УДК 517.954

ОБОБЩЕННАЯ ВЕСОВАЯ ФУНКЦИЯ r^λ

Э. Л. Шишкина

Воронежская государственная технологическая академия

В работе приводится формула Киприянова—Пицетти для весового распределения r^λ, определенного на подпространстве шварцевских функций, четных по некоторым переменным. Выводится формула для разложение некоторых функций на весовые плоские волны. Приводится формула для преобразования Фурье—Бесселя весового распределения r^λ, определенного на специальном пространстве основных функций, построенному по типу основных пространств П. И. Лизоркина.

1. Основные определения

Через $\mathbb{R}_N^+$ будем обозначать часть евклидова пространства $\mathbb{R}_N$ точек

$$\{x=(x',x''),x'=(x_1,...,x_n),x''=(x_{n+1},...,x_N),$$

$$x_1>0,...,x_n>0,1\le n\le N\}.$$

Функцию $\varphi(x)$ будем называть основной функцией, если она бесконечно дифференцируемая, четная по каждой из первых n переменных, и для любого числа ν удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\left|\mathcal{D}_x^\beta\varphi(x)\right|\le\frac{C_{\beta,\nu}}{(1+r^2)^\nu},\ \ |\beta|=0,1,2,...,$$

где $r^2=\sum\limits_{i=1}^N x_i^2$. Совокупность таких функций $\varphi(x)$ будем называть пространством основных функций $S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$. Очевидно, что $S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$ — линейное пространство. Соответствующий $S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$ класс распределений будем обозначать $S'_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$.

Основное пространство функций Φ_γ, построенное по типу основных пространств Лизоркина (см. [1]), строится следующим образом: пусть

$$\Psi_\gamma=\{\psi:\psi\in S_{ev},(B_{x'}^\alpha D_{x''}^\beta\psi)(0)=0,$$

$$|\alpha|,|\beta|=0,1,2,...\},$$

где $B_{x'}^\alpha=\prod\limits_{i=1}^n B_{x_i}^{\alpha_i}$, $B_{x_i}=\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\dfrac{\gamma_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, — оператор Бесселя $(\gamma_i>0)$, тогда

$$\Phi_\gamma=\{\varphi:\varphi=F_B[\psi],\psi\in\Psi_\gamma\},$$

где $F_B[\psi]$ — преобразование Фурье—Бесселя функции ψ:

$$F_B[\psi]=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\mathcal{P}_{\xi'}^\gamma(e^{-i\langle x,\xi\rangle})\psi(x)(x')^\gamma\,dx.$$

Соответствующие классы распределений, порожденные весовой линейной формой

$$(f,\varphi)_\gamma=\int f(x)\varphi(x)(x')^\gamma\,dx,(x')^\gamma=\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i},$$

где $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел, причем $|\gamma|=\gamma_1+...+\gamma_n$, будем обозначать Ψ'_γ и Φ'_γ.

Определим многомерный оператор Пуассона $\mathcal{P}_{x'}^\gamma$, действующий на интегрируемые функции, четные по каждой из первых n переменных, по формуле

$$\mathcal{P}_{x'}^\gamma[f(x)]=C(\gamma)\int_0^\pi\ldots\int_0^\pi f(x_1\cos\alpha_1,...,x_n\cos\alpha_n,x'')\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\,d\alpha,$$

$$d\alpha=d\alpha_1...d\alpha_n$$

в которой нормирующая константа

$$C(\gamma)=\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^n\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}$$

подобрана так, чтобы $\mathcal{P}_{x'}^\gamma[\text{const}]=\text{const}$.

Пусть $r=\sqrt{x_1^2+...+x_N^2}$, рассмотрим функционал r^λ действующий по формуле

$$(r^\lambda,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}r^\lambda\varphi(x)(x')^\gamma\,dx.\qquad(1)$$

Функционал r^λ представляет собой аналитическую функцию от λ в области $\operatorname{Re}\lambda>-(N+|\gamma|)$. Для $\operatorname{Re}\lambda\le-(N+|\gamma|)$ весовой функционал r^λ может быть определен аналитическим продолжением по параметру λ (см. далее формулу (7)).

