УДК 517.9

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ И ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПАКТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЯХ*

В. В. Хатько

Воронежский государственный университет

Ведется построение классов линейных отношений, названных относительно ограниченными и относительно компактными, близких по своим спектральным свойствам к ограниченным и компактным линейным операторам. Изучается спектральная теория для данных классов линейных отношений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена спектральной теории некоторых классов линейных отношений (многозначных линейных операторов), которые содержат классы ограниченных и компактных операторов. Теория линейных отношений является, в некотором смысле, обобщением теории операторов. Поэтому метод обобщения фактов из теории линейных операторов на теорию линейных отношений часто используется для развития теории линейных отношений. В частности, обобщение классов ограниченных и компактных операторов на линейные отношения имеется в монографии Р. Кросса [2]. Однако, выделенные им классы линейных отношений не адаптированы к построению их спектральной теории. Цель данной работы — выделение и изучение классов линейных отношений, которые близки к ограниченным и компактным линейным операторам именно по своим спектральным свойствам. В монографии [2] почти все определения даны для линейных отношений между двумя банаховыми пространствами. В данной работе, в связи с потребностями спектральной теории, рассматриваются линейные отношения на одном банаховом пространстве.

Приведем некоторые используемые ниже понятия из теории линейных отношений.

Пусть X и Y — комплексные банаховы пространства. Любое линейное подпространство $\mathcal{A} \subset X \times Y$ называется *линейным отношением* между банаховыми пространствами X и Y. Если оно замкнуто в $X \times Y$, то линейное отношение называется *замкнутым*.

Подпространство $D(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid$ существует $y \in Y$ такой, что $(x,y) \in \mathcal{A}\}$ называется *областью определения* линейного отношения $\mathcal{A} \subset X \times Y$. *Ядро* отношения есть $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}) \mid (x,0) \in \mathcal{A}\}$.

Через $\mathcal{A}x$, $x \in D(\mathcal{A})$, обозначим множество $\{y \in Y \mid (x,y) \in \mathcal{A}\}$. Отметим, что для всех $x \in D(\mathcal{A})$ множество $\mathcal{A}x$ представимо в виде $\mathcal{A}x = y + \mathcal{A}0$ для любого вектора y из $\mathcal{A}x$.

Область значений $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{y \in Y \mid \exists x \in D(\mathcal{A}), (x,y) \in \mathcal{A}\} = \bigcup\limits_{x \in D(\mathcal{A})} \mathcal{A}x$.

Суммой двух линейных отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset X \times Y$ называется линейное отношение из $X \times Y$ вида $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}),\ y \in \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\}$. $D(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$. Под $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ понимается алгебраическая сумма двух множеств $\mathcal{A}x$ и $\mathcal{B}x$.

Произведением двух линейных отношений $\mathcal{A} \subset X \times Y$ и $\mathcal{B} \subset Y \times Z$, называется линейное подпространство из $X \times Z$ вида $\mathcal{B}\mathcal{A} = \{(x,z) \in X \times Z \mid$ существует вектор y из $D(\mathcal{B})$ такой, что $(x,y) \in \mathcal{A}, (y,z) \in \mathcal{B}\}$.

Обратным к линейному отношению $\mathcal{A} \subset X \times Y$ называется линейное отношение $\mathcal{A}^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in \mathcal{A}\} \subset Y \times X$.

Каждое линейное отношение $\mathcal{A} \subset X \times Y$ является графиком многозначного отображения $\widetilde{\mathcal{A}} : D(\mathcal{A}) \subset X \to 2^Y$, где $\widetilde{\mathcal{A}}x = \mathcal{A}x \in 2^Y$. В дальнейшем они отождествляются.

Множество замкнутых линейных отношений из X в Y обозначим $LR(X,Y)$. Если $X = Y$, то положим $LR(X) = LR(X,X)$. Множество линейных замкнутых операторов $LO(X,Y)$ считается включенным (при отождествлении их с графиком) в $LR(X,Y)$. Если $X = Y$, то $LO(X) = LO(X,X)$ и $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Итак, $\operatorname{End} X \subset LO(X) \subset LR(X)$.

Отношение $\mathcal{A} \in LR(X,Y)$ называется *инъективным*, если $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$, и *сюръективным*, если $\operatorname{Im} \mathcal{A} = Y$.

© Хатько В. В., 2006

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 04-01-00141.

Заметим, что для любых векторов $x, y \in D(\mathcal{A})$ возможны только два случая :

1) $\mathcal{A}x = \mathcal{A}y$;
2) $\mathcal{A}x \cap \mathcal{A}y = \varnothing$.

Из условия $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$ следует, что $\mathcal{A}x \cap \mathcal{A}y = \varnothing$ для всех $x \neq y$ из $D(\mathcal{A})$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Определение 2.1. *Резольвентным множеством* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \operatorname{End} X$.

