

РЕКОНСТРУКЦИЯ БИФУРКАЦИОННОЙ ДИАГРАММЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО СТАЦИОНАРНЫМ И НЕСТАЦИОНАРНЫМ ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

Е. В. Богатиков, Л. А. Битюцкая, Е. Н. Бормонтов, М. Ю. Хухрянский

Воронежский государственный университет

Рассмотрена задача восстановления бифуркационной диаграммы нелинейной динамической системы по набору стационарных временных рядов, а также по нестационарному временному ряду в условиях отсутствия априорной информации об изучаемой системе. На примере модельной системы Лоренца показана нелинейная зависимость параметров реконструированной модели от режима функционирования динамической системы. Предложена кусочно-линейная аппроксимация пространства параметров реконструированной модели для восстановления бифуркационной диаграммы динамической системы. Применение процедуры реконструкции к экспериментальным данным позволило выявить фэйгенбаумовский сценарий хаотизации фазовопереходных процессов при плавлении теллура.

ВВЕДЕНИЕ

Активное изучение сложных нелинейных процессов в физике, химии, биологии, экономике и других науках поставило новые задачи в области параметризации экспериментальных данных. Сложные колебательные процессы, которые могут демонстрировать разнообразные режимы поведения от периодических до хаотических, стали предметом пристального изучения. Оказалось, что для описания многих внешне случайных процессов достаточно использовать всего несколько нелинейных дифференциальных уравнений. В различных областях науки появились свои модельные системы уравнений, позволяющие описывать широкие классы явлений: система уравнений Лоренца — в гидродинамике, система Ресслера — в химии, логистическое уравнение — в биологии и т. д.

Нелинейные эффекты играют ключевую роль в процессах самоорганизации, когда помещенная в неравновесные условия динамическая система (ДС) начинает демонстрировать коллективные эффекты [1–3]. Нелинейное взаимодействие между компонентами динамической системы (это могут быть популяции хищников и жертв, конгломераты зерен в поликристаллических материалах, фоновые колебания кристаллической решетки и т. д.) приводит к появлению сложной динамики в поведении разнообразных систем как на макро-, так и на микроуровне.

В последние десятилетия были выявлены важные закономерности в поведении нелинейных систем, например, общие сценарии перехода к хаосу, типы бифуркаций (изменений в поведении динамической системы при вариации ее управляющих параметров) и т. д. Одним из важнейших методов изучения нелинейных ДС стал бифуркационный анализ, который позволяет классифицировать динамические системы, предсказывать их поведение при изменении параметров, управлять ими.

Невозможность в ряде экспериментов получить временные ряды достаточной длины или обеспечить необходимый набор значений управляющих параметров для выполнения процедур нелинейной динамики привела к широкому развитию в 90-х гг. задачи восстановления уравнений ДС по временным рядам. В качестве восстановленных уравнений динамической системы было предложено использовать базисные функции общего вида, содержащие набор подгоночных параметров. При помощи подгоночных параметров не только минимизируются различия в поведении восстановленной системы и экспериментального временного ряда, их варьирование позволяет построить бифуркационную диаграмму (БД) восстановленной ДС, которая при выполнении определенных условий должна соответствовать бифуркационной диаграмме исходной ДС. Изучение этих условий соответствия является предметом данной работы.

Проблеме восстановления БД по временным рядам посвящены работы [4–10], однако в них не рассматривается задача восстановления БД

по нестационарным данным, а также делаются предположения о линейной [4—6] или гладкой нелинейной [7] зависимости между бифуркационными параметрами исходной и восстановленной систем. Все это ограничивает применимость метода, предложенного в работах [4—10], к параметризации широкого класса реальных экспериментальных данных. Поэтому цель настоящей работы — восстановление бифуркационных диаграмм как по стационарным, так и по нестационарным данным без допущений о линейном или гладком характере зависимости между параметрами исходной и восстановленной систем.

1. АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ БИФУРКАЦИОННОЙ ДИАГРАММЫ

Будем считать заданными временные ряды $x_1^1(t), \dots, x_1^m(t)$, представляющие собой отсчеты одной из переменных нелинейной ДС, взятые в дискретные моменты времени с шагом Δt и соответствующие m разным значениям бифуркационного параметра. Число и вид уравнений, описывающих ДС, будем считать неизвестными.

Алгоритм восстановления БД содержит несколько процедур: восстановление псевдофазового пространства, выбор способа аппроксимации уравнений ДС и поиск подгоночных параметров, параметризацию пространства подгоночных параметров и построение бифуркационной диаграммы для реконструированных уравнений. Степень соответствия бифуркационных диаграмм исходной и восстановленной систем зависит, прежде всего, от качества реконструкции уравнений ДС, а также от точности параметризации пространства подгоночных параметров восстановленных уравнений.

1.1. РЕКОНСТРУКЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Первой процедурой реконструкции является восстановление псевдофазового пространства. Существует несколько методов, среди которых наиболее распространенными являются метод задержек и метод последовательного дифференцирования [11, 12]. Для определения размерности пространства вложения может быть использована стандартная процедура, основанная на вычислении фрактальной размерности аттрактора при различных значениях размерности псевдофазового пространства. За минимальное число переменных, необходимых для

описания ДС, принимается размерность пространства, при которой наступает насыщение роста фрактальной размерности аттрактора.

В настоящей работе для реконструкции псевдофазового пространства $X = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ размерности n по временному ряду $x_1(t)$, содержащему N точек, использовался метод задержек:

$$x_{i+1}(t) = x_i(t + \tau), \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad (1)$$

где τ — время задержки.

Следующим шагом реконструкции является выбор типа аппроксимации уравнений ДС в виде авторегрессионной модели, n -мерного дискретного отображения или в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1 порядка [13].

Далее в работе используются дифференциальные уравнения в численной аппроксимации Эйлера:

$$\begin{aligned} x_{1,i} &= x_{1,i-1} + \Delta t \cdot F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \\ x_{n,i} &= x_{n,i-1} + \Delta t \cdot F_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &i = 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

Выбор вида функций F_i может оказывать существенное влияние на качество реконструкции, а также на количество подгоночных параметров, необходимых для описания изучаемой системы. Базисными функциями, хорошо зарекомендовавшими себя в работах по реконструкции уравнений ДС, но не использовавшимися ранее в работах по восстановлению бифуркационных диаграмм (исключение составляет [6], где, однако, использовалась авторегрессионная модель для реконструкции одномерного отображения), являются полиномиальные функции вида

$$\begin{aligned} F_i(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=0}^{\nu} C_{i,\{j\}} x_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \dots \cdot x_n^{j_n}, \\ \sum_{k=1}^n j_k &\leq \nu, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Для определения коэффициентов полиномов $C_{i,\{j\}}$ будем использовать метод наименьших квадратов.