Сделаем в интеграле (1) сферическую замену координат $x=r\Theta,r=|x|$. Обозначая $S_N^+(0,1)=S_N^+$ — часть сферы единичного радиуса, с центром в начале координат, принадлежащую $\mathbb{R}_N^+$, имеем

$$(r^\lambda,\varphi)_\gamma = \left|S_N^+\right|_\gamma \int_0^\infty r^{\lambda+N+|\gamma|-1} M_\varphi^\gamma(r)\,dr, (\Theta')^\gamma = \prod_{i=1}^n \Theta_i^{\gamma_i},$$

где введено обозначение

$$M_\varphi^\gamma(r) = \frac{1}{\left|S_N^+\right|_\gamma} \int_{S_N^+} \varphi(r\Theta)(\Theta')^\gamma\,dS, \qquad (2)$$

представляющее собой *весовое сферическое среднее* от функции $\varphi(r\Theta)$ по части сферы $S_N^+(r) \in R_N^+$ радиуса r с центром в начале координат, а

$$|\,S_N^+\,|_\gamma = \int_{S_N^+} (\Theta')^\gamma\,dS = \frac{\pi^{\frac{N-n}{2}} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}.$$

2. ФОРМУЛА КИПРИЯНОВА—ПИЦЕТТИ

Хорошо известно применение сферических средних значений функций в различных приложениях анализа и в частности в теории дифференциальных уравнений в частных производных (см. [3], [4]). В работе [5] П. Пицетти получил формулу разложения сферического среднего в ряд по степеням оператора Лапласа для достаточно гладкой функции. В книге И. А. Киприянова [6] дано обобщение формулы Пицетти для весовых сферических средних значений функций из соответствующего весового функционального класса. При этом роль оператора Лапласа играл оператор $\Delta_B = \Delta + \dfrac{\gamma}{x_n}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, где Δ — оператор Лапласа по переменным $(x_1,...,x_n)$, $\gamma > 0$. Приведенную в [6] формулу ([6], стр.118, формула (2.13)) называют формулой Киприянова—Пицетти.

Дальнейшее обобщение формулы Киприянова—Пицетти связано с исследованием задач с сингулярным оператором

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n B_{x_i} + \sum_{i=n+1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

где B_{x_i} — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя:

$$B_{x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \gamma_i > 0.$$

Оператор Δ_B, следуя [3], применяется к классу функций, определеных в части евклидова пространства $\mathbb{R}_N^+$ достаточно гладких и четных по каждой из первых n переменных.

Теорема 1. *Для $M_\varphi^\gamma(r)$ — весового среднего от функции $\varphi(x) \in S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$ по части сферы S_N^+ имеет место представление:*

$$M_\varphi^\gamma(r) = \varphi(0) + \frac{1}{2!}(M_\varphi^\gamma(0))'' r^2 + ... +$$

$$+ \frac{1}{(2p)!}(M_\varphi^\gamma(0))^{(2k)} r^{2p} + ... =$$

$$= \left|S_N^+\right|_\gamma \sum_{p=0}^k \frac{\Delta_B^p \varphi(0) r^{2p}}{2^p\,p!(N+|\gamma|)(N+|\gamma|+2)...(N+|\gamma|+2p-2)} + ... \qquad (3)$$

Доказательство. В начале отметим, что функция $M_\varphi^\gamma(r)$ бесконечно дифференцируема по r при $r > 0$ и убывает при $r \to \infty$ быстрее любой степени $\dfrac{1}{r}$, что следует из аналогичных свойств функции $\varphi(x)$.

Нетрудно показать, что функция $M_\varphi^\gamma(r)$ — бесконечно дифференцируема в точке $r = 0$, для чего достаточно разложить функцию $\varphi(x)$ по формуле Тейлора и убедиться, что все ее нечетные производные равны нулю при $r = 0$. Таким образом, функцию $M_\varphi^\gamma(r)$ можно рассматривать как четную основную функцию переменного r, то есть $M_\varphi^\gamma(r) \in S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$.

При этом выражение (1) можно рассматривать как результат применения *не весового* функционала $\left|S_N^+\right|_\gamma x_+^\mu$, где $\mu = \lambda + N + |\gamma| - 1$ к основной функции $M_\varphi^\gamma(x)$:

$$\begin{aligned}(r^\lambda,\varphi(x))_\gamma &= \left|S_N^+\right|_\gamma \int_0^\infty r^{\lambda+N+|\gamma|-1} M_\varphi^\gamma(r)dr = \\ &= (\left|S_N^+\right|_\gamma x_+^\mu, M_\varphi^\gamma(x)).\end{aligned} \qquad (4)$$

Поэтому можно воспользоваться результатами исследования этой обобщенной функции, приведенными в книге [1].