Определение 2.2. Отображение

$$R(\,\cdot\,, \mathcal{A}) : \rho(\mathcal{A}) \to \operatorname{End} X,$$

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1},\ \lambda \in \rho(\mathcal{A})$$

называется *резольвентой* отношения $\mathcal{A}$.

Определение 2.3. *Спектром* линейного отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* линейного отношения $\mathcal{A}$, если $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I) \neq \{0\}$. Любой ненулевой вектор x из $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I)$ называется собственным вектором отношения $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ.

Определение 2.4. *Расширенным спектром* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется подмножество $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ из расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(\mathcal{A})$, если $\mathcal{A} \in \operatorname{End} X$. В противном случае полагается $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \cup \{\infty\}$. Множество $\tilde{\rho}(\mathcal{A}) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ называют *расширенным резольвентным множеством* линейного отношения $\mathcal{A}$.

Определение 2.5. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$. Замкнутое линейное подпространство $X_0 \subset X$ назовем *инвариантным* относительно отношения $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x \cap X_0 \neq \varnothing$ для любого $x \in X_0 \cap D(\mathcal{A})$. Отношение $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap (X_0 \times X_0)$ назовем *сужением* (или *частью*) отношения $\mathcal{A}$ на инвариантное подпространство X_0.

Если линейное отношение является линейным оператором, то приведенное определение является общепринятым определением инвариантного подпространства (см., например [6]). Сужение отношения $\mathcal{A}$ на инвариантное подпространство X_0 обозначим символом $\mathcal{A} \mid X_0$.

Определение 2.6. Пусть X_0, X_1 — инвариантные для отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ подпространства из X, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \mid X_0, \mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \mid X_1$ — сужения отношения $\mathcal{A}$ на подпространства X_0, X_1 соответственно и выполнены следующие условия:

$$1) X = X_0 \oplus X_1, \quad 2) \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1.$$

Второе условие означает, что подпространство $\mathcal{A}$ раскладывается в прямую сумму своих подпространств $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$. В этом случае будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ является *прямой суммой отношений* $\mathcal{A}_0$ *и* $\mathcal{A}_1$ и записывать $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$. При этом имеют место следующие разложения

$$D(\mathcal{A}) = (D(\mathcal{A}) \cap X_0) \oplus (D(\mathcal{A}) \cap X_1),$$
$$\mathcal{A}0 = (\mathcal{A}0 \cap X_0) \oplus (\mathcal{A}0 \cap X_1),$$

а множество $\mathcal{A}x$ для любого $x \in D(\mathcal{A})$ определяется формулой

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}_0 x_0 + \mathcal{A}_1 x_1,\ x = x_0 + x_1,$$

где $x_0 \in D(\mathcal{A}_0)$, $x_1 \in D(\mathcal{A}_1)$ и $\mathcal{A}x$ — алгебраическая сумма двух множеств $\mathcal{A}_0 x_0$ и $\mathcal{A}_1 x_1$.

Замечание 2.1. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$, X_0, X_1 — замкнутые подпространства из X, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \mid X_0, \mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \mid X_1$ — сужения отношения $\mathcal{A}$ на подпространства X_0, X_1 и имеют место разложения: $X = X_0 \oplus X_1, \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$. Тогда X_0, X_1 — инвариантные подпространства относительно отношений $\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1}$ и для $\mathcal{A}^{-1}$ выполнено

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}_0^{-1} \oplus \mathcal{A}_1^{-1}.$$

Следующие результаты и их доказательства можно найти в статье [1].

Теорема 2.1. *Для линейного отношения* $\mathcal{A} \in LR(X)$ *справедливо равенство* $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \left\{ \dfrac{1}{\lambda} : \lambda \in \tilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1}) \right\}$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathcal{A} \in LR(X)$ *и его расширенный спектр* $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ *представим в виде*

$$\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma_0 \cup \sigma_1,$$

где σ_0 *— компакт из* $\mathbb{C}$, σ_1 *— замкнутое множество из* $\tilde{\mathbb{C}}$ *и* $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$. *Тогда существуют разложения*

$$X = X_0 \oplus X_1, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1,$$

в которых инвариантные относительно $\mathcal{A}$ *замкнутые подпространства* X_0, X_1 *и его сужения* $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \mid X_0, \mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \mid X_1$ *обладают следующими свойствами:*

1) $\mathcal{A}_0 \in \operatorname{End} X_0, \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_0) = \sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma_0$;
2) $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_1) = \sigma_1$.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФАКТОР-ОТНОШЕНИЙ

В этом пункте вводится определение фактор-отношения, обобщающее понятие фактор-оператора, и рассматриваются некоторые его свойства. В дальнейшем понятие фактор-отношения используется для выделения классов относительно ограниченных и относительно компактных линейных отношений.

