УДК 539.3

О ПОСТАНОВКЕ ПРОБЛЕМЫ ДВОЙСТВЕННОГО РАВНОВЕСИЯ МАТЕРИАЛЬНОГО И ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВ

П. Штайнманн[1], Н. А. Кончакова[2]

[1]Технический университет г. Каизерслаутерн (Германия),
[2]Воронежский государственный университет

В работе рассматриваются уравнения состояния сплошной среды для случая двойственного равновесия, которое реализуется в теории материальных сил. В статье обсуждается возможность распространения метода материальных сил на модель хрупкого разрушения упругопластического континуума в рамках синтетической теории прочности. Приведены соотношения квазистатического равновесия континуума, подверженного действию материальных поверхностных и объемных сил.

Структура материала и внутренние механизмы деформирования, связанные с ней, существенно влияют на поведение среды на макоруровне, о чем свидетельствует большое количество работ по мезомеханике [1, 2] и исследования в области микроструктурных материалов [3—5], которые рассматривают необратимую деформацию на различных масштабных уровнях и подтверждают существование строгой иерархии структуры. Вместе с тем, современная теория прочности и теория пластичности рассматривают особенности деформирования твердых тел вплоть до некоторого критического состояния (например, разрушения). Обе теории требуют знания основных механических свойств материала и характеристик процесса деформирования. Механика хрупкого разрушения формулирует критерии разрушения в виде инвариантных связей критических значений макрохарактеристик процессов деформирования, и в настоящее время все больше опирается на методы физики твердого тела и современные разделы механики, учитывающие микроструктуру материала [6, 7]. Для задач теории прочности важно акцентировать внимание на двух противоположных проблемах [8, 9]:

– предотвращение нежелательного разрушения конструкций или их элементов из металлов, сплавов, полимеров и горных пород;

– создание системы направленного управляемого разрушения (отделения определенного объема породы от массива в горнодобывающих процессах, разделение тела на части, дробление и измельчение твердых деформированных материалов).

Для решения поставленных задач привлекают основные понятия синтетической теории прочности [2].

1. О ПРОЯВЛЕНИИ СИНТЕТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

Известны экспериментальные исследования, направленные на изучение физической картины деформирования материалов при хрупком разрушении, которые показывают, что нагружение в режиме заданных перемещений позволяет зарегистрировать так называемую ниспадающую ветвь (или послепиковую прочность) [8]. Выявлена несимметричная схема деформирования и локализации сдвигов для ряда материалов (горные породы, сыпучие материалы). Прослеживается появление размера и анизотропии сопротивления сдвигу в изначально однородном изотропном теле. Такие свойства среды могут быть аналитически обоснованы введением в математической модели нового набора инвариантов напряженного состояния, отличных от классических [8]. Указанный новый подход к моделированию поведения упругопластических сред позволяет отразить возникающую при необратимых деформациях и разрушении анизотропию сопротивления сдвигам [9]. Известная экспериментальная зависимость между максимальным касательным напряжением и величиной главного сдвига положена в основу такой модели, как синтетическая теория прочности [1]. Связь $T = T(\Gamma)$, где Γ — величина главного сдвига, указывает на то, что за пределом упругости фактически образуется новый материал, в котором пластическая деформация осуществляется за счет разделения тела на отдельные блоки, скольжения их друг по другу и поворота на некоторый угол при сохранении сплошности среды.

Достижение главным сдвигом предельного значения инициирует рост зоны необратимых деформаций, при постоянном значении максимального касательного напряжения. При этом сам момент разрушения ассоциирован с достижением напряжений и деформаций критических значений, а подготовка к разрушению (предразрушение) происходит в некоторой области, являющейся, по сути, классической зоной пластического течения. Критерием разрушения служат простейшие инвариантные связи в «момент» разрушения. Для случая хрупкого разрушения, имеющего место в задачах геомеханики и деформирования горных пород, состояние разделения тела на части, сменяющее упругое, моделируется квадратичным условием пластичности и критерием прочности при сдвиговых деформациях [10]. Последнее есть условие постоянства величины главного сдвига, которое несет в себе требование конечности деформаций в зоне предразрушения. Реализация синтетической прочности означает, что материал разделяется на блоки, которые, мало изменяясь в объеме, скользят друг по другу и поворачиваются настолько, чтобы составить сплошной материал. Математическое моделирование послепиковой прочности означает введение новых дополнительных кинематических параметров — поворотов элементов, что отражает явную аналогию с поведением структурных сред. В теоретическом аспекте это дает возможность постановки новых краевых задач, а в практическом — оценить остаточную прочность разрушенного материала.