Имеем следующее. Регулярный (не весовой) функционал $(x_+^\mu,\psi) = \int_0^\infty x^\mu \psi(x)dx$, определенный функцией $x_+^\mu = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ x^\mu, x > 0 \end{cases}$. является аналитической функцией при $\operatorname{Re}\mu > -1 (\operatorname{Re}\lambda > -N - |\gamma|)$ и аналитически продолжается на область $\operatorname{Re}\mu > -N-1$, с исключенными точками $\mu = -1,-2,-3,...$. Функционал x_+^μ как функция от параметра μ имеет при $\mu = -k$ полюс первого порядка, а вычет в этой точке равен $\dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x)$, $k = 1,2,...$. Но так как все нечетные производные функции $M_\varphi^\gamma(r)$ обращаются в нуль при $r=0$, то остается только серия полюсов отвечающих нечетным значениям $\mu=-1,-3,\ldots,-2p-1,\ldots$. Теперь вернемся к весовым функционалам. Учитывая формулу (4), заметим, что вычет функционала $(r^{\lambda},\varphi)_{\gamma}$ как функции от λ, в точках $\lambda=-(N+|\gamma|+2p)$, $p=0,1,2,\ldots$ равен

$$res_{\lambda=-(N+|\gamma|+2p)}[(r^{\lambda},\varphi)_{\gamma}]=\left|S_N^+\right|_{\gamma}\frac{(M_{\varphi}^{\gamma})^{(2p)}(0)}{(2p)!}. \quad (5)$$

Следуя П. Пицетти [5] (см. также [3]) выразим величину $(M_{\varphi}^{\gamma})^{(2p)}(0)$ непосредственно через функцию φ. Для этого построим следующее выражение вычета обобщенной функции r^{λ}:

$$res_{\lambda=-(N+|\gamma|+2p)}[r^{\lambda}]=$$
$$=\frac{\left|S_N^+\right|_{\gamma}\Delta_B^p\delta(x)}{2^p p!(N+|\gamma|)(N+|\gamma|+2)\ldots(N+|\gamma|+2p-2)}. \quad (6)$$

Сравним выражение (6) с формулой (5), получим выражение для производной порядка $2p$, $p=0,1,2\ldots$ по r в нуле весового сферического среднего

$$(M_{\varphi}^{\gamma})^{(2p)}(0)=$$
$$=\frac{(2p)!\,\Delta_B^p\varphi(0)}{2^p p!(N+|\gamma|)(N+|\gamma|+2)\ldots(N+|\gamma|+2p-2)}.$$

Это дает возможность написать разложение функции $M_{\varphi}^{\gamma}(r)$ в ряд Тейлора и получить формулу (3). Доказательство закончено.

Используя формулу (3) запишем регуляризацию весового функционала $(r^{\lambda},\varphi)_{\gamma}$ при $\operatorname{Re}\lambda>-(N+|\gamma|+2p),\lambda\neq-(N+|\gamma|),-(N+|\gamma|+2),\ldots,-(N+|\gamma|+2p-2)$ в виде

$$(r^{\lambda},\varphi)_{\gamma}=\left|S_N^+\right|_{\gamma}\int_0^1 r^{\lambda+N+|\gamma|-1}[M_{\varphi}^{\gamma}(r)-\varphi(0)-\ldots-$$
$$-\frac{1}{(2p)!}(M_{\varphi}^{\gamma}(0))^{(2p)}r^{2p}]dr+\left|S_N^+\right|_{\gamma}\int_1^{\infty}r^{\lambda+N+|\gamma|-1}M_{\varphi}^{\gamma}(r)dr+$$
$$+\left|S_N^+\right|_{\gamma}\sum_{k=0}^{2p}\frac{(M_{\varphi}^{\gamma}(0))^{(2k)}}{(2k)!(\lambda+N+|\gamma|+2k)}.$$

3. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ НА ВЕСОВЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

Функцию от скалярного произведения $f(\langle\xi,x\rangle)$ обычно называют “плоской волной”, так как она сохраняет постоянное значение на плоскости $\langle\xi,x\rangle=p$.

Функцию $\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}f_{\lambda}(\langle\xi,x\rangle)$ будем называть функцией типа “весовой плоской волны”, потому что в соответствующих интегральных выражениях она перейдет в функцию обычной плоской волны.

Пусть $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_N)$ — точка части единичной сферы с центром в начале координат S_N^+. Для любого $x\in\mathbb{R}_N^+$ и для $Re\lambda\in\Lambda$ (Λ — некоторая область в $\mathbb{R}$) построим обобщенную функцию $\mathfrak{F}_{\lambda}^B$ следующим образом:

$$(\mathfrak{F}_{\lambda}^B,\varphi)_{\gamma}=(\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}f_{\lambda}(|\langle\xi,x\rangle|),\varphi(x))_{\gamma}=$$
$$=\int_{\mathbb{R}_N^+}\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}f_{\lambda}(|\langle\xi,x\rangle|)\varphi(x)(x')^{\gamma}dx, \quad (8)$$

где $\mathfrak{F}_{\lambda}^B$ — локально суммируемая при $\operatorname{Re}\lambda\in\Lambda$ функция

$$\mathfrak{F}_{\lambda}^B=\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}f_{\lambda}(|\langle\xi,x\rangle|),$$

а $f_{\lambda}(|\langle\xi,x\rangle|)$ — функция, зависящая помимо скалярного произведения еще и от параметра λ.