Определение 3.1. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$, $M \subset X$ — замкнутое инвариантное подпространство относительно $\mathcal{A}$ и X/M — фактор-пространство. Тогда линейное отношение $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} / M \in LR(X / M)$, определенное следующими равенствами

$$D(\tilde{\mathcal{A}}) = \{\tilde{x} \in X / M : \tilde{x} \cap D(\mathcal{A}) \neq \varnothing\},$$

$$\tilde{\mathcal{A}}\tilde{x} = \widetilde{\mathcal{A}x_1},$$

где $x_1 \in \tilde{x} \cap D(\mathcal{A})$, *будем называть фактор-отношением.*

Для доказазательства корректности определения 3.1 приведем ряд лемм.

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathcal{A} \in LR(X)$ *и* $M \subset X$ *— инвариантное подпространство относительно* $\mathcal{A}$. *Тогда для любых* $x_1, x_2 \in (x + M) \cap D(\mathcal{A})$, *где* x *— произвольный элемент из* X, *верно равенство*

$$\widetilde{\mathcal{A}x_1} = \widetilde{\mathcal{A}x_2}.$$

◄ Из определения линейного отношения следует, что

$$\mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}(x_1 - x_2) = y + \mathcal{A}0.$$

Поскольку $x_1, x_2 \in x + M$, то $x_1 - x_2 \in M$, а так как M — инвариантное подпространство относительно $\mathcal{A}$, в выше приведенном неравенстве можно взять $y \in M$. Пусть $y_1 \in \mathcal{A}x_1$ и $y_2 \in \mathcal{A}x_2$, тогда получаем

$$\mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 + M = \mathcal{A}0 + M,$$
$$y_1 - y_2 + \mathcal{A}0 + M = \mathcal{A}0 + M,$$
$$y_1 + \mathcal{A}0 + M = y_2 + \mathcal{A}0 + M,$$
$$\mathcal{A}x_1 + M = \mathcal{A}x_2 + M. ►$$

Лемма 3.2. *Пусть* X *— линейное пространство и* $\mathcal{A} \subset X \times X$ *— бинарное отношение на нем. Отношение* $\mathcal{A}$ *является линейным тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:*

1) $D(\mathcal{A})$ *— линейное пространство;*

2) $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2$ *для любых* $x_1, x_2 \in D(\mathcal{A})$;

3) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha\mathcal{A}x$ *для любых* $x \in D(\mathcal{A})$ *и* $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$.

Перейдем к доказательству корректности определения фактор-отношения.

Теорема 3.1. *Определение 3.1 корректно.*

◄ Из леммы 3.1 следует, что $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}$ определено корректно.

Докажем, что $\tilde{\mathcal{A}}$ является линейным отношением. Для этого воспользуемся леммой 3.2 и покажем, что выполнены все три ее условия:

1). Пусть $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in D(\tilde{\mathcal{A}})$. Тогда $\tilde{x}_1 = x_1 + M$, $\tilde{x}_2 = x_2 + M$, где $x_1, x_2 \in D(\mathcal{A}) \cap M$, и $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = x_1 + x_2 + M$. Так как $x_1 + x_2 \in D(\mathcal{A})$, то $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \in D(\tilde{\mathcal{A}})$. Аналогичным образом доказывается, что если $\tilde{x} \in D(\tilde{\mathcal{A}})$, то для любого $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha\tilde{x} \in D(\tilde{\mathcal{A}})$. Следовательно, $D(\tilde{\mathcal{A}})$ — линейное пространство.

2). Пусть $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in D(\tilde{\mathcal{A}})$. Тогда $\tilde{x}_1 = x_1 + M$, $\tilde{x}_2 = x_2 + M$, где $x_1, x_2 \in D(\mathcal{A}) \cap M$, и $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = x_1 + x_2 + M$. Получаем

$$\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) = \mathcal{A}(x_1 + x_2) + M =$$

$$= \mathcal{A}x_1 + M + \mathcal{A}x_2 + M = \tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}_1 + \tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}_2.$$

3). Доказывается аналогично 2). ►

Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$, M — инвариантное подпространство относительно $\mathcal{A}$, $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/M$. Тогда условимся далее в этом пункте если $\tilde{x} \in D(\tilde{\mathcal{A}})$, то в записи $\tilde{x} = x + M$ считать x элементом $D(\mathcal{A})$.

В следующей теореме приводится важное свойство фактор-отношений (аналог подобного свойства для фактор-операторов), которое позволяет оценить спектр отношения через спектры фактор-отношения и сужения отношения на некоторое инвариантное подпространство.