Привлечение понятия материальных сил [11, 12] для описания процессов, происходящих на ниспадающей ветви, где реализуется послепиковая прочность материалов, обосновано проявлением неоднородности материала вследствие деформирования и образованием внутренних дефектов в среде. Введение понятия материального и физического пространств для исследования запредельного поведения среды при хрупком разрушении приводит к проблеме двойственного равновесия, активно обсуждаемой в настоящее время в рамках механики материальных пространств [13, 14].

2. О СУЩЕСТВОВАНИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТОЯНИЯ ДВОЙСТВЕННОГО РАВНОВЕСИЯ

Состояние двойственного равновесия возникает при разделении вещественного пространства на две составляющие — пространство физических сил и пространство материальных сил [11, 14]. Подчеркнем формальную двойственность физических и материальных сил, действующих на произвольную подобласть тела и соответствующих квазистатическому состоянию равновесия.

2.1. ФИЗИЧЕСКИЕ СИЛЫ

Рассмотрим произвольную область V с границей ∂V. Предположим, что граница области подвержена растягивающему воздействию пространственного тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$. Пусть n — внешняя нормаль области V и всюду внутри области V действуют распределенные объемные силы b^{phy} [11]. Векторы физических и объемных сил, действующих на элемент физического пространства V, соответственно определяются [11] как

$$F^{phy,sur} = \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \cdot n da \text{ и } F^{phy,vol} = \int_{V} b^{phy} dv. \quad (6)$$

Аксиома 1. Равнодействующая поверхностных и объемных сил, действующих на произвольную область V физического пространства в состоянии квазистатического равновесия равна нулю:

$$F^{phy,sur} + F^{phy,vol} = 0. \quad (7)$$

Перенося понятие физических сил в область предразрушения синтетической теории прочности, можем сформулировать следующее утверждение:

Теорема. Равнодействующая поверхностных и объемных сил, действующих на элементы среды в области V, принадлежащей зоне предразрушения упругопластического материала, в состоянии квазистатического равновесия физического пространства равна нулю.

Доказательство. Выделяя подобласть физического пространства и постулируя в ней справедливость законов хрупкого разрушения, приходим к системе поверхностных и объемных сил, определяемых равенствами (6). Однако, при деформировании материала в рамках математической модели синтетической теории прочности, вследствие взаимодействия поверхностей скольжения в материале образуются элементарные зерна и блоки, которые обладают дополнительными возможностями взаимного скольжения и поворота. Возникающие поверхности скольжения реально не влияют на суммарный баланс сил в элементе объема, поскольку сплошность среды при таком моделировании не нарушается. Элементарные носители деформации могут перемещаться вдоль вновь образованных поверхностей скольжения, взаимно погашая контактное поверхностное взаимодействие, и поворачиваются на определенный угол ровно настолько, чтобы образовать в новом состоянии сплошной материал. Таким образом, сумма поверхностных и объемных физических сил, определяемых аналогично (6), действующих на элемент объема V, принадлежащий зоне предразрушения упругопластического материала, в состоянии квазистатического равновесия физического пространства равна нулю, то есть справедливо равенство (7).

2.2. СКАЛЯРНЫЙ МОМЕНТ ФИЗИЧЕСКИХ СИЛ

Определение. Равнодействующий скалярный момент физических поверхностных и объемных сил, действующих на V, есть величина, вычисляемая соответственно по формулам [13]:

$$V^{phy,sur} = \int_{\partial V} r\sigma^t n da \text{ и } V^{phy,vol} = \int_V [rb^{phy} + 3prs\sigma]dv, \tag{8}$$

где $prs\ \ [\bullet] = -\dfrac{1}{3}\ \ [\bullet] \div I$ есть величина интенсивности поверхностного напряжения (поверхность давления) тензора второго порядка $[\bullet]$ в области V.

Скалярные моменты физических сил являются, по сути, мерой центрированности системы физических сил, действующих на V.