1.2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ БИФУРКАЦИОННОЙ ДИАГРАММЫ

Полученные в результате процедуры реконструкции уравнений ДС коэффициенты $C_{i,\{j\}}$ можно представить в виде матрицы

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1^1 & \dots & C_r^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ C_1^m & \dots & C_r^m \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где строки образованы всеми подгоночными коэффициентами для конкретного временного ряда, а столбцы отражают зависимость величины подгоночного коэффициента от значения бифуркационного параметра реконструируемого временного ряда.

В работах [4–7] использован следующий подход к параметризации пространства подгоночных параметров. Каждая строка $\mathbf{c}^i = (C_1^i, \dots, C_r^i)$ рассматривается как точка в пространстве параметров модели. Это пространство образовано значениями параметров, которые могут быть получены для всевозможных реализаций ДС при варьировании управляющих параметров. В его пределах динамика модели должна совпадать с динамикой исходной системы. Таким образом, основной задачей при восстановлении бифуркационной диаграммы является аппроксимация отображения, переводящего пространство параметров реальной системы в пространство параметров модели.

В работах [4–6] эта задача решается в предположении линейной связи между параметрами реальной и восстановленной систем с применением метода анализа основных компонент (principal component analysis — PCA). В этом подходе пространство параметров представляется в виде линейной оболочки, натянутой на собственные векторы ковариационной матрицы параметров модели. На первом шаге алгоритма вычисляется ковариационная матрица

$$\mathbf{Cov} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta \mathbf{c}^i (\delta \mathbf{c}^i)^T, \quad (5)$$

где $\delta \mathbf{c}^i$ — отклонение вектора параметров от усредненного вектора, т. е.

$$\delta \mathbf{c}^i = \mathbf{c}^i - \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{c}^i. \quad (6)$$

После этого решается задача на поиск собственных значений и собственных векторов ковариационной матрицы. Количество максимальных собственных значений P соответствует количеству варьируемых бифуркационных параметров в исходной ДС. Пространство параметров модели раскладывается по собственным векторам \mathbf{e}_i ковариационной матрицы, соответ-

ствующим максимальным собственным значениям:

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{m} + \sum_{i=1}^P \mu_i \mathbf{e}_i, \quad (7)$$

где μ_i — коэффициенты разложения, которые являются бифуркационными параметрами модельной системы.

Параметризацию пространства параметров модели (4) можно реализовать по-другому, представив каждый столбец матрицы \mathbf{C} как числовой ряд, определяющий функциональную зависимость $\mathbf{h}(\mathbf{p})$ между параметрами $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_p)$ исходной динамической системы и параметрами $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_r)$ ее модели. Рассмотренное выше линейное приближение предполагает, что в качестве функциональной зависимости \mathbf{h} используется линейная аппроксимация. Как показано в работе [7], подобное упрощение приводит к появлению артефактных деталей при реконструкции бифуркационных диаграмм многих ДС. Для преодоления недостатка линейной модели в этой работе предлагается использовать специальную итерационную процедуру для построения нелинейных гладких кривых, аппроксимирующих функциональные зависимости $\mathbf{h}(\mathbf{p})$.

Однако, как будет показано ниже, предположение о гладкости функциональной зависимости $\mathbf{h}(\mathbf{p})$ также является упрощением, которое может влиять на качество реконструкции бифуркационной диаграммы.

2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ БИФУРКАЦИОННОЙ ДИАГРАММЫ МОДЕЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. МОДЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

Первой динамической системой, в которой было обнаружено хаотическое поведение, является система Лоренца. На настоящий момент это одна из наиболее исследованных систем нелинейных ОДУ, демонстрирующая большинство динамических режимов, характерных для трехмерных ДС. Система Лоренца уже изучалась в работах по реконструкции БД [5, 7]. Было показано, что даже в узкой области параметров, содержащей только одну бифуркацию Хопфа, необходимо использовать нелинейную аппроксимацию $\mathbf{h}(\mathbf{p})$ для адекватного восстановления бифуркационной диаграммы. Система Лоренца является, таким образом, хорошей

моделью реальных экспериментальных данных, с одной стороны, включая в себя разнообразные типы бифуркаций, с другой стороны, демонстрируя сложный вид зависимости $\mathbf{h}(\mathbf{p})$.

Система уравнений Лоренца имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z. \end{aligned} \quad (8)$$

Классическими значениями параметров σ и β являются 10 и $8/3$ соответственно. В качестве бифуркационного параметра будем считать параметр r .

В диапазоне $0 \leq r \leq 1$ система Лоренца имеет одну особую точку $x = y = z = 0$, которая является устойчивой, глобально притягивающей. Значение $r = 1$ соответствует бифуркации, при которой точка начала координат теряет устойчивость и появляются две новые устойчивые точки с координатами $(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. При $r \approx 24.74$ происходит бифуркация Хопфа, эти точки теряют устойчивость и в системе наблюдаются хаотические решения. При увеличении бифуркационного параметра изменяется топология неустойчивых циклов, формирующих странный аттрактор Лоренца, а также наблюдаются несколько перестроек аттрактора, в которых изменяется их количество [14, 15].

В отличие от работ [5, 7], в которых восстанавливается БД для диапазона параметров $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $r = 0 \div 30$, в настоящей работе

использован диапазон параметра $r = 110 \div 195$, включающий в себя разнообразные хаотические и периодические решения, седло-узловые бифуркации и каскад бифуркаций удвоения периода. Бифуркационная диаграмма максимумов временного ряда x -переменной системы Лоренца для используемых далее значений параметров приведена на рис. 1 а. Диаграмма получена путем численного интегрирования системы уравнений (8) методом Эйлера с шагом $\Delta t = 10^{-5}$ (при выполнении процедуры реконструкции временные ряды предварительно прореживались для получения шага $\Delta t = 10^{-3}$).