Теорема 3.2. *Пусть* $\mathcal{A} \in LR(X)$, M *— замкнутое инвариантное подпространство относительно* $\mathcal{A}$, $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} / M, \mathcal{A}_M = \mathcal{A} \mid M$. *Тогда любые два из следующих утверждений влекут третье:*

1) $\mathcal{A}$ *— непрерывно обратимо;*

2) $\tilde{\mathcal{A}}$ *— непрерывно обратимо;*

3) $\mathcal{A}_M$ *— непрерывно обратимо.*

◄ $2), 3) \Rightarrow 1)$. Сюръективность. Пусть $\tilde{y} \in \operatorname{Im}\tilde{\mathcal{A}}$, следовательно, существует такой $\tilde{x} = x + M \in D(\tilde{\mathcal{A}})$, что $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}$. Представим $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}$ в виде

$$\tilde{\mathcal{A}}\tilde{x} = \tilde{\mathcal{A}}(x + M) = \mathcal{A}x + M.$$

Очевидно, что $\mathcal{A}x \subset \operatorname{Im}\mathcal{A}$, а так как $\mathcal{A}_M$ — сюръективно, то и $M \subset \operatorname{Im}\mathcal{A}$. Следовательно, для любого $\tilde{y} \in \operatorname{Im}\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{y} = y + M \subset \operatorname{Im}\mathcal{A}$, где $\tilde{\mathcal{A}}$ — сюръективно. Отсюда сразу вытекает, что $\operatorname{Im}\mathcal{A} = X$.

Инъективность. Пусть $x \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}x = \mathcal{A}0$. Тогда $\tilde{\mathcal{A}}(x + M) = \mathcal{A}0 + M$. Из инъективности $\tilde{\mathcal{A}}$ следует, что $x \in M \cap \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. В свою очередь из инъективности $\mathcal{A}_M$ следует, что $x = 0$.

$1),2) \Rightarrow 3)$. Сюръективность. Предположим противное, что существует $y \in M$, такой, что для любого $x \in D(\mathcal{A}_M), y \notin \mathcal{A}_M x$. Тогда из сюръективности $\mathcal{A}$ следует существование такого $x' \in D(\mathcal{A}) \setminus M$, что $y \in \mathcal{A}x' \cap M$. Отсюда вытекает, что $\tilde{\mathcal{A}}(x' + M) = \mathcal{A}0 + M$, а так как $\tilde{\mathcal{A}}$ — инъективно, то $x' \in M$. Получили противоречие.

Инъективность $\mathcal{A}_M$ сразу следует из инъективности $\mathcal{A}$.

$1),3) \Rightarrow 2)$. Сюръективность $\tilde{\mathcal{A}}$ сразу следует из сюръективности $\mathcal{A}$.

Инъективность. Пусть $\tilde{x} \in Ker\tilde{\mathcal{A}}$, т.е. $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{x} = \tilde{\mathcal{A}}(x + M) = \mathcal{A}0 + M$, следовательно, $\mathcal{A}x = \mathcal{A}0$ или $\mathcal{A}x \subset M$. В первом случае из инъективности $\mathcal{A}$ следует, что $x = 0$, во втором случае из сюръективности $\mathcal{A}_M$ и из инъективности $\mathcal{A}$ следует, что $x \in M$. Отсюда вытекает, что $\tilde{x} = x + M = M = \tilde{0}$. ►

Следствие 3.1. *Справедливо следующее включение* $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \cup \sigma(\mathcal{A}_M)$.

◄ Справедливость данного утверждения вытекает из следующих очевидных равенств

$$(\mathcal{A} - \lambda I) / M = \mathcal{A} / M - \lambda I / M,$$

$$(\mathcal{A} - \lambda I) \mid M = \mathcal{A} \mid M - \lambda I \mid M,$$

при которых имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

$\lambda \in \rho(\tilde{\mathcal{A}}) \cap \rho(\mathcal{A}_M)$, следовательно $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$;

$\lambda \notin \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \cup \sigma(\mathcal{A}_M)$, следовательно $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A})$;

$\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, следовательно $\lambda \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \cup \sigma(\mathcal{A}_M)$. ►

Приведем еще один результат для фактор-отношений, который понадобится в дальнейшем.

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathcal{A} \in LR(X)$, $X = X_0 \oplus X_1$ *— прямая сумма инвариантных относительно* $\mathcal{A}$ *подпространств. Тогда имеет место следующее равенство*

$$(\mathcal{A} / X_0)^{-1} = \mathcal{A}^{-1} / X_0.$$

◄ Сначала заметим, что по замечанию 2.1 подпространство X_0 является также инвариантным относительно отношения $\mathcal{A}^{-1}$.

Теперь докажем равенство областей определений.

Пусть $\tilde{x} \in D((\mathcal{A}/X_0)^{-1})$, тогда $\tilde{x} \in \mathrm{Im}(\mathcal{A} / X_0)$, то есть $\tilde{x} \cap \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \neq \varnothing$. Следовательно, $\tilde{x} \cap \cap D(\mathcal{A}^{-1}) \neq \varnothing$. По определению, $\tilde{x} \in D(\mathcal{A}^{-1}/X_0)$.

