УДК 517.9

К АППРОКСИМАЦИИ ПОЛУПРОСТОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

Н. Б. Ускова

Воронежский государственный технический университет

Произведено уточнение полученной А. Рафикулом асимптотической формулы линейного оператора.

Пусть H — гильбертово пространство, $\mathrm{End}\,H$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в H. Пусть у оператора $T \in \mathrm{End}\,H$ λ_0 — изолированное полупростое собственное значение конечной арифметической кратности m, $\{T_n\}$, $n \geq 1$ — последовательность операторов из $\mathrm{End}\,H$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ и $\hat{\lambda}_n$ — среднее арифметическое m собственных значений оператора T_n, близких к λ_0. В [1] Рафикулом А. была получена следующая формула для приближенного вычисления собственного значения λ_0:

$$\lambda_0 = \hat{\lambda}_n + \frac{1}{m} tr(T - T_n)T_n S + O(\|(T - T_n)T\|^2), \quad (1)$$

где символом S обозначен обобщенный обратный. Данная заметка посвящена существенному уточнению и конкретизации формулы (1).

В проекционных методах для вычисления приближений к собственных значениям некоторого оператора $T \in \mathrm{End}\,H$ используется последовательность операторов $\{T_n\}$, $n \geq 1$, часто конечномерных, собственные значения которых считаются численно [2, § 18, с. 255] и искомое собственное значение $\lambda_i(T)$ в случае, если оно простое, рассматривается как предел последовательности $\{\lambda_i(T_n)\}$, при $n \to \infty$. Пусть теперь априори известно, что у оператора T собственное значение λ_0 есть полупростое, т. е $TP_1 = \lambda_0 P_1$, где $P_1 = P(\{\lambda_0\}, T)$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\{\lambda_0\}$ оператора T. В этом случае даже при малых возмущениях оператора T, т. е. при выполнении условия $\|T - T_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, ситуация не является устойчивой и у оператора T_n может появится кластер, состоящий из m простых собственных значений $\lambda_1(T_n), \lambda_2(T_n), \ldots, \lambda_m(T_n)$ близких к λ_0. Поэтому необходима формула типа формулы (1), позволяющая получать приближения к собственному значению λ_0 оператора T через вычисленные собственные значения операторов T_n и оценивать погрешность приближения. Кроме того, это помогает ввести понятие локального числа обусловленности для полупростого собственного значения.

Наконец, отметим распространенный сейчас подход к определению сходящейся последовательности замкнутых операторов.

Определение 1 *Последовательность замкнутых линейных операторов $F_n : D(F_n) \subset \subset H \to H$ называется сходящейся к оператору $F : D(F) \subset H \to H$, если пересечение $K = \bigcap\limits_{n\geq 1} \rho(F_n)$ их резольвентных множеств $\rho(F_n)$ непусто и для некоторого $\mu \in K$ выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \|(F_n - \mu I)^{-1} - (F - \mu I)^{-1}\| = 0$.*

Разумеется, здесь нет никаких дополнительных условий на $D(F_n), n \geq 1$. Известны примеры (см., например, [3]), когда последовательность резольвент $(F_n - \mu I)^{-1}, n \geq 1$ сходится к некоторой псевдорезольвенте, т. е. к некоторому оператору из $\mathrm{End}\,H$, удовлетворяющему резольвентному тождеству Гильберта, но имеющему ненулевое ядро. Тогда эта псевдорезольвента является резольвентой некоторого замкнутого отношения (многозначного оператора) (см. [3, 4]). Таким образом, последовательности замкнутых линейных операторов может сходиться к замкнутому линейному отношению. Но, также как и для замкнутых линейных операторов, для расширенного спектра $\tilde{\sigma}(F)$ замкнутого линейного отношения имеет место формула [4, 5]

$$\tilde{\sigma}(F^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \tilde{\sigma}(F)\right\}$$

и при рассмотрении проблемы аппроксимации полупростого собственного значения этот случай не выделяется отдельно. Поэтому сначала мы рассмотрим случай линейных ограниченных операторов, потом перейдем к линейным замкнутым операторам.

Методом исследования близости собственного значения λ_0 оператора T к $\hat{\lambda}_n$ служит метод подобных операторов [6—8], который изложен вначале в адаптированном для данного конкретного случая виде.