В области значений $r = 110 \div 142$ в системе Лоренца наблюдается изменение геометрии неустойчивых циклов. В точке $r = 142.026$ происходит бифуркация, в результате которой исчезают неустойчивые циклы, проходящие через седловую точку. Вплоть до значения $r = 154.4$ аттрактор образован одной из двух несимметричных ветвей (рис. 1 б, фазовые портреты 2 и 3), выбор между которыми определен начальными условиями. В точке $r = 154.4$ происходит бифуркация, при которой становится стабильным симметричный устойчивый цикл. В области значений $r = 145 \div 148.2$ в системе Лоренца наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода: от периодических колебаний при $r = 148.2$ система переходит к хаотическим колебаниям при $r \sim 145$. В точке $r = 166$ происходит седло-узловая бифуркация, в результате которой вновь появляются неустойчивые циклы, проходящие через седловую точку (рис. 1 б, фазовый портрет 4). Также бифуркационная диаграмма содержит несколько мелких окон периодичности.

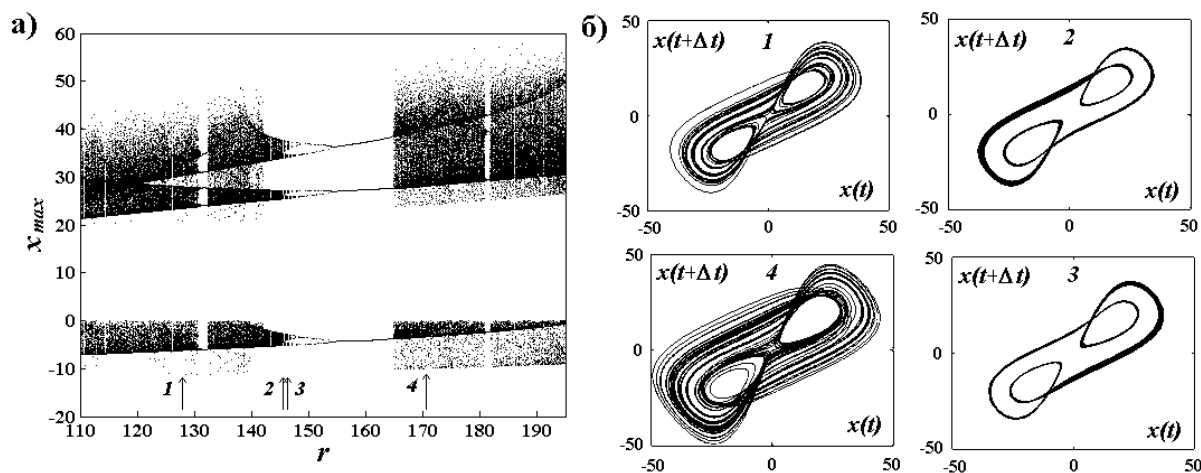


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма максимумов x -компоненты системы Лоренца (а) и характерные псевдофазовые портреты (б)

Целью численного эксперимента является восстановление названных особенностей бифуркационной диаграммы системы Лоренца.

2.2. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ РЕКОНСТРУКЦИИ

Важную роль при реконструкции уравнений ДС играет оптимальный выбор времени задержки τ , количества уравнений n и степени полиномов ν . Выбранные значения параметров должны обеспечивать адекватную реконструкцию уравнений на всем диапазоне изменения бифуркационного параметра.

На рис. 2 приведены бифуркационные диаграммы восстановленных систем для двух предельных случаев: системы с минимальным количеством подгоночных параметров, обеспечивающим устойчивые (по Пуассону) решения, и системы с оптимальным количеством параметров, обеспечивающим точное воспроизведение исходной системы. Бифуркационные диаграммы получены путем реконструкции стационарных временных рядов x -компоненты системы Лоренца без аппроксимации пространства подгоночных коэффициентов.

Система уравнений, восстановленная при $n = 3$, $\nu = 3$, правильно воспроизводит общую топологию аттрактора Лоренца, переход системы от хаотических колебаний к периодическим в области значений $r = 148.2 \div 166$, а также существование двух несимметричных типов орбит при $r < 154.4$. Исчезновение орбит, проходящих через седловую точку при $142.026 < r < 166$, происходит только для ограниченного числа восстановленных решений. Также не воспроизводится серия бифуркаций удвоения периода при $r < 148.2$.

Параметры реконструкции $n = 4$, $\nu = 5$ обеспечивают полное воспроизведение всех особенностей исходной бифуркационной диаграммы, за исключением периодических решений, которые трудно восстановить из-за недостаточного для метода наименьших квадратов количества значимых точек. Большое количество подгоночных коэффициентов при $n = 4$, $\nu = 5$ (504 вместо 60 при $n = 3$, $\nu = 3$) приводит также к неустойчивости (по Пуассону) некоторых восстановленных уравнений, что отражается в пробелах на восстановленной бифуркационной диаграмме.

Таким образом, полиномиальные аппроксимирующие функции могут быть использованы для восстановления бифуркационной диаграммы системы Лоренца. Однако, поскольку при восстановлении уравнений по экспериментальным данным достаточно трудно оценить адекватность проведенной реконструкции (так как визуальное сходство аттракторов не гарантирует воспроизведения всех особенностей динамики изучаемой системы), на практике полезным является восстановление бифуркационной диаграммы при разных значениях параметров реконструкции.

2.3. АППРОКСИМАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПО СТАЦИОНАРНЫМ ДАННЫМ

Для выполнения процедуры восстановления БД по ограниченному набору временных рядов, полученных при различных значениях бифуркационного параметра, необходимо провести процедуру аппроксимации подгоноч-

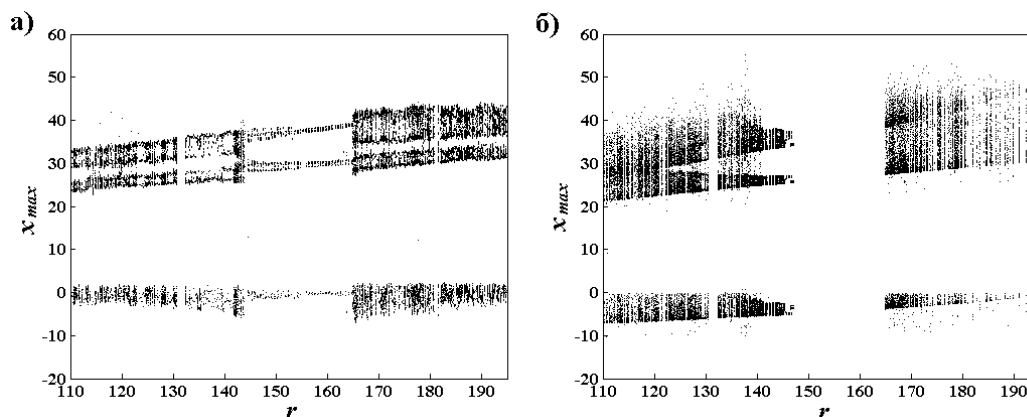


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы, построенные по восстановленным уравнениям системы Лоренца без аппроксимации пространства подгоночных параметров: а) $n = 3, \nu = 3, \tau = 41$ б) $n = 4, \nu = 5, \tau = 49$

ных коэффициентов восстановленных уравнений.