Пусть теперь $\tilde{x} \in D(\mathcal{A}^{-1}/X_0)$, тогда $\tilde{x} \cap D(\mathcal{A}^{-1}) \neq \varnothing$, то есть $\tilde{x} \cap \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \neq \varnothing$. Следовательно, $\tilde{x} \in \mathrm{Im}(\mathcal{A} / X_0)$. По определению, $\tilde{x} \in D((\mathcal{A}/X_0)^{-1})$.

Получаем, $D((\mathcal{A}/X_0)^{-1}) = D(\mathcal{A}^{-1}/X_0)$.

Теперь докажем, что для любого $\tilde{x} \in D((\mathcal{A}/X_0)^{-1}) = D(\mathcal{A}^{-1}/X_0)$ выполнено $(\mathcal{A}/X_0)^{-1}\tilde{x} = (\mathcal{A}^{-1}/X_0)\tilde{x}$.

$(\mathcal{A} / X_0)^{-1}\tilde{x} = \{\tilde{y} \in D(\mathcal{A} / X_0) : \tilde{x} \in (\mathcal{A} / X_0)\tilde{y}\}$, то есть такие $\tilde{y}$, что для $y \in \tilde{y} \cap D(\mathcal{A})$ выполнено $\mathcal{A}y \cap \tilde{x} \neq \varnothing$.

$(\mathcal{A}^{-1} / X_0)\tilde{x} = \{\mathcal{A}^{-1}x + X, x \in \tilde{x} \cap D(\mathcal{A}^{-1})\}$, то есть такие $\tilde{y}$, что для $y \in \tilde{y} \cap \mathrm{Im}\,\mathcal{A}^{-1}$ выполнено $\mathcal{A}y \cap \tilde{x} \neq \varnothing$.

Получаем, что $(\mathcal{A}/X_0)^{-1}\tilde{x} = (\mathcal{A}^{-1}/X_0)\tilde{x}$ для любого $\tilde{x}$ из $D((\mathcal{A}/X_0)^{-1}) = D(\mathcal{A}^{-1}/X_0)$. ►

4. ОТНОСИТЕЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПАКТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Определение ограниченного линейного отношения в монографии [2] дается через введение понятия нормы линейного отношения. Впервые понятие нормы линейного отношения приводится в работе С. Ли и М. Нэшеда.

Определение 4.1. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X, Y)$. Определим для $\mathcal{A}$ следующий линейный оператор:

$$\hat{\mathcal{A}} : X \to Y / \mathcal{A}0,$$

$$\hat{\mathcal{A}}x = y + \mathcal{A}0 = \hat{y},\ x \in X, y \in \mathcal{A}x$$

Тогда *норма* линейного отношения определяется следующим равенством $\|\mathcal{A}\| = \|\hat{\mathcal{A}}\|$. Если область определения линейного отношения $D(\mathcal{A}) = X$ и $\|\mathcal{A}\| < \infty$ (то есть, $\hat{\mathcal{A}}$ — ограниченный линейный оператор), тогда $\mathcal{A}$ называется *ограниченным* линейным отношением. Отношение $\mathcal{A}$ называется *компактным*, если определенный для него оператор $\hat{\mathcal{A}}$ является компактным оператором (в обычном смысле, см. например [7]).

Замечание 4.1. Если $X = Y$ — конечномерное пространство, то любое линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$ с областью определения $D(\mathcal{A}) = X$ является и ограниченным, и компактным. Однако, спектр $\sigma(\mathcal{A})$ таких отношений из $LR(X) \setminus LO(X)$ заполняет всю комплексную плоскость ($\rho(\mathcal{A}) = \varnothing$). В связи с этим, определение 4.1 точки зрения спектральной теории линейных отношений вряд ли можно считать удовлетворительным.

Данная работа основывается на следующей точке зрения — ограниченное (компактное) линейное отношение по определению должно быть ограниченным (компактным) линейным оператором. Но можно выделить классы отношений, а именно, *относительно ограниченные* и *относительно компактные* линейные отношения, определения которых должны даваться таким образом, чтобы их спектральные свойства были близки к спектральным свойствам соответственно ограниченных и компактных линейных операторов. Говоря точнее, спектр относительно ограниченных и относительно компактных линейных отношений должен иметь вид: $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где $\sigma_1 = \{\infty\}$, а σ_2 — компактное подмножество из комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Заметим, что в этом случае для отношений, которые являются обратными к относительно ограниченным, спектр, по теореме 2.1, будет иметь вид $\sigma' = \{0\} \cup \sigma_2$. Следовательно, по теореме 2.2, должно существовать замкнутое инвариантное подпространство X_1, такое что $\mathcal{A} \mid X_1 = \mathcal{A}_1 \in \operatorname{End} X_1, \sigma(\mathcal{A}_1) = \{0\}$. Поэтому, для того, чтобы дать определение относительно ограниченного линейного отношения, нужно найти условия существования такого подпространства X_1.