Пусть оператор $A \in \operatorname{End} H$ такой, что $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$ и σ_1 — компактно. По спектральным множествам σ_i, $i = 1,2$ построим проекторы Рисса $P_i = P(\sigma_i, A)$, $i = 1,2$. Введем в рассмотрение линейный оператор $J \in \operatorname{End}(\operatorname{End} H)$ — оператор блочной диагонализации, определенный формулой $JX = P_1XP_1 + P_2XP_2$, $X \in \operatorname{End}$. Теперь, используя условие $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$ определим оператор $\Gamma : \operatorname{End} H \to \operatorname{End} H$ как решение операторного уравнения $AY - YA = X - JX$, $X \in \operatorname{End} H$, удовлетворяющее условию $JY = 0$, положив $\Gamma X = Y$ (см. [8, 9]). Можно показать, что существует такая постоянная $\gamma > 0$, что одновременно выполнены условия: 1) $\|\Gamma\| < \gamma$, 2) $\max\{\|X\Gamma Y\|, \|(\Gamma X)Y\|\} \le \gamma \|X\| \cdot \|Y\|$, $\forall X, Y \in \operatorname{End} H$.

Возмутим теперь оператор A некоторым оператором $B \in \operatorname{End} H$. Следуя принятой в методе подобных операторов схеме, будем искать такой оператор $X_0 \in \operatorname{End} H$, чтобы имело место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_0) = (I + \Gamma X_0)(A - JX_0), \quad (2)$$

где оператор $(I + \Gamma X_0) \in \operatorname{End} H$ непрерывно обратим, что и означает подобие операторов $A - B$ и $A - JX_0$.

Теорема 2. *[5] Пусть выполнено условие*

$$4\|B\|\gamma < 1, \quad (3)$$

тогда имеет место равенство (2), где X_0 — есть решение рассматриваемого в $\operatorname{End} H$ нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - \Gamma XJB + B - \Gamma XJ(B\Gamma X), \quad (4)$$

и оно может быть найдено методом простых итераций, начиная с $X^{(0)} = 0$.

Из равенства (2) при выполнении условия (3) следует, что спектр оператора $A - B$ совпадает со спектром оператора $\tilde{A} = A - P_1X_0P_1 - P_2X_0P_2$. Поскольку подпространства $H_k = \operatorname{Im} P_k$, $k = 1,2$, инвариантны относительно оператора $\tilde{A}$, то

$$\sigma(A - B) =$$

$$= \sigma((A - P_1X_0P_1)|_{H_1}) \cup ((A - P_2X_0P_2)|_{H_2}) = \tilde{\sigma}_1 \cup \tilde{\sigma}_2,$$

где $C|_{H_k}$ означает сужение оператора $C \in \operatorname{End} H$ на подпространство H_k, $k = 1,2$, причем $\tilde{\sigma}_1 \cap \tilde{\sigma}_2 = \varnothing$. Таким образом, полную информацию о спектре оператора $A - B$ несут операторы $A_1 = (A - P_1X_0P_1)|_{H_1}$, $A_2 = (A - P_2X_0P_2)|_{H_2}$. В [2, с. 118] при выполнении условия (3) доказано неравенство

$$\left|\operatorname{tr} A_1 - m^{-1}\operatorname{tr}(AP_1 - P_1BP_1)\right| \le$$
$$\le \gamma \frac{2\|P_1BP_2\| \cdot \|P_2BP_1\|}{1 - \gamma(\|P_1BP_1\| + \|P_2BP_2\|)}, \quad (5)$$

где $m = \dim H_1$. Отметим, что неравенство (5) получено из теоремы 2 с использованием функционала $Y \mapsto m^{-1}\operatorname{tr} Y : \operatorname{End} H_1 \to \mathbb{C}$. Неравенство (5) сыграет решающую роль и приведет к усилению формулы (1).

Вернемся теперь к оператору $T \in \operatorname{End} H$ и представим его в виде $T = T_n - (T_n - T)$ и, считая T_n невозмущенным оператором с известным спектром, $T_n - T$ — возмущением, применим изложенную выше схему метода подобных операторов. Заметим, что спектр $\sigma(T_n)$ можно представить в виде $\sigma(T_n) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где множество σ_1 состоит из m собственных значений оператора T_n, близких к λ_0 и $\sigma_2 = \sigma(T_n) \setminus \sigma_1$. Кроме того, условие (3) гарантирующее разрешимость уравнения (4) имеет вид $4\gamma\|T_n - T\| < 1$ и оно выполняется за счет малости нормы оператора $\|T_n - T\|$. В рассматриваемом случае $m^{-1}\operatorname{tr} A_1 = m^{-1}\operatorname{tr}(T|_{H_1}) = \lambda_0$, $m^{-1}\operatorname{tr}(T_nP_1 - P_1(T_n - T)P_1) = \hat{\lambda}_n - m^{-1}\operatorname{tr}(P_1(T_n - T)P_1)$ и формула (5) перепишется в виде

$$\left|\lambda_0 - \hat{\lambda}_n + m^{-1}\operatorname{tr}(P_1(T_n - T)P_1)\right| \le$$
$$\le \frac{2\gamma\|P_1(T_n - T)P_2\|\|P_2(T_n - T)P_1\|}{1 - \gamma(\|P_1(T_n - T)P_1\| + \|P_2(T_n - T)P_2\|)}.$$