Представим пространство подгоночных коэффициентов в виде зависимостей $C^i(r)$, типичные примеры которых приведены на рис. 3. Для всех зависимостей, независимо от значения параметров n и ν , можно выделить следующие закономерности.

1) Для коэффициентов характерно флуктуирующее поведение с наличием нелинейного тренда, причем амплитуда флуктуаций зависит от режима поведения модельной системы.

2) Нелинейный тренд коэффициентов можно аппроксимировать кусочно-линейными участками с одинаковым положением границ для всех коэффициентов, причем положение границ соответствует точкам бифуркаций.

3) Точкам, соответствующим появлению окон периодичности, отвечает скачкообразное изменение величины отдельных коэффициентов.

4) В области значений $r = 142.026 \div 154.4$, в пределах которой аттрактор Лоренца может содержать одну из двух несимметричных орбит (рис. 1 б), переход от одной орбиты к другой при изменении начальных условий ведет к изменению знака коэффициентов (рис. 3 а).

Перечисленные особенности поведения коэффициентов выявляют недостатки изложенных в работах [4–7] методик реконструкции БД. Аппроксимация зависимостей $\mathbf{h}(\mathbf{p})$ гладкими функциями, которые интерполируют набор коэффициентов, полученных по нескольким временным рядам, позволяет эффективно параметризовать только области монотонного изменения тренда коэффициентов. Флукту-

ации коэффициентов, скачкообразное изменение в области периодических решений, а также зависимость знака коэффициентов от симметрии аттрактора могут сильно исказить результаты интерполяции.

Нелинейная зависимость большинства коэффициентов от бифуркационного параметра, по-видимому, связана с тем, что величина коэффициентов коррелирует с теми или иными геометрическими свойствами аттрактора, а не с величиной бифуркационного параметра. Это предположение подтверждается результатами контролируемого изменения зависимости $C^i(r)$ для отдельных коэффициентов, которое приводит к изменению соответствующих особенностей бифуркационной диаграммы.

Флуктуации величины коэффициентов также обусловлены влиянием особенностей фазового портрета ДС: зависимость коэффициентов от конкретной реализации ДС, полученная при постоянном значении бифуркационного параметра и при изменяющихся начальных условиях, демонстрирует флуктуационное поведение без наличия тренда.

Для восстановления бифуркационных диаграмм с учетом особенностей поведения коэффициентов был использован линейный метод РСА, примененный к отдельным кусочно-линейным областям зависимостей $C^i(r)$ (рис. 4, 5). Зависимости $C^i(r)$ были разбиты на три основных участка в соответствии с положением точек бифуркаций: $r = 110 \div 140$, $r = 141 \div 165$, $r = 166 \div 195$. Для системы $n = 3$, $\nu = 3$ в первой области был также выделен участок $r = 131 \div 132$, соответствующий окну периодичности. В области значений параметра $r = 141 \div 154$ коэффициенты,

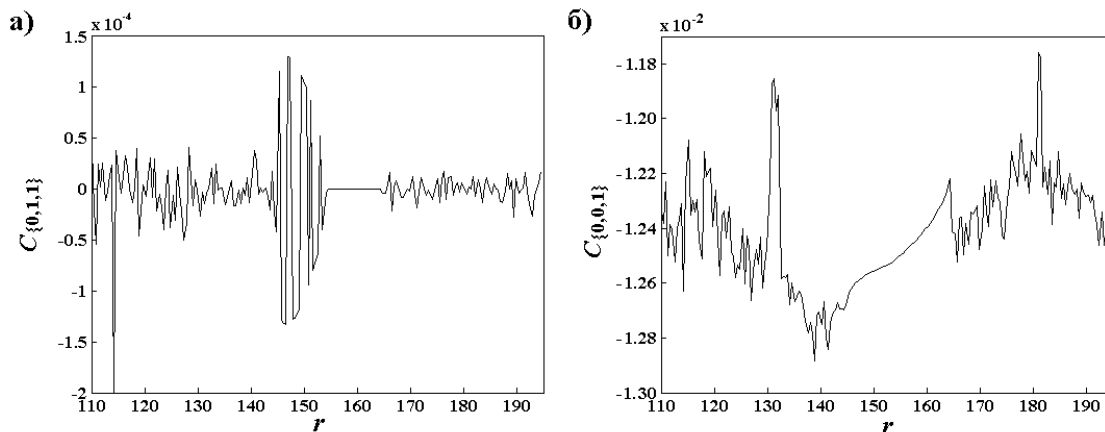


Рис. 3. Типичные зависимости подгоночных параметров восстановленных уравнений от бифуркационного параметра системы Лоренца

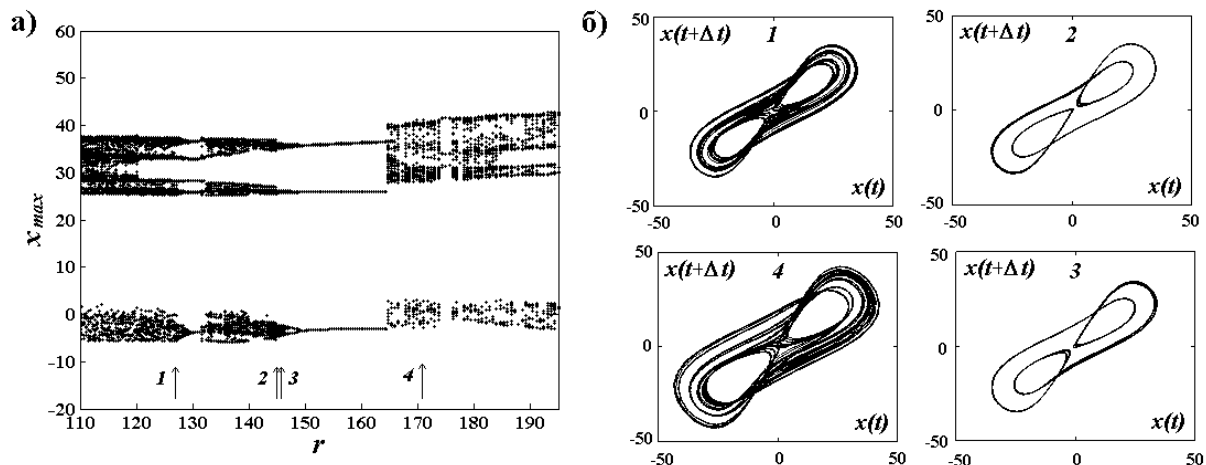


Рис. 4. Восстановленная бифуркационная диаграмма системы Лоренца для системы уравнений, реконструированных по стационарным данным, с параметрами реконструкции $n = 3$, $\nu = 3$ (а) и характерные псевдофазовые портреты (б)