Обозначим интеграл, стоящий в правой части равенства (8), через $\mathfrak{W}$. Воспользовавшись определением оператора Пуассона, имеем

$$\mathfrak{W}=C(\gamma)\int_{\mathbb{R}_N^+}\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}f_{\lambda}\left(\left|\sum_{i-1}^{n}x_i\xi_i\cos\alpha_i+\langle\xi'',x''\rangle\right|\right)\times$$
$$\times\varphi(x)(x')^{\gamma}\prod_{i=1}^{n}\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i d\alpha dx.$$

Произведем в этом интеграле замену переменных $\tilde{x}_{2i-1}=x_i\cos\alpha_i$, $\tilde{x}_{2i}=x_i\sin\alpha_i,\forall i=\overline{1,n}$, получим

$$\mathfrak{W}=C(\gamma)\int_{\mathbb{R}_{N+n}^+}f_{\lambda}(\langle\tilde{x},\tilde{\xi}'\rangle)\tilde{\varphi}(\tilde{x})\prod_{i=1}^{n}\tilde{x}_{2i}^{\gamma_i-1}d\tilde{x}, \quad (9)$$

где $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{2n},x'')$, $\tilde{\xi}'=(\xi_1,0,\ldots,0,\xi_n,0,\xi'')$, $\tilde{\varphi}(\tilde{x})=\varphi(\sqrt{\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2},\ldots\ldots,\sqrt{\tilde{x}_{2n-1}^2+\tilde{x}_{2n}^2},x'')$.

Под интегралом (9) уже функция, зависящая от скалярного произведения, поэтому это функция типа обычной плоской волны. Совершим поворот осей $y=u\tilde{x}$, при котором точка $\tilde{\xi}'$ приобретет координаты $(0,\ldots,0,1)$ (то есть единичный вектор $\tilde{\xi}'$ перейдет в $\operatorname{ort}x_N$). Интеграл (9) инвариантен относительно такого поворота, так как он не затрагивает весовые переменные. Скалярное произведение $\langle\tilde{\xi}',\tilde{x}\rangle$ при этом повороте примет вид $y_{N+n}|x|=p|x|$, полагая $\psi(y)=\tilde{\varphi}(u^{-1}y)=\tilde{\varphi}(\tilde{x})$ имеем

$$\mathfrak{W}=C(\gamma)\int_{\mathbb{R}_{N+n}^+}f_{\lambda}(p|x|)\psi(y)\prod_{i=1}^{n}y_{2i}^{\gamma_i-1}dy_1\ldots dy_{N+n-1}dp. \quad (10)$$

Выделим в правой части (10) интегрирование по переменой p

$$\mathfrak{W} = C(\gamma)\int\limits_{p=-\infty}^{\infty} f_\lambda(p\,|x|)\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^+_{N+n-1}}\psi(y)\prod_{i=1}^{n} y_{2i}^{\gamma_i-1}dy_1...dy_{N+n-1}\right\}dp.$$

Выражение в фигурных скобках есть некоторая функция $\varphi_0(p)$, бесконечно дифференцируемая и убывающая на бесконечности быстрее любой степени $1/p$, то есть обладающая свойствами основной функции переменного p. Тогда выражение (10) может быть записано в виде *невесового* одномерного функционала $\mathfrak{W} = C(\gamma)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(p\,|x|)\varphi_0(p)dp$, и мы имеем равенство

$$(\mathfrak{F}^B_\lambda,\varphi)_\gamma = C(\gamma)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(p\,|x|)\varphi_0(p)dp. \qquad (11)$$

Утверждение. *Если функция $f_\lambda(\langle x,\xi\rangle)$ параметра λ такова, что интеграл в правой части равенства (11), определенный для $\operatorname{Re}\lambda\in\Lambda$, может быть аналитически продолжен на все значения λ, то вместе с ним определяется для всех λ и функционал $\mathfrak{F}^B_\lambda$.*

