))$. Рассмотрим условные математические ожидания на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$: $A(t,x(\cdot)) = E(\mathbf{A}(t,x(\cdot))\mid \mathcal{P}_t)$ и $\alpha(t,x(\cdot)) = E(\aleph(t,x(\cdot))\mid\mathcal{P}_t)$, которые по построению при каждом $t\in[0,T]$ измеримы относительно $\mathcal{P}_t^\xi$.

С помощью элементарной модификации приведенных выше рассуждений для $a_i(t,x(t))$ устанавливается, что для любой ограниченной равномерно непрерывной функции $g_t:\Omega\to R$, измеримой относительно $\mathcal{P}_t$, выполняется

$$\lim_{i\to\infty}\int_\Omega \Big[(x(t+\Delta t)-x(t))(x(t+\Delta t)-x(t))^* - \int_t^{t+\Delta t} A_i(s,x(s))A_i^*(s,x(s))ds\Big] g_t(x(\cdot)d\mu_i =$$
$$= \int_\Omega \Big[(x(t+\Delta t)-x(t))(x(t+\Delta t)-x(t))^* - \int_t^{t+\Delta t} A(s,x(\cdot))A^*(s,x(\cdot))ds\Big] g_t(x(\cdot)d\mu.$$

При этом для любого i

$$\int_\Omega \Big[(x(t+\Delta t)-x(t))(x(t+\Delta t)-x(t))^* - \int_t^{t+\Delta t} A_i(s,x(s))A_i^*(s,x(s))ds\Big] g_t(x(\cdot)d\mu_i = 0$$

и, следовательно,

$$\int_\Omega \Big[(x(t+\Delta t)-x(t))(x(t+\Delta t)-x(t))^* - \int_t^{t+\Delta t} A(s,x(\cdot))A^*(s,x(\cdot))ds\Big] g_t(x(\cdot)d\mu = 0.$$

Отсюда, с учетом того, что для координатного процесса $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ процесс $\xi(t)-\int_t^{t+\Delta t} a(s,\xi(\cdot))ds$ является мартингалом относительно $\mathcal{P}_t$ (см. выше), методами [4] выводится, что $\xi(t)$ удовлетворяет равенству

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s,\xi(\cdot))ds + \int_0^t A(s,\xi(\cdot))dw(s),$$

где $w(t)$ — некоторый винеровский процесс на $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. По построению $\xi(t)$ при каждом t σ-алгебра $\mathcal{P}_t$ является «прошлым» для $\xi(t)$. Значит $\xi(t)$ является процессом диффузионного типа. Тогда по теореме 7 $D\xi = E_t^{\xi}(a(t, \xi(\cdot)))$ и по теореме 8 $D_2\xi(t) = E_t^{\xi}(A(t, \xi(\cdot))A^*(t, \xi(\cdot))) = E_t^{\xi}(\alpha(t, \xi(\cdot)))$.

Осталось показать, что μ-п.н. $E_t^{\xi}(a(t, \xi(\cdot))) \in \mathbf{a}(t, \xi(t))$ и что $E_t^{\xi}(\alpha(t, \xi(\cdot)) \in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(t))$. По лемме Мазура (см., например, [10]) при слабой сходимости в $L_2([0,T] \times \bar{\Omega}, R^n)$ последовательности $a_i(t, \bar{\xi}_i(t))$ к $\bar{a} : [0,T] \times \bar{\Omega} \to R^n$ существует последовательность конечных выпуклых комбинаций ее членов, которая сходится в этом пространстве сильно. Выпуклые комбинации имеют вид

$$\tilde{a}_k(t, \bar{\xi}_i) = \sum_{i=j(k)}^{n(k)} \beta_i a_i(t, \bar{\xi}_i),$$

где $\beta_i \geq 0, i = j(k), \dots, n(k)$ и $\sum_{i=j(k)}^{n(k)} \beta_i = 1$. Так как a имеет выпуклые образы, то $\tilde{a}_i$ являются ε-аппроксимациями с $\varepsilon \to 0$. Так как сходимость — сильная в $L_2([0,T] \times \bar{\Omega}, R^n)$, предел $a(t, \bar{\xi})$ $\mathbf{P}$-п.н. принадлежит a.

Для α доказательство аналогично. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — М.: Физматлит, 1977. — 351 с.

2. *Борисович Ю.Г.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М.: КомКнига, 2005. — 216 с.

3. *Борисович Ю.Г.* О числе Лефшеца для одного класса многозначных отображений / Ю. Г. Борисович, Ю. Е. Гликлих // Седьмая летняя математическая школа. — Киев, 1970. — С. 283—294

4. *Гихман И.И.* Теория случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — Т. III — М.: Физматлит, 1975. — 496 с.

5. *Гликлих Ю.Е.* Неподвижные точки многозначных отображений с невыпуклыми образами и вращение многозначных векторных полей / Ю. Е. Гликлих // Сборник трудов аспирантов математического факультета. — Воронеж: ВГУ, 1972. — С. 30—38.

6. *Гликлих Ю.Е.* Стохастические уравнения в производных в среднем и их приложения. I / Ю. Е. Гликлих // Известия РАЕН. Серия МММИУ. — 1997. — Т. 1, № 4. — С. 26—52.

7. *Гликлих Ю.Е.* Стохастические уравнения в производных в среднем и их приложения. II / Ю. Е. Гликлих // Известия РАЕН. Серия МММИУ. — 2000. — Т. 4, № 4. — С. 17—36.

8. *Гликлих Ю.Е.* Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / Ю. Е. Гликлих. — М.: Комкнига, 2005. — 416 с.

9. *Желобенко Д.П.* Компактные группы Ли и их представления / Д. П. Желобенко. — М.: Физматлит, 1970. — 554 с.

10. *Иосода К.* Функциональный анализ / К. Иосода. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

11. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Физматлит, 1977. — 744 с.

12. *Крылов М.В.* Уравляемые процессы диффузионного типа / М. В. Крылов. — М.: Физматлит, 1977. — 400 с.

13. *Мышкис А.Д.* Обобщение теоремы о стационарной точке динамической системы внутри замкнутой траектории / А. Д. Мышкис // Мат. сборник. — 1954. — Т. 34, № 3. — С. 525—540.

14. *Партасарати К.* Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К. Партасарати. — М.: Мир, 1988. — 343 с.

15. *Треногин В.А.* Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.: Физматлит, 1980. — 495 с.

16. *Фрейдлин М.И.* О факторизации неотрицательно определенных матриц / М. И. Фрейдлин // Теория вероятностей и ее применения. — 1968. — Т. 13, № 2. — С. 375—378.

17. *Ширяев А.Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. — М.: Физматлит, 1989. — 640 с.

18. *Kryszewski W.* Homotopy properties of set-valued mappings / W. Kryszewski. — Torun: Torun University, 1997. — 243 p.

19. *Nelson E.* Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics / E. Nelson // Phys. Reviews, 1966. — Vol. 150, №. 4. — P. 1079—1085.

20. *Nelson E.* Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson. — Princeton: Princeton University Press, 1967. — 142 p.

21. *Nelson E.* Quantum fluctuations / E. Nelson. — Princeton: Princeton University Press, 1985. — 147 p.

22. *Pollard D.* Convergence of stochastic processes / D. Pollard. — Berlin ect.: Springer-Verlag, 1984. — 215 p.