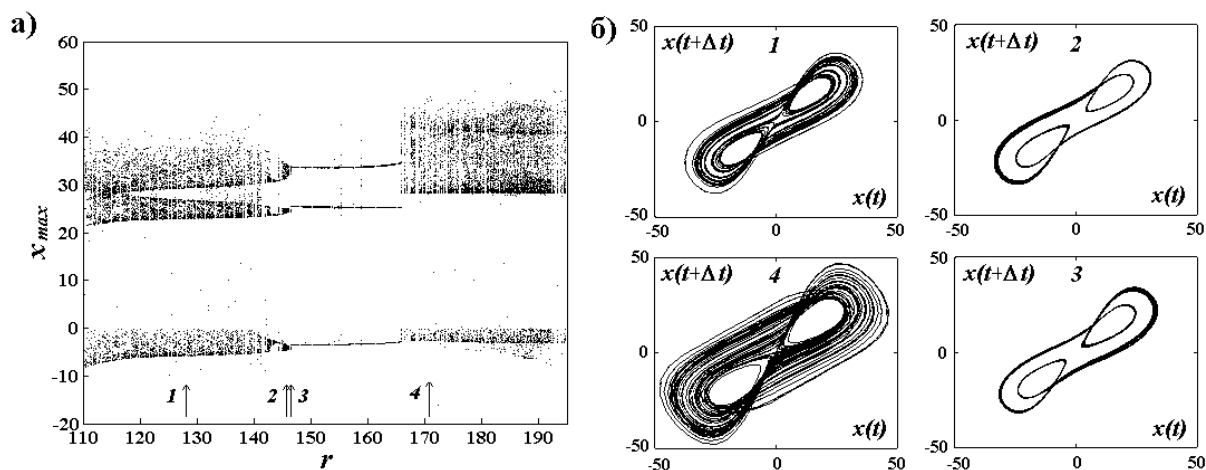


Рис. 5. Восстановленная бифуркационная диаграмма системы Лоренца для системы уравнений, реконструированных по стационарным данным, с параметрами реконструкции $n = 4$, $\nu = 5$ (а) и характерные псевдофазовые портреты (б)

изменяющие знак из-за несимметричных орбит, считались положительными при $r = 141 \div 145$ и отрицательными при $r > 145$. Поскольку в пределах выделенных участков зависимости $C^i(r)$ испытывают дополнительные изломы, линейная аппроксимация производилась по диапазонам $r = 115 \div 140$, $r = 141 \div 155$, $r = 165 \div 180$. Вне этих диапазонов значения коэффициентов получались экстраполяцией для изучения влияния неточности аппроксимации пространства коэффициентов на результаты реконструкции БД.

Бифуркационная диаграмма, восстановленная при помощи аппроксимации пространства подгоночных параметров в случае $n = 3$, $\nu = 3$, значительно лучше воспроизводит особеннос-

ти БД исходной системы по сравнению с БД, полученной непосредственно по реконструированным временным рядам (рис. 2 а). Это, по-видимому, объясняется тем, что при аппроксимации пространства подгоночных параметров происходит усреднение подгоночных коэффициентов и выбор, тем самым, наиболее оптимальных значений коэффициентов. В результате, БД на рис. 4 правильно воспроизводит окно периодичности при $r \sim 131$, седло-узловые бифуркации, серию бифуркаций удвоения периода и переход от несимметричных орбит к симметричной при $r = 154.4$. В то же время неточно воспроизводятся геометрические параметры аттракторов: наклон ветвей БД (т. е. скорость увеличения размеров аттрактора при

изменении r), размытость верхней границы БД и т. д.

Последний недостаток устраняется при восстановлении БД с $n = 4$, $\nu = 5$ (рис. 5). Аппроксимация коэффициентов позволила в этом случае восстановить не только хаотические, но и периодические решения в области $r > 148.2$. Как и в случае $n = 3$, $\nu = 3$, восстановленная БД содержит все основные бифуркации исходной системы Лоренца. Поскольку в случае $n = 4$, $\nu = 5$ не производилась аппроксимация коэффициентов в области окна периодичности при $r \sim 131$, восстановленная диаграмма, как и ожидалось, не содержит его. Неточности в аппроксимации пространства коэффициентов, как видно, также привели к искажению геометрических параметров аттракторов.

Таким образом, показано, что при аппроксимации пространства подгоночных параметров в системе Лоренца удается правильно воспроизвести качественное поведение БД, в том числе различные типы бифуркаций. Однако погрешности в аппроксимации пространства подгоночных параметров (вызванные существенными флуктуациями подгоночных параметров и линейной аппроксимацией нелинейных зависимостей) приводят к некоторому искажению количественных характеристик БД.

2.4. АППРОКСИМАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПО НЕСТАЦИОНАРНОМУ ВРЕМЕННОМУ РЯДУ

Экспериментальные данные довольно часто являются нестационарными. Это может быть обусловлено принципиальной невозможностью изменять величину управляющих параметров (например, в случае биологических, медицинских сигналов, астрономических наблюдений), недостаточной информацией о системе и действующих в ней параметрах, сильной чувствительностью нелинейных систем к условиям проведения эксперимента и т. д. Поэтому важным требованием к процедуре реконструкции является способность восстанавливать БД по единственному нестационарному ряду.

Для восстановления БД необходимо иметь множество наборов подгоночных параметров реконструированной модели, которые соответствуют различным значениям бифуркационного параметра исходной ДС. При анализе единственного временного ряда $x_1(t)$ естественным выходом является применение про-

цедуры реконструкции к набору сигналов, образованных из участков исходного ряда: $x_1^1(t_i | 0 < i < N)$, $x_1^2(t_i | s < i < N + s)$, ... где s — сдвиг окна реконструкции, N — количество отсчетов, необходимое для успешной реконструкции.