Заметим, что функционал $\mathfrak{F}^B_\lambda$ непрерывно зависит от точки ξ. Поэтому можно *проинтегрировать функционал* $\mathfrak{F}^B_\lambda$, определенный по формуле (7), *по параметру* ξ, пробегающему часть единичной сферы S^+_N с весом $(\xi')^\gamma = \prod\limits_{i=1}^{n}\xi_i^{\gamma_i}$, то есть построить весовой функционал $\mathfrak{G}^B_\lambda$:

$$\mathfrak{G}^B_\lambda = \int\limits_{S^+_N}\mathfrak{F}^B_\lambda(\xi')^\gamma\,dS = \int\limits_{S^+_N}\mathcal{P}^\gamma_{\xi'}f_\lambda(|\langle\xi,x\rangle|)(\xi')^\gamma\,dS. \quad (12)$$

Вычислим интеграл в правой части равенства (12) для $\operatorname{Re}\lambda\in\Lambda$. Для этого сделаем замену переменных $\tilde{\xi}_{2i-1} = \xi_i\cos\alpha_i, \tilde{\xi}_{2i} = \xi_i\sin\alpha_i, \forall i=\overline{1,n},$ при которой переменные $\xi'' = (\xi_{n+1},...,\xi_N)$ остаются без изменения и, затем, произведем поворот координатных осей $y = u\tilde{x}$, при котором точка $\tilde{\xi}$ приобретет координаты $(0,...,0,1)$, получим

$$\int\limits_{S^+_N}\mathcal{P}^\gamma_{\xi'}f_\lambda(\langle\xi,x\rangle)(\xi')^\gamma\,dS =$$
$$= C(\gamma)\int\limits_{-1}^{1}\frac{f_\lambda(p\,|x|)}{\sqrt{1-p^2}}\,dp\int\limits_{S^+_{N+n-1}\left(\sqrt{1-p^2}\right)}\prod_{i=1}^{n}y_{2i}^{\gamma_i-1}d\widetilde{S}_2,$$

где $S_{N+n-1}(\sqrt{1-p^2})$ — сфера $\sum\limits_{j=1}^{N+n-1}y_j^2 = 1-p^2$ (т.е. сфера в пространстве $\mathbb{R}_{N+n-1}$, радиуса $\sqrt{1-p^2}$ с центром в начале координат), $d\widetilde{S}_2$ — элемент поверхности этой сферы, $S^+_{N+n-1}(\sqrt{1-p^2})$ — часть сферы $S_{N+n-1}(\sqrt{1-p^2})$, принадлежащая области $\mathbb{R}^+_{N+n-1} = \{z\in\mathbb{R}_{N+n-1} : z_{2i} > 0\,\forall i=\overline{1,n}\}$. От интеграла по части сферы $S^+_{N+n-1}(\sqrt{1-p^2})$ перейдем к интегралу по сфере единичного радиуса, получим

$$\int\limits_{S^+_N}\mathcal{P}^\gamma_{\xi'}f_\lambda(\langle\xi,x\rangle)(\xi')^\gamma\,dS =$$
$$= C(\gamma)\left|S_{N+n-1}\right|_{|\gamma|-1}\int\limits_{-1}^{1}f(p\,|x|)(1-p^2)^{\frac{N+|\gamma|-3}{2}}dp, \qquad (13)$$

где $|\, S_{N+n-1}\,|_{|\gamma|-1} = \pi^{N-1}\dfrac{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{|\gamma|+N-1}{2}\right)}.$

Формула (13), установленная для $\operatorname{Re}\lambda\in\Lambda$, остается справедливой и при всех остальных значениях λ в силу единственности аналитического продолжения.

Возьмем в качестве функции $f_\lambda(t)$ функцию $|t|^\lambda$, где $t=\langle x,\xi\rangle$. Эта функция удовлетворяет условиям утверждения для $\Lambda = (-1,+\infty)$ и поэтому, при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ для нее справедлива формула (13).

$$\int\limits_{S^+_N}\mathcal{P}^\gamma_{\xi'}\,|\langle\xi,x\rangle|^\lambda\,(\xi')^\gamma\,dS =$$
$$= 2\pi^{\frac{N-n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+\lambda}{2}\right)}|x|^\lambda.$$

Теперь возьмем $f_\lambda(t) = |t|^\lambda\ln|t|$, где $t=\langle x,\xi\rangle$. При $\operatorname{Re}\lambda > -1$ для этой функции справедлива формула (13)

$$\int\limits_{S^+_N}\mathcal{P}^\gamma_{\xi'}\,|\langle\xi,x\rangle|^\lambda\ln(|\langle\xi,x\rangle|)(\xi')^\gamma\,dS =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{-N+n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+\lambda}{2}\right)}\times$$
$$\times\left(\ln|\xi| + \Psi\left(\frac{k+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{N+|\gamma|+k}{2}\right)\right)|x|^\lambda,$$

где $\Psi(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ — пси-функция Эйлера.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ—БЕССЕЛЯ ФУНКЦИИ r^λ

Имеет место следующее обобщение формулы Бохнера для преобразования Фурье—Бесселя радиальной функции.