Аксиома 2. Для квазистатического равновесия центральной части физических сил для подобласти с текущей конфигурацией V справедливо:

$$V^{phy,sur} + V^{phy,vol} = 0. \tag{9}$$

2.3. ВЕКТОРНЫЙ МОМЕНТ ФИЗИЧЕСКИХ СИЛ

Определение. Равнодействующий векторный момент физических поверхностных и объемных сил, действующих на V есть величина, определяемая соответственно по формулам [12]:

$$V^{phy,sur} = \int_{\partial V} r \times \sigma^t n da \text{ и } V^{phy,vol} = \int_V [r \times b^{phy} + 3axl\sigma]dv, \tag{10}$$

где $r \in E^3$ есть вектор расстояния в фиксированной точке в (трехмерном) физическом пространстве, и $axl[\bullet] = -\dfrac{1}{2}[\bullet] \times I$ — единичный вектор тензора второго порядка $[\bullet]$ в области V [12].

Векторные моменты физических сил обычно понимаются как (физические) вращающие моменты, и, по сути, являются мерой нецентрированности системы физических сил, действующих на V. Таким образом утверждение, эквивалентное квазистатическому равновесию нецентральной части физических сил для подобласти с текущей конфигурацией, может быть сформулировано в виде следующего утверждения:

Аксиома 3. Сумма векторных поверхностных и объемных моментов физических сил, действующих на произвольную область V физического пространства в состоянии квазистатического равновесия равна нулю:

$$T^{phy,sur} + T^{phy,vol} = 0. \tag{11}$$

Замечание. Условие симметрии σ, есть условие для получения независимого уравнения равновесия вдоль линий Эйлера, поскольку только тогда устраняется дополнительное значение объема $2axl\sigma$ в уравнении (10) [11].

2.4. МАТЕРИАЛЬНЫЕ СИЛЫ

Понятие материальных сил включает в себя новое представление системы сил, действующих на тело, в механике деформируемого твердого тела. В противоположность физическим силам, материальные силы действуют в материальном многообразии, главным образом, отражая общую тенденцию, в соответствии с которой различные дефекты (трещины или включения) двигаются относительно окружающего их материала [11]. Взяв за основу формулировку соответствующих законов квазистатического равновесия в материальном пространстве, попытаемся по-новому взглянуть на классические аспекты механики гиперупруго статического разрушения. Оперируя посредством геометрически нелинейного множества, обратим внимание, с одной стороны, на двойственность описания прямого и обратного движения, а с другой стороны, получим классические интегралы траектории, учитывая элементарный баланс в материальном пространстве.

Законы сохранения в гиперупругости, полученные как следствие теоремы Нетера, изучались Гюнтером (1962), Ноулсом и Штернбергом (1972), Флетчером (1976), Рогулой (1977) и Ольвером (1984) [13]. Очевидно, что законы сохранения тесно связаны с соленоидальными, т.е. дивергентными, произвольными полями, а, следовательно, и с независимыми интегралами траектории [11—14]. Как следствие такой связи были выведены три независимых интеграла траектории, обычно именуемые *J*-, *L*- и *M*-интегралы.

Рассмотрим произвольную подобласть V_0 с границей ∂V_0 исходной конфигурации B_0. Предположим, что подобласть нагружена вдоль ∂V_0 материальным поверхностным усилием M в терминах материального напряжения и нормали к исходной поверхности N, а в пределах V_0 материальными объемными силами в терминах распределенных материальных объемных сил B^{mat}, возникающих, к примеру, из-за неоднородности материала.

Следует отметить, что вычисление материального поверхностного напряжения и материальных объемных сил является лишь частью решения, поскольку в них содержится информация о деформации.

Определение. Равнодействующие материальные поверхностные и объемные силы, действующие на V_0 вычисляются по формуле [13]:

$$F^{mat,sur} = \int_{\partial V_0} M^t \cdot N dA \text{ и } F^{mat,vol} = \int_{V_0} B^{mat} dV. \quad (12)$$

Аксиома 4. Состояние квазистатического равновесия материальных сил для подобласти с исходной конфигурацией V_0 в окрестности зоны предразрушения характеризуется уравнением:

$$F^{mat,sur} + F^{mat,vol} = 0. \quad (13)$$

Для полного описания характеристик материального пространства, необходимо дополнительно сформулировать понятия скалярного и векторного моментов материальных сил. Очевидно, что понятие материального и физического пространств актуально при решении задач механики, для которых существенно влияние внутренних неоднородностей на процесс деформирования. В настоящее время метод материальных сил нашел свое мощное применение в области нелинейной упругости и задач гиперупругого разрушения [11—14].