Восстановление уравнений ДС по нестационарным данным имеет ряд особенностей. Сигналы, образованные из исходного нестационарного ряда, во-первых, также являются нестационарными, во-вторых, содержат переходные процессы, вклад которых зависит от инерционных свойств системы и скорости изменения бифуркационного параметра. Эти факторы влияют как на устойчивость (по Пуассону) восстановленных уравнений, так и на вид зависимостей $C^i(r)$ пространства подгоночных параметров.

Роль переходных процессов в задачах реконструкции уравнений рассматривалась в работе [16]. В этой работе было показано, что добавление к исходным данным переходных процессов позволяет выявить «лишние» подгоночные параметры по нерегулярной зависимости величины подгоночных параметров от длительности переходных процессов. В нашем случае при усилении нестационарности временного ряда (т. е. при уменьшении длины временного ряда при постоянном значении диапазона r) зависимости $C^i(r)$ для некоторых подгоночных коэффициентов сильно изменяют свое поведение: резко возрастает амплитуда флуктуаций и появляются резкие скачкообразные изменения величины коэффициентов (рис. 6). Увеличение амплитуды флуктуаций коэффициентов подтверждает их зависимость не от значений параметров исходных данных, а от геометрических свойств аппроксимируемого аттрактора. При исключении таких коэффициентов из числа подгоночных параметров возрастает амплитуда флуктуаций у других коэффициентов, которые ранее сильных флуктуаций не демонстрировали. Подобное поведение подгоночных коэффициентов сильно усложняет параметризацию пространства подгоночных параметров.

Для улучшения устойчивости по Пуассону уравнений, восстановленных по нестационарным данным, в работе [17] предлагается использовать сшивку участков ряда, отвечающих одинаковым значениям бифуркационного параметра. Однако такой подход предполагает

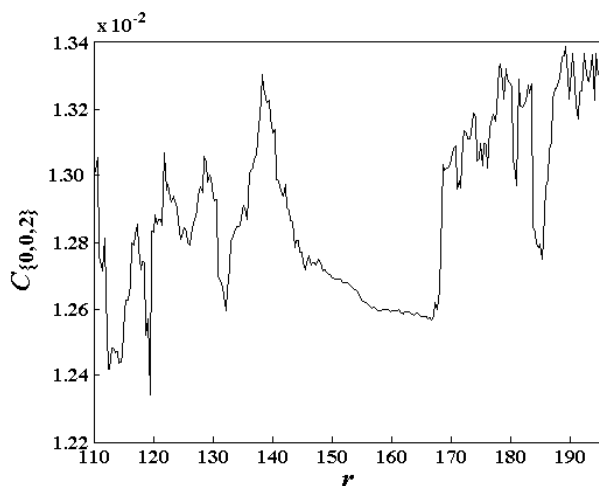


Рис. 6. Типичная зависимость подгоночного параметра восстановленных по нестационарным данным уравнений от бифуркационного параметра системы Лоренца

осциллирующее изменение бифуркационного параметра. Другой способ получения устойчивых решений — использование моделей с меньшим количеством подгоночных параметров.

Поскольку при восстановлении БД по стационарным данным система с $n = 3$, $\nu = 3$ обеспечила воспроизведение всех основных бифуркаций исходной системы, именно эта система уравнений была использована для реконструкции БД по нестационарному ряду (рис. 7). Внешний вид диаграммы в этом случае практически полностью совпадает с диаграммой, восстановленной по стационарным данным (рис. 4), за исключением одной особенности в

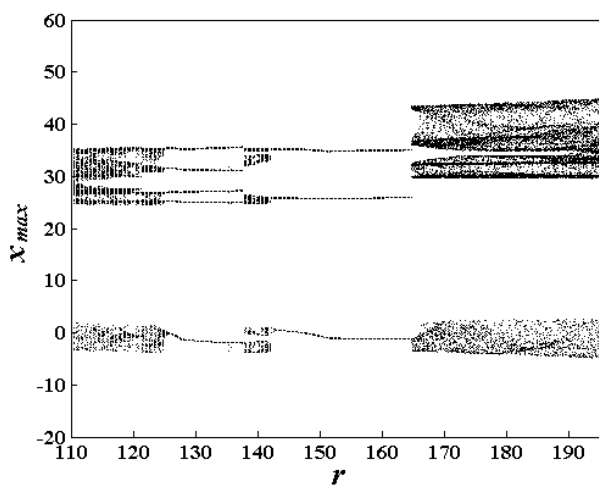


Рис. 7. Восстановленная бифуркационная диаграмма системы Лоренца для системы уравнений, реконструированных по нестационарным данным, с параметрами реконструкции $n = 3$, $\nu = 3$

области значений бифуркационного параметра $r = 142 \div 154.4$. Поскольку нестационарный ряд содержал решения, соответствующие только одной из двух возможных несимметричных орбит, на реконструированной диаграмме также присутствует только та орбита, которая была представлена в исходных данных.

Таким образом, установлена применимость кусочно-линейной аппроксимации пространства подгоночных параметров восстановленных ОДУ с полиномиальной правой частью для восстановления БД не только по стационарным, но и по нестационарным данным. Процедура реконструкции позволяет надежно воспроизводить присутствующие в системе бифуркации и может быть применена к реальным экспериментальным данным.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ БИФУРКАЦИОННОЙ ДИАГРАММЫ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Изложенная процедура восстановления бифуркационной диаграммы была применена для параметризации временных рядов фазово-переходных процессов при плавлении теллура. Ранее методом дифференциального термического анализа (ДТА) в анизотропных веществах — сурьме и теллуре — при приближении к точке плавления были обнаружены макроскопические флуктуации теплоты диссипации (ФТД), имеющие колебательный характер [18]. Одним из возможных механизмов наблюдаемых диссипативных процессов является возникновение на этапе предплавления коррелированных состояний в фононной подсистеме, которые вызывают структурные неустойчивости, приводящие к перестройке кристаллической структуры [2].