Лемма. *Преобразование Фурье—Бесселя радиальной функции есть также радиальная функция и при этом справедлива формула*

$$F_B[\varphi(|x|)](\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\varphi(|x|)\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}(e^{-i\langle x,\xi\rangle})(x')^{\gamma}\,dx=$$

$$=\frac{\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{\frac{2-N-|\gamma|}{2}}|\xi|^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}}\int\limits_0^{\infty}\varphi(r)r^{\frac{N+|\gamma|}{2}}J_{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}(|\xi|r)dr, \tag{14}$$

для любой функции $\varphi(r)$, такой, что

$$\int\limits_0^{\infty}r^{N+|\gamma|-1}(1+r)^{\frac{1-N-|\gamma|}{2}}|\varphi(r)|\,dr<\infty,$$

причем интеграл в левой части (14) понимается как условно сходящийся (он абсолютно сходится, если $\int\limits_0^{\infty}r^{N+|\gamma|-1}|\varphi(r)|\,dr<\infty$).

Доказательство. Имеем

$$F_B[\varphi(|x|)](\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\varphi(|x|)\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}(e^{-i\langle x,\xi\rangle})(x')^{\gamma}\,dx,$$

здесь перейдем к сферическим координатам $x=r\sigma$, получим

$$F_B[\varphi(|x|)](\xi)=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\varphi(r)r^{N+|\gamma|-1}\int\limits_{S_N^+}\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}(e^{-ir\langle\sigma,\xi\rangle})(\sigma')^{\gamma}\,dSdr. \tag{15}$$

Функция $\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}(e^{-ir\langle\sigma,\xi\rangle})$, зависящая от скалярного произведения $\langle\sigma,\xi\rangle$, — функция типа весовой плоской волны. Воспользовавшись формулой (13), вычислим внутренний интеграл по сфере

$$\int\limits_{S_N^+}\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}(e^{-ir\langle\sigma,\xi\rangle})(\sigma')^{\gamma}\,dS=$$

$$=C(\gamma)|S_{N+n-1}|_{|\gamma|-1}\int\limits_{-1}^{1}e^{-ir|\xi|p}(1-p^2)^{\frac{N+|\gamma|-3}{2}}dp=$$

$$=C(\gamma)|S_{N+n-1}|_{|\gamma|-1}2^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\sqrt{\pi}(|\xi|r)^{\frac{-N-|\gamma|+2}{2}}\times$$

$$\times J_{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}(|\xi|r)\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|-1}{2}\right).$$

Значение константы $C(\gamma)|S_{N+n-1}|_{|\gamma|-1}$ равно

$$C(\gamma)|S_{N+n-1}|_{|\gamma|-1}=\frac{\Gamma^{N-n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|-1}{2}\right)},$$

следовательно

$$\int\limits_{S_N^+}\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}(e^{-ir\langle\sigma,\xi\rangle})(\sigma')^{\gamma}\,dS=$$

$$=2^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)J_{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}(|\xi|r)(|\xi|r)^{\frac{-N-|\gamma|+2}{2}}.$$

Подставив вычисленное значение интеграла по сфере в (15), получим доказываемое равенство (14). Доказательство закончено.

Функция r^λ как элемент пространства Ψ' порождает регулярный функционал

$$(r^\lambda,\psi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}r^\lambda\psi(x)(x')dx,\ \forall\lambda\in\mathcal{C},$$

так как $(D^j\psi)(0)=0,|j|=0,1,2,\ldots$. Но как элемент пространства S' или Φ' -- это не регулярный функционал при $\operatorname{Re}\lambda\le-(N+|\gamma|)$, для таких λ он будет пониматься в смысле регуляризации, получаемой аналитическим продолжением функционала $(r^\lambda,\psi)_\gamma$ из полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>-(N+|\gamma|)$.

Преобразование Фурье—Бесселя обобщенной функции $f\in\Phi'$ называется функционал F_Bf, действующий по правилу

$$(F_Bf,\psi)_\gamma=(f,F_B\psi)_\gamma,\ \psi\in\Psi.$$

Если $g\in\Psi'$, то равенство

$$(F_Bg,\varphi)_\gamma=(g,F_B\varphi)_\gamma,\ \varphi\in\Phi \tag{16}$$

является определением преобразования Фурье-Бесселя функционала $g\in\Psi'$. Вычислим $F_B[r^\lambda]$ в смысле обобщенных функций.