Лемма 4.1. *Пусть* $\mathcal{A} \in LR(X)$, X_1 *— подпространство из* X, *определенное следующим равенством:*

$X_1 = \{x \in \bigcap_{n\geq 1} D(\mathcal{A}^n)$: *существует последовательность* $x_n \in \mathcal{A}x_{n-1}, x_0 = x$, *такая что* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} = 0\}$.

Пусть $X_1 = \overline{X_1} \neq \{0\}$, *а отношение* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет следующему условию: существует* $M > 0$, *такое что для любого собственного значения* λ, *такого что* $\lambda \neq 0$, *выполнено следующее неравенство* $|\lambda| > M$. *Тогда* X_1 *— инвариантное подпространство относительно отношения* $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \mid X_1 = \mathcal{A}_1 \in \operatorname{End} X_1$ *и* $\sigma(\mathcal{A}_1) = \{0\}$.

◀ То, что X_1 — инвариантное подпространство относительно отношения $\mathcal{A}$, следует из определения X_1.

Докажем, что $\mathcal{A}_1 \in \operatorname{End} X_1$. Для этого достаточно показать, что $\mathcal{A}0 \cap X_1 = \{0\}$. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$, такая что $x_n \in \mathcal{A}x_{n-1}, x_0 = x, \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} = 0$. Определим функцию $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to X$ следующим образом:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^{n+1}}.$$

Применим $(zI - \mathcal{A})$ к $f(z)$:

$$(zI - \mathcal{A})f(z) =$$

$$= (zI - \mathcal{A})\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^{n+1}} \ni \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{z^{n+1}} = x_0 = 0.$$

То есть, $0 \in (zI - \mathcal{A})f(z)$. Функция $f(z)$ аналитична на бесконечности и для некоторых n коэффициенты x_n отличны от нуля. Поэтому для любого шара $B(0,r), r > 0$ функция $f(z)$ обращается в ноль только в конечном числе точек из $B(0,r)$, иначе по теореме единственности $f(z) \equiv 0$, что невозможно при наличии коэффициентов $x_n \neq 0$. Получаем противоречие тому, что для любого собственного значения λ, такого что $\lambda \neq 0$, выполнено неравенство $|\lambda| > M$. Следовательно, $\mathcal{A}_1 \in \operatorname{End} X_1$.

Докажем, что $\sigma(\mathcal{A}_1) = \{0\}$. Из условия леммы и из доказанного выше следует, что для $\mathcal{A}_1$ выполнено следующее условие:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\mathcal{A}_1^n x\|} = 0,$$

для любого $x \in X_1$. Из этого условия следует, что уравнение

$$(\mathcal{A}_1 - zI)f(z) = x, \text{ для любого } x \in X_1,$$

имеет решение при $|z| > 0$. Следовательно, $(\mathcal{A}_1 - zI)$ — сюръективно для $|z| > 0$. Предположим, что существует $z_0 \neq 0, z_0 \in \sigma(\mathcal{A}_1)$. Так как для любого $z \neq 0, (\mathcal{A}_1 - zI)$ — сюръективный оператор, то $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}_1 - z_0 I) \neq \{0\}$. То есть, существует $x_0 \in X_1$, такой что $\mathcal{A}_1 x_0 = z_0 x_0$. Тогда получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\mathcal{A}_1^n x_0\|} = \lim_{n\to\infty} |z_0| \sqrt[n]{\|x_0\|} \neq 0.$$

Получили противоречие. Следовательно, $\sigma(\mathcal{A}_1) = \{0\}$. ▶

Определение 4.2. (Сильно-сингулярного линейного отношения). Линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ будем называть *сильно-сингулярным*, если для любого $M > 0$ найдется $\lambda \in \sigma_d(\mathcal{A})$ такое, что $|\lambda| > M$.

Определение 4.3. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$ и выполнены следующие условия:

1) Отношение $\mathcal{A}$ не является сильно-сингулярным.

2) X_∞ — подпространство, определенное равенством:

$X_\infty = \{x \in \bigcup\limits_{n\geq 1} \operatorname{Im} \mathcal{A}^n$: существует последовательность $x_n \in \mathcal{A}^{-1}x_{n-1}, x_0 = x$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} = 0\}$, удовлетворяет следующим соотношениям $X_\infty = \overline{X}_\infty \neq \{0\}$.

3) $\mathcal{A} / X_\infty = \tilde{\mathcal{A}}_\infty \in \operatorname{End} X / X_\infty$.

Тогда $\mathcal{A}$ называется *относительно ограниченным* линейным отношением. Если $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$ — компактный оператор, то $\mathcal{A}$ называется *относительно компактным* линейным отношением.