Типичный экспериментальный временной ряд ФТД в теллуре приведен на рис. 8 а. Термограмма ДТА представляет собой временную зависимость выделенной/поглощенной теплоты предплавления ΔQ до точки плавления T_m . ΔQ определяется по разности температуры ΔT одновременно нагреваемого образца (теллура) и эталона (Al_2O_3). ФТД на этапе предплавления в теллуре имеют ярко выраженный колебательный характер, температурный интервал эффекта предплавления достигает $\sim 0.25T_m$, амплитуда экзотермического эффекта фазово-переходного процесса $\sim 0.3T_m$. Длина временных рядов ограничена продолжительностью протекания

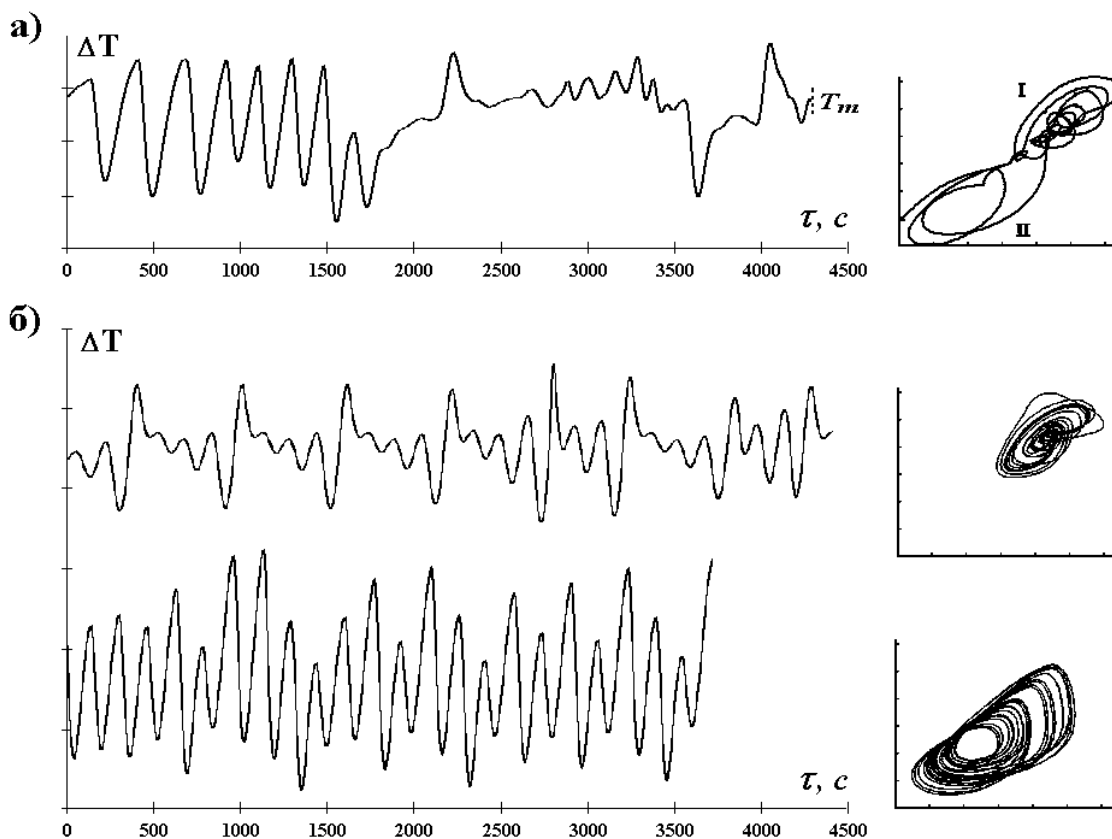


Рис. 8. Временной ряд эффекта предплавления в теллуре до точки плавления T_m , полученный методом ДТА, его фазовый портрет для $\tau > 1500$ А (а) и временные ряды, а также фазовые портреты, полученные по восстановленным уравнениям при $n = 3$, $\nu = 5$ (б)

эффекта предплавления и определяется природой материала, а также кинетическими режимами эксперимента [19].

Характерной особенностью фазовых портретов большинства временных рядов ФТД теллура является существование двух областей, которые попеременно посещает изображающая точка (области I и II на рис. 8 а), причем переход ДС из области I в область II повторяется неоднократно. Восстановленные уравнения ДС являются бистабильными и содержат два аттрактора, воспроизводящих области I и II фазовых портретов экспериментальных данных (рис. 8 б). Поскольку экспериментальные данные содержат неоднократные переходы между областями I и II, то полученные результаты реконструкции свидетельствуют о нестационарности экспериментальных данных, возможно, вызванной изменением скорости нагрева образца в пределах погрешности эксперимента $\sim 1\%$.

Фрагмент бифуркационной диаграммы, восстановленной по участкам экспериментального ряда, отвечающим области фазового про-

странства I, приведен на рис. 9. Переход к хаосу в восстановленной диаграмме происходит через серию бифуркаций удвоения периода. Скорость сходимости бифуркационных значений стремится к числу близкому к константе Фейгенбаума для квадратичных отображений. Полученный результат был проверен для систем

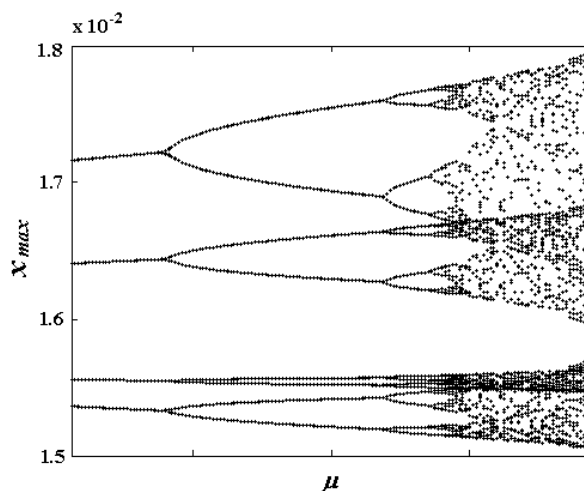


Рис. 9. Фрагмент бифуркационной диаграммы эффекта предплавления в теллуре

уравнений, восстановленных с различными параметрами n и ν [20].

Таким образом, можно утверждать, что динамика фазовопереходного процесса при плавлении теллура обладает фейгенбаумовским сценарием перехода к хаосу. Каскад бифуркаций удвоения периода является одним из наиболее распространенных сценариев хаотизации в синхронизирующихся системах, что подтверждает синхронизацию между различными модами фононных колебаний как механизм фазовопереходного процесса в теллуре. Ключевую роль для аномально сильного проявления данных эффектов в теллуре должна играть анизотропия его кристаллической структуры, которая образована спиральными тригональными цепочками, причем связь внутри цепочек значительно сильнее связи между цепочками. Возможность межмодовой синхронизации фононных колебаний в теллуре экспериментально подтверждается и в работе [3], где приведены данные по образованию режима динамического хаоса акустоэлектрических колебаний тока в теллуре через каскад удвоения и утроения периода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показана возможность восстановления бифуркационных диаграмм по стационарным и нестационарным экспериментальным данным для широкого диапазона изменения бифуркационного параметра с использованием полиномиальных базисных функций.