Теорема 2. *Преобразование Фурье—Бесселя функции r^λ, понимаемое в смысле (16), вычисляется по формуле*

$$F_B[r^\lambda]=\mathcal{D}_{N,n,\gamma}(\lambda)\begin{cases}|\xi|^{-N-|\gamma|-\lambda},\lambda\ne2k,\lambda\ne-(N+|\gamma|+2k);\\ |\xi|^{-N-|\gamma|-\lambda}\ln|\xi|,\lambda=-(N+|\gamma|+2k);\\ \left(-\Delta_{B_\xi}^{\lambda/2}\varphi\right)\delta_\gamma,\lambda=2k,\end{cases} \tag{17}$$

где $\delta_\gamma=\delta_\gamma(\xi)$ — весовая дельта-функция, $k=0,1,2,\ldots$ и множитель $\mathcal{D}_{N,n,\gamma}(\lambda)$ равен:

$$\mathcal{D}_{N,n,\gamma}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+\lambda}{2}\right)}{2^{-N-|\gamma|-\lambda+1}\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}, & \\ \qquad\lambda\ne2k,\lambda\ne-(N+|\gamma|+2k); & \\ \dfrac{(-1)^{\frac{N+|\gamma|+\lambda}{2}}2^{N+|\gamma|+\lambda}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{-N+n}{2}}\left[-\frac{N+|\gamma|-\lambda}{2}\right]!\,\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}, & \\ \qquad\lambda=-(N+|\gamma|+2k); & \\ 1,\qquad\lambda=2k. & \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{\operatorname{Re}\lambda>-(N+|\gamma|)\}$, тогда r^λ — локально-суммируемая функция. Положим $-(N+|\gamma|)<\operatorname{Re}\lambda<-(N+|\gamma|)/2$, в этом случае справедлива формула (14)

$$F_B[r^\lambda](\xi) =$$

$$= \frac{2^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\pi^{\frac{N-n}{2}}}{|\xi|^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\int_0^\infty r^{\frac{N+|\gamma|}{2}+\lambda}J_{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}(|\xi|r)dr.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся следующей формулой для интеграла Вебера

$$\int_0^\infty r^\beta J_\nu(|\xi|r)dr = \frac{2^\beta\Gamma\left(\frac{\nu+\beta+1}{2}\right)}{|\xi|^{\beta+1}\Gamma\left(\frac{\nu-\beta+1}{2}\right)},$$

получим

$$\int_0^\infty r^{\frac{N+|\gamma|}{2}+\lambda}J_{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}(|\xi|r)dr = \frac{2^{\frac{N+|\gamma|}{2}+\lambda}\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+\lambda}{2}\right)}{|\xi|^{\frac{N+|\gamma|}{2}+\lambda+1}\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}.$$

Тогда преобразование Фурье—Бесселя $(F_B[r^\lambda](\xi),\varphi)_\gamma$ в соответствии с (16) будет равно

$$\mathcal{G}_{N,n,\gamma}(\lambda)\left(\frac{1}{|\xi|^{N+|\gamma|+\lambda}},\varphi\right)_\gamma = (r^\lambda, F_B\varphi)_\gamma, \qquad (18)$$

где

$$\mathcal{G}_{N,n,\gamma}(\lambda) = \frac{2^{N+|\gamma|+\lambda-1}\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)},$$

при

$$\lambda \neq 2k, \lambda \neq -(N+|\gamma|+2k), k = 0,1,2,\ldots.$$

Правая часть равенства (18) определена и аналитична при всех $\lambda \in \mathcal{C}$, так как $F_B\varphi \in \Psi$. Левая часть аналитична при всех $\lambda \in \mathcal{C}$, кроме точек $\lambda = 2k$ и $\lambda = -(N+|\gamma|+2k)$, $k = 0,1,2,\ldots$.