Условимся множество всех относительно ограниченных линейных отношений на банаховом пространстве X обозначать $LRB(X)$, а множество всех относительно компактных $LRC(X)$.

В дальнейшем под символом X_∞ будет пониматься только пространство, описанное в определении 4.3.

Две следующие достаточно тривиальные леммы приводятся без доказательств.

Лемма 4.3. *Пусть X — линейное пространство, D и M — некоторые подпространства из X и $\tilde{X} = X / M$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1) $X = M \oplus D$;

2) D и $\tilde{X}$ изоморфны.

Лемма 4.4. *Пусть X — банахово пространство и $X = X_0 \oplus X_1$. X/X_0 — фактор-пространство с обычной нормой $\|\tilde{x}\|_1 = \inf\limits_{x\in\tilde{x}} \|x\|$. Введем на X/X_0 следующую норму:*

$$\|\tilde{x}\|_2 = \|x\|, \text{ где } x \in \tilde{x} \cap X_1.$$

Тогда нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны.

Теорема 4.1. *(О свойствах относительно ограниченных и относительно компактных линейных отношений). Пусть $\mathcal{A} \in LRB(X)$. Тогда расширенный спектр линейного отношения $\mathcal{A}$ представим в виде $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \{\infty\} \cup \sigma_0$, где σ_0 — компактное подмножество из $\mathbb{C}$, и существуют разложения $X = X_\infty \oplus X_0$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\infty \oplus \mathcal{A}_0$, в которых инвариантные относительно $\mathcal{A}$ замкнутые подпространства X_∞, X_0 и его сужения $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A} \mid X_\infty, \mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \mid X_0$ обладают следующими свойствами:*

1) $\sigma(\mathcal{A}_\infty) = \{\infty\}$, то есть $\mathcal{A}_\infty^{-1}$ — квазинильпотентный (в некоторых случаях — нильпотентный) оператор из $\operatorname{End} X_\infty$;

2) $\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma_0$;

3) $\mathcal{A}_0 \in \operatorname{End} X_0$, причем, если $\mathcal{A}$ — относительно компактное линейное отношение, то $\mathcal{A}_0$ — компактный оператор из $\operatorname{End} X_0$.

◄ Из метода построения подпространства X_∞ следует, что X_∞ — инвариантное подпространство относительно отношения $\mathcal{A}$, и что для $\mathcal{A}^{-1}$ выполнены условия леммы 4.1. Поэтому, для $\mathcal{A}_\infty$ получаем $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_\infty) = \{\infty\}$. Так как $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$ - ограниченный оператор из следствия 3.1. вытекает, что $\sigma(\mathcal{A})$ — компактное множество и $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \{\infty\} \cup \sigma_0$, где $\sigma_0 = \sigma(\mathcal{A})$. По теореме 2.2. получаем следующие разложение

$$X = X'_\infty \oplus X'_0, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}'_\infty \oplus \mathcal{A}'_0,$$

где X'_∞, X'_0 — инвариантные относительно $\mathcal{A}$ подпространства, такие что $\mathcal{A} \mid X'_0 = \mathcal{A}'_0 \in \operatorname{End} X'_0$, $\sigma(\mathcal{A}'_0) = \sigma_0, \sigma(\mathcal{A}'_\infty) = \{\infty\}, (\mathcal{A}'_\infty)^{-1}$ — квазинильпотентный оператор из $\operatorname{End} X_\infty$. Нужно доказать, что $X'_\infty = X_\infty$.

Докажем, что $X'_\infty \subset X_\infty$. Пусть $x \in X'_\infty$, тогда, так как $(\mathcal{A}'_\infty)^{-1}$ — квазинильпотентный оператор, выполнено следующее

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(\mathcal{A}'_\infty)^{-n} x\|} = 0.$$

Отсюда вытекает, что $x \in X_\infty$.

Докажем, что $X_\infty \subset X'_\infty$. Пусть $x \in X_\infty$, из разложения пространства X в прямую сумму получаем $x = x^\infty + x^0$, где $x^\infty \in X'_\infty, x^0 \in X'_0$. Так как $X'_\infty \subset X_\infty$, то $x^\infty \in X_\infty$. Отсюда вытекает, что и $x^0 \in X_\infty$. Поэтому существует последовательность $\{x_n\}$, такая что $x_n \in \mathcal{A}^{-n} x^0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} = 0.$$

Так как $(\mathcal{A}'_\infty)^{-1} 0 = \{0\}$, то $\mathcal{A}^{-1} 0 = (\mathcal{A}'_0)^{-1} 0$. Поэтому, из того, что $x^0 \in X_0$ и X_0 - инвариантное подпространство относительно $\mathcal{A}^{-1}$, получаем $(\mathcal{A}_{0'})^{-1} x^0 = \mathcal{A}^{-n} x^0$. А так как $\mathcal{A}_{0'} \in \operatorname{End} X_{0'}$, то $x^0 = (\mathcal{A}_{0'})^n x_n$ и $\|x^0\| \le \|\mathcal{A}'_0\|^n \|x_n\|$. Следовательно,

$$\sqrt[n]{\|x^0\|} \le \|\mathcal{A}'_0\| \sqrt[n]{\|x_n\|} \to 0 \text{ где } n \to \infty,$$

откуда вытекает, что $x^0 = 0$. Получаем $x = x^\infty \in X'_\infty$.