С точки зрения построения математической модели, видится возможным распространить метод материальных сил на аппарат синтетической теории прочности, принимая явное влияние вектора микроповорота ω и теорию малых деформаций на процесс деформирования среды. С другой стороны, появление в среде диспегированных элементов поддерживает идею наличия в деформируемом материале дополнительных внутренних сил материала, что дает постановку уравнений теории материальных сил. Дополнительно, сделаем акцент на формальную двойственность физических и материальных сил, действующих на произвольных подобластях твердого тела, и на соответствующие условия квазистатического равновесия. В вопросе вывода последних и строгого доказательства теорем существования и единственности для задач хрупкого разрушения упругопластических сред следует применить детальное дополнительное исследование.

Авторам видится перспективным развитие метода материальных сил в механике разрушения упруго-пластических сред, поскольку данный метод является обобщением и развитием известных методов механики на случай двойственности квазистатического состояния равновесия гиперупругих сред.

Авторы благодарят Министерство Образования и Науки РФ, а также Германскую службу академических обменов (DAAD) за содействие в организации совместных исследований.

Работа выполнена при поддержке INTAS (№ 05-109-4767).

ЛИТЕРАТУРА

1. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов: в 2-х т./ под ред. В. Е. Панина. — Новосибирск: Наука, 1995. — Т. 1— 298 с., Т. 2. — 320 с.

2. *Шемякин Е.И.* Синтетическая теория прочности. Ч. I // Физическая мезомеханика. 2. 6. (1999). 63-69.

3. *Steinmann P.* Theory and Numerics of Ductile Micropolar Elastoplastic Damage, Int. J. Num. Meth. Engr. 1995. Vol. 38, P. 583—606.

4. *Steinmann P.* Views on Multiplicative Elastoplasticity and the Continuum Theory of Dislocations, Int. J, Eng, Sci. 1996. Vol. 34, P. 1717—1735.

5. *Kontchakova N.* New Approach to the Destructions of Solid Taking into Acount its Internal Structure, Proceedings of the XIV^th^ Int. Congr. on Rheology, 22.08—29.08, 2004, Seoul, Korea, CD, Manuscript SO 09.

6. *Шемякин Е.И.* О хрупком разрушении твердых тел, II (о сдвиговой прочности горных пород) //

Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2003. № 3. С. 76—81.

7. *Ревуженко А.Ф.* Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ — Новосибирск: Изд. Новосибирского ун-та, 2000.

8. *Шемякин Е.И.* Об инвариантах напряженного и деформированного состояния в математических моделях механики сплошной среды // ДАН, 2000, Т. 373, № 5, С. 632—634.

9. *Кончакова Н.А.* О построении моделей сплошных сред с несимметричными тензорами// Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика, Механика. 2002, № 4, С. 42—48.

10. *Шемякин Е.И.* О хрупком разрушении твердых тел (плоская деформация) // Изв. РАН Механ. тверд. тела. 1997. № 2. С. 145—150.

11. *Steinmann P.* Application of Material Forces to Hyperelastostatic fracture mechanics. I. Continuum mechanical setting, Int. J. Solid & Structures. 2000. V. 37 P. 7371—7391.

12. *Steinmann P., Ackermann D., Barth F.J.* Application of Material Forces to Hyperelastostatic fracture mechanics. I. Continuum mechanical setting, Int. J. Solid & Structures. 2001. V. 38. P. 5509—5526.

13. *Kuhl E., Askes H., Steinmann P.* An ALE Formulation Based on Spatial and Material Settings of Continuum Mechanics, Part 1: Generic Hyperelastic Formulation Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. 2004. Vol. 193, P. 4207—4222.

14. *Kienzler R., Herrmann G.* Mechanics in Material Space. Berlin: Springer 2000

15. *Христианович С.А., Шемякин Е.И.* О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении // МТТ, 1969, № 5, С. 138—149.