Учитывая условие (3), последнее неравенство можно упростить:

$$\left|\lambda_0 - \hat{\lambda}_n + m^{-1}\operatorname{tr}(P_1(T_n - T)P_1)\right| \leqslant$$
$$\leqslant 4\gamma\|P_1(T_n - T)P_2\| \cdot \|P_2(T_n - T)P_1\|,$$

и

$$\lambda_0 = \hat{\lambda}_n - m^{-1}\operatorname{tr}(P_1(T_n - T)P_1) +$$
$$+ O(\|P_1(T_n - T)P_2\| \cdot \|P_2(T_n - T)P_1\| \cdot d_{12}^{-1}, \quad (6)$$

где $d_{12} = \operatorname{dist}(\sigma_1(T_n), \sigma_2(T_n))$.

Итак, доказана

Теорема 3. *Пусть λ_0 — полупростое изолированное собственное значение конечной арифметической кратности m оператора $T \in \operatorname{End} H$, последовательность $\{T_n\}$, $n \ge 1$ операторов из $\operatorname{End} H$ такая, что $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ и $\hat{\lambda}_n$ — среднее арифметическое m собственных значений оператора T_n, близких к λ_0. Тогда* *имеет место формула (6).*

Полученная формула (6) и есть уточнение и конкретизация доказанной А. Рафикулом формулы (1).

Теперь перейдем к вопросу обусловленности в проблеме собственных значений.

Пусть $A \in \operatorname{End} H$ — некоторый линейный оператор. Если оператор взят из математической модели, описывающий реальный процесс, то он часто бывает задан с некоторой неустранимой погрешностью. Кроме того, при применении любого численного алгоритма нахождения собственных значений вносится вычислительная погрешность. Поэтому актуальным становится вопрос обусловленности собственных значений, т. е. насколько найденные собственные значения близки к истинным. Пусть $A^\varepsilon \in \operatorname{End} H$ — возмущенный оператор, причем $\|A - A^\varepsilon\| < \varepsilon$, тогда, начиная с некоторого $\varepsilon > 0$ может выполняться неравенство

$$|\lambda - \lambda^\varepsilon| \le k(\lambda)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{7}$$

где λ — простое собственное значение невозмущенного оператора A, λ^ε — возмущенного оператора A^ε, $k(\lambda)$ — локальное число обусловленности собственного значения λ. Известно [9, с. 396], что если A и A^ε — матрицы размера $n \times n$, то $k(\lambda) = (\cos(x, y))^{-1}$, где $A^\varepsilon x = \lambda^\varepsilon x$, $A^{\varepsilon *} y = \overline{\lambda}^* y$ и то пороговое $\varepsilon = \varepsilon_0$, при котором начинается работать формула (8) зависит от отделенности собственного значения λ^ε от остальных точек спектра матрицы A^ε и обусловленности остальных ее собственных значений.

В случае, если λ_0 — полупростое собственное значение арифметической кратности m оператора $A \in \operatorname{End} H$, то уместнее говорить о близости к λ_0 взвешенного среднего $\hat{\lambda}$ m собственных значений оператора A^ε, близких к λ_0. В этом случае формула (6) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \left|\lambda_0 - \hat{\lambda}\right| &\le m^{-1} \operatorname{tr}(P_1(A - A^\varepsilon)P_1) + \\ &+ O(\|P_1(A - A^\varepsilon)P_2\| \cdot \|P_2(A - A\varepsilon)P_1\|. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Пусть λ_0 — полупростое собственное значение арифметической кратности m невозмущенного оператора $A \in \operatorname{End} H$, $\hat{\lambda}$ — среднее арифметическое m собственных значений $\lambda_1^\varepsilon, \lambda_2^\varepsilon, \ldots, \lambda_m^\varepsilon$ возмущенного оператора A^ε, близких к λ_0, причем*

$$20 \frac{\|A - A^\varepsilon\|}{\tilde{d}_{12}} < 1, \tag{9}$$

где $\tilde{d}_{12} = \operatorname{dist}(\tilde{\sigma}_1, \sigma(A^\varepsilon) \setminus \tilde{\sigma}_1)$, $\tilde{\sigma}_1 = \{\lambda_1^\varepsilon, \ldots, \lambda_m^\varepsilon\}$. Тогда имеет место оценка (8).