В том случае, когда $\mathcal{A}$ — относительно компактное линейное отношение, то из лемм 4.3 и 4.4 следует, что пространства X/X_∞ и X_0 изоморфны с эквивалентными нормами. Следовательно, если $\tilde{\mathcal{A}}$ — компактный оператор, то и $\mathcal{A}_0$ также является компактным оператором. ►

В дальнейшем, при рассмотрении некого $\mathcal{A} \in LRB(X)$ под $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_\infty$ будут пониматься операторы, построенные в теореме 4.1.

5. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОТНОСИТЕЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ И ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПАКТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Для более подробного описания спектра относительно ограниченных линейных отношений нам понадобится следующее определение.

Определение 5.1. Пусть $\mathcal{A} \in LRB(X)$. Зададим на множестве относительно ограниченных линейных отношений функционал r, определенный следующим равенством $r(\mathcal{A}) = \|\mathcal{A}_0\|$, который мы будем обозначать $\|\mathcal{A}\|_r$. Назовем его *относительной нормой* относительно ограниченного отношения $\mathcal{A}$.

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathcal{A} \in LRB(X)$ *и для некоторого* $\lambda \in \mathbb{C}$ *выполнено неравенство* $|\lambda| > \|\mathcal{A}\|_r$*, тогда* $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$

◄ Из теоремы 4.1 следует, что $\rho(\mathcal{A}) = \rho(\mathcal{A}_0)$. Поэтому достаточно показать, что $\lambda \in \rho(\mathcal{A}_0)$, как только $|\lambda| > \|\mathcal{A}_0\|$. Доказательство данного утверждения можно найти в [7, глава 4, § 5, теорема 7]. ►

Иначе говоря, спектр относительно ограниченных линейных отношений $\mathcal{A}$ содержится в круге радиуса $\|\mathcal{A}\|_r$ с центром в нуле.

Спектр относительно компактных линейных отношений допускает еще более полное описание.

Теорема 5.2. *Пусть* $\mathcal{A} \in LRC(X)$. *Тогда* $\mathcal{A}$ *обладает следующими свойствами:*

1) Если $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ *и* $\lambda \neq 0$, *то* λ *является собственным значением отношения* $\mathcal{A}$ *и* $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I) < \infty$;

2) Если $\dim X_0 = \infty$, *то* $0 \in \sigma(\mathcal{A})$;

3) Число собственных значений отношения $\mathcal{A}$, *для которых выполняется неравенство* $|\lambda| > \delta > 0$, *всегда конечно, т.е. множество* $\sigma(\mathcal{A})$ *не более чем счетно и не имеет предельных точек, кроме, быть может, точки* 0.

◄ По теореме 4.1 $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}_0)$. Из замечания 2.1 и теоремы 4.1 следует:

$$\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \operatorname{Ker} \mathcal{A}_0 \oplus \operatorname{Ker} \mathcal{A}_\infty = \operatorname{Ker} \mathcal{A}_0.$$

Поэтому утверждения теоремы достаточно доказать для спектра оператора $\mathcal{A}_0$. Из теоремы 4.1 следует, что $\mathcal{A}_0$ — компактный оператор. Доказательства выше перечисленных свойств для спектра компактного оператора можно найти в [8, часть 1, теоремы 4.18 и 4.25] и в [7, глава 4, § 6, теорема 4]. ►

Таким образом, по своим спектральным свойствам относительно ограниченные и относительно компактные линейные отношения очень близки соответственно к ограниченным и компактным линейным операторам.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов. // Матем. сб. 2002 Т. 193, № 11, С. 3—35.

2. *Cross R.* Multivalued linear operators. New York: M. Dekker, 1998.

3. *Neumann J. von.* Über adjungierte Functionaloperatoren // Ann. of Math. 1932. V. 33. № 2. S. 294—310.

4. *Загорский А.С., Хатько В.В.* О некоторых свойствах линейных отношений на конечномерных линейных пространствах // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. № 2. С. 59—62.

5. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во Воронежского университета, 1987.

6. *Баскаков А.Г.* Лекции по алгебре. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2001.

7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

8. *Рудин У.* Функциональный анализ. Меркурий-ПРЕСС, 2000.