На примере модельной системы Лоренца показано, что на величину подгоночных коэффициентов восстановленных уравнений влияют геометрические особенности аттракторов, чем обусловлена их нелинейная, флуктуирующая зависимость от величины бифуркационного параметра исходных данных. Как следствие, области нелинейного поведения отвечают, как правило, точкам бифуркации ДС, в которых происходит изменение геометрии аттрактора.

Существование резких скачкообразных изменений, зависимости знака некоторых коэффициентов от симметрии аттрактора существенно осложняет аппроксимацию пространства подгоночных параметров разработанными ранее методиками. Кусочно-линейная аппроксимация, предложенная в настоящей работе, позволяет достаточно эффективно восстанавливать бифуркационную диаграмму при условии

линейного изменения одного бифуркационного параметра в исходной ДС. Для модельной системы Лоренца были правильно восстановлены все присутствующие в изучаемом диапазоне $r = 110 \div 195$ бифуркации.

Надежность методики при работе с достаточно сложной модельной системой позволила применить ее к экспериментальным данным — фазовопереходным процессам в теллуре. Обнаруженный каскад бифуркаций удвоения периода продемонстрировал эффективность процедуры восстановления БД и в приложении к экспериментальным данным. Однако для детального воспроизведения БД по экспериментальным временным рядам требуют решения задачи определения количества варьируемых бифуркационных параметров (в тех случаях, когда в эксперименте изменяются сразу несколько параметров), а также определения вида экспериментальной зависимости бифуркационного параметра (в случае его неконтролируемого изменения).

Таким образом, в настоящей работе показано, что процедура восстановления БД по экспериментальным данным представляет собой эффективное средство получения информации о режимах функционирования нелинейной динамической системы в условиях ограниченного количества экспериментальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Markworth A.J.* Characterization and control of chaotic stress oscillation in a model for the Portevin-Le Chatelier effect / A. J. Markworth, A. Gupta, R. W. Rollins // *Scripta Materialia*. — 1998. — Vol. 39. — P. 481.
2. *Кацнельсон М.И.* Коллективные явления в динамике решетки и механизмы развития структурных неустойчивостей / М. И. Кацнельсон, А. В. Трефилов // *ФММ*. — 1987. — Т. 64, вып. 4. — С. 629.
3. *Камилов И.К.* Хаотические акустоэлектрические колебания тока в пьезополупроводниках / И. К. Камилов, В. З. Жохов // *ФТТ*. — 2001. — Т. 43, вып. 6. — С. 992.
4. *Tokuda I.* Recognizing chaotic time-waveforms in terms of a parametrized family of nonlinear predictors / L. Tokuda, S. Kjiwara, R. Tokunaga, T. Matsu-moto // *Physica D*. — 1996. — Vol. 95. — P. 380.
5. *Bagarinao E.* Time series-based bifurcation diagram reconstruction / E. Bagarinao, K. Pakdaman, T. Nomura, S. Sato // *Physica D*. — 1999. — Vol. 130. — P. 211.
6. *Bagarinao E.* Reconstructing bifurcation diagrams from noisy time series using nonlinear

autoregressive models / E. Bagarinao, K. Pakdaman, T. Nomura, S. Sato // Phys. Rev. E. — 1999. Vol. 60, № 1. — P. 1073.

7. Bagarinao E. Generalized one-parameter bifurcation diagram reconstruction using time series / E. Bagarinao, T. Nomura, K. Pakdaman, S. Sato // Physica D. — 1998. — Vol. 124. — P. 258.

8. Langer G. Modeling parameter dependence from time series / G. Langer, U. Parlitz // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 70. — P. 217.

9. Aguirre L. Induced one-parameter bifurcations in identified nonlinear dynamical models / L. Aguirre, J. Maquet, C. Letellier // Int. J. Bifurcation and Chaos. — 2002. — Vol. 12, № 1. — P. 135.

10. Le Sceller L. Global vector field reconstruction including a control parameter dependence / L. Le Sceller, C. Letellier, G. Gouesbet // Phys. Lett. A. — 1996. — Vol. 211. — P. 211.

11. Малинецкий Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. — М. : Эдиториал УРСС, 2000. — 336 с.

12. Lai Y.-C. Recent developments in chaotic time series analysis / Y.-C. Lai, N. Ye // Int. J. Bifurcation and Chaos. — 2003. — Vol. 13, № 6. — P. 1383.

13. Анищенко В.С. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем / В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, В. В. Астахов. — Саратов : Изд-во СГУ, 1999.

14. Sparrow C. The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attractors / C. Sparrow. — New York: Springer-Verlag, 1982.

15. Letellier C. Large-scale structural reorganization of strange attractors / C. Letellier, T. D. Tsankov, G. Byrne, R. Gilmore // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 72, № 2. — P. 212.

16. Bezruchko B.P. Role of transient processes for reconstruction of model equations from time series / B. P. Bezruchko, T. V. Dikanev, D. A. Smirnov // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 64, № 3. — P. 6210.

17. Янсон Н.Б. Глобальная реконструкция по нестационарным данным / Н. Б. Янсон, А. Н. Павлов, Т. Капитаниак, В. С. Анищенко // Письма в ЖТФ. — 1999. — Т. 25, вып. 10. — С. 74.

18. Битюцкая Л.А. Влияние анизотропии кристаллической структуры на переходные процессы при плавлении сурьмы / Л. А. Битюцкая, Е. С. Машкина // Письма в ЖТФ. — 1995. — Т. 21, вып. 20. — С. 30.

19. Bityutskaya L.A. System of thermodynamic parameters of the transient processes under melting of crystalline substances / L. A. Bityutskaya, E. S. Mashkina // Phase Transition. — 2000. — Vol. 71. — P. 317.

20. Bogatkov E.V. Determinated chaos in phase-transition processes of melting of anisotropic substances / E. V. Bogatkov, L. A. Bityutskaya // Proceedings of Int. Conf. Physics and Control, August 24–26, Saint Petersburg. — 2005. — P. 813.