В случае $\lambda = 2k$ преобразование Фурье—Бесселя функции r^λ будет иметь вид:

$$(F_B[r^{2k}],\varphi)_\gamma = (r^{2k}, F_B[\varphi](x))_\gamma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_N^+}|x|^{2k}F_B[\varphi(\xi)](x)(x')^\gamma dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_N^+}|x|^{2k}\int_{\mathbb{R}_N^+}\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')\cdot e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}\varphi(\xi)(\xi')^\gamma d\xi(x')^\gamma dx.$$

Заметим, что

$$|x|^{2k}\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')\cdot e^{-i\langle x'',\xi''\rangle} = -\Delta_{B_\xi}^k\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')\cdot e^{-i\langle x'',''\xi\rangle},$$

тогда имеем

$$(F_B[r^{2k}],\varphi)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_N^+}\int_{\mathbb{R}_N^+}(-\Delta_{B_\xi}^k j_\gamma(x',\xi')\times$$

$$\times e^{-i\langle x'',\xi''\rangle})\varphi(\xi)(\xi')^\gamma d\xi(x')^\gamma dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_N^+}\int_{\mathbb{R}_N^+}j_\gamma(x',\xi')\cdot e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}\left(-\Delta_{B_\xi}^k\varphi(\xi)\right)(\xi')^\gamma d\xi(x')^\gamma dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_N^+}F_B[1](\xi)\left(-\Delta_{B_\xi}^k\varphi(\xi)\right)(\xi')^\gamma d\xi = \left(\delta_\gamma,\left(-\Delta_{B_\xi}^k\varphi\right)\right)_\gamma.$$

Рассмотрим случай $\lambda = \lambda_k = -(N+|\gamma|+2k)$. Запишем равенство (18) для λ в окрестности точек λ_k следующим образом:

$$(\lambda-\lambda_k)(r^\lambda, F_B\varphi)_\gamma = \mathfrak{a}(\lambda)\left(\frac{1}{|\xi|^{N+|\gamma|+\lambda}},\varphi\right)_\gamma,$$

где $\mathfrak{a}(\lambda) = (\lambda-\lambda_k)\mathcal{G}_{N,n,\gamma}(\lambda)$. Дифференцируя это равенство по λ, получаем

$$\frac{d}{d\lambda}((\lambda-\lambda_k)r^\lambda, F_B\varphi)_\gamma =$$

$$= \left(\frac{\mathfrak{a}'(\lambda)+\mathfrak{a}(\lambda)\ln|\xi|}{|\xi|^{N+|\gamma|+\lambda}},\varphi\right)_\gamma, \qquad (19)$$

где $\frac{d}{d\lambda}((\lambda-\lambda_k)r^\lambda, F_B\varphi)_\gamma = (r^\lambda, F_B\varphi)_\gamma +$

$$+(\lambda-\lambda_k)\frac{d}{d\lambda}(r^\lambda, F_B\varphi)_\gamma \to (r^{\lambda_k}, F_B\varphi)_\gamma, \qquad \lambda\to\lambda_k.$$

Тогда из (18), при $\lambda\to\lambda_k$, следует

$$(r^{\lambda_k}, F_B\varphi)_\gamma = \mathfrak{a}(\lambda_k)\left(\frac{\ln|\xi|}{|\xi|^{N+|\gamma|+\lambda_k}},\varphi\right)_\gamma,$$

поскольку в пространстве Лизоркина $\left(|\xi|^{-N-|\gamma|-\lambda_k},\varphi\right)_\gamma = 0$.

Вычислим константу $\mathfrak{a}(\lambda_k)$, $\lambda_k = -(N+|\gamma|+2k)$:

$$\mathfrak{a}(\lambda_k) = \lim_{\lambda\to\lambda_k}\mathfrak{a}(\lambda) =$$

$$= \pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!\,\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+2k}{2}\right)},$$

а так как $\lambda = \lambda_k = -(N+|\gamma|+2k)$, то $k = -\frac{N+|\gamma|+\lambda}{2}$ и мы получаем окончательный вид константы

$$\mathfrak{a}(\lambda_k) = \pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\frac{(-1)^{\frac{N+|\gamma|+\lambda}{2}}2^{N+|\gamma|+\lambda}}{\left[-\frac{N+|\gamma|+\lambda}{2}\right]!\,\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}.$$

Доказательство закончено.

Отметим, что в случае $n = N$ формула (17) получена в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лизоркин П. И.* Обобщенное Лиувиллевское дифференцирование и функциональное пространство $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения. Мат. сб. 1963, Т. 60, № 3, С. 325—353.

2. *Ляхов Л. Н.* Пространства B-потенциалов Рисса. ДАН. 1994. Т. 334, С. 278—280.

3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Изд-во физмат. лит-ры, 1958. — 440 с.

4. *Курант Р., Гильберт Д.* Уравнения математической физики. — М.: ГТТИ, 1951. — 674 с.

5. *Pizetti P.* Sulla media dei valari che una fanzione del punti dello spazio assume alla superficie di una sfere, Rendiconti Lincei (5), 1909, V. 18, P. 309—316.

6. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1996. — 202 с.