Очевидно, что формула (8) есть уточненный аналог формулы (1) для полупростого собственного значения, в (8) учитывается, нормы каких именно частей возмущения влияют на разность между λ_0 и $\hat{\lambda}$. Условие (9) и дает то значение ε_0 параметра $\varepsilon = \|A - A^\varepsilon\|$, при котором начинает работать формула (8). Кроме того, из формулы (8) следует уточнение формулы (1) при $m = 1$, а именно:

$$\begin{gathered} |\lambda^\varepsilon - \lambda| \le k(\lambda)((A - A^\varepsilon)x, y) + \\ + O(\|P_1(A - A^\varepsilon)P_2\| \cdot \|P_2(A - A^\varepsilon)P_1\|), \end{gathered}$$

где x и y собственные нормированные векторы операторов A^ε и $\overline{A^{\varepsilon *}}$, отвечающие собственным значениям λ^ε и $\overline{\lambda^\varepsilon}$.

Перейдем теперь к изучению линейных замкнутых операторов. Пусть $F : D(F) \subset H \to H$ — линейный оператор с областью определения $D(F)$ и последовательность операторов $\{F_n\}$ $n \geqslant 1$ сходится к оператору F в смысле определения 1, без ограничения общности в качестве числа μ из определения 1 можно взять нуль и считать операторы $F : D(F) \subset H \to H$ и $F_n : D(F_n) \subset H \to H$ обратимыми. Пусть η_0 — полупростое изолированное собственное значение оператора F алгебраической кратности m, $\lambda_0 = \eta_0^{-1}$ — полупростое собственное значение, имеющее алгебраическую кратность m оператора $T = F^{-1}$. Применим к операторам T и T_n изложенную выше схему, получим, что оператор T подобен оператору блочно-диагональной структуры $T_n - P_1XP_1 - P_2XP_2$, где X — решение уравнения (4) с $B = T_n - T$, следовательно $\operatorname{tr} T\,|_{H_1} = \operatorname{tr}(T_n - P_1XP_1)$, или

$$\lambda_0 = \hat{\lambda}_n - m^{-1} \operatorname{tr}(P_1XP_1),$$

тогда для числа $\eta_0 = \dfrac{1}{\lambda_0}$ имеем

$$\eta_0 = \frac{1}{\hat{\lambda}_n - m^{-1} \operatorname{tr}(P_1XP_1)} = \frac{1}{\hat{\lambda}_n} \frac{1}{1 - \dfrac{m^{-1} \operatorname{tr}(P_1XP_1)}{\hat{\lambda}_n}}.$$

Величину $\dfrac{\operatorname{tr}(P_1XP_1)}{m\hat{\lambda}_n}$ всегда можно сделать меньше единицы в силу выполнения равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^{-1} - T_n^{-1}\| = 0$. Поэтому, воспользовавшись тем, что последний сомножитель есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$\eta_0 = \frac{1}{\hat{\lambda}_n} + \frac{1}{\hat{\lambda}_n^2}(m^{-1}\operatorname{tr}(P_1(T_n - T)P_1)) -$$
$$-\frac{1}{\hat{\lambda}^2}(m^{-1}\operatorname{tr}(T_n - T - X)P_1) + \qquad (10)$$
$$+\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{m^{-1}\operatorname{tr}(P_1XP_1)}{\hat{\lambda}_n}\right)^2.$$

Из [2, с. 118] следует, что

$$\left|\operatorname{tr}(P_1(T_n - T - \lambda)P_1)\right| \le \left\|P_1(T_n - T - X)P_1\right\| \le$$
$$\le \frac{2\gamma\left\|P_1(T_n - T)P_2\right\| \cdot \left\|P_2(T_n - T)P_1\right\|}{1-\gamma(\left\|P_1(T_n - T)P_1\right\| + \left\|P_2(T_n - T)P_2\right\|)} = g, \qquad (11)$$

и

$$\left|\operatorname{tr}(P_1XP_1)\right|^2 \le \left\|P_1XP_1\right\|^2 \le$$
$$\le ((\left\|P_1(T_n - T)P_1\right\| + g)^2. \qquad (12)$$

Подставив оценки (11), (12) в (10), окончательно имеем

$$\eta_0 = \frac{1}{\hat{\lambda}_n} + \frac{1}{\hat{\lambda}_n^2} m^{-1}\operatorname{tr}(P_1(F_n^{-1} - F^{-1})P_1) +$$
$$+O(\{\left\|P_1(F_n^{-1} - F^{-1})P_1\right\|^2).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rafikul A.* On spectral approximation of linear operators // J. Math. Anal. and Appl. T. 226, 1998. № --1. P. 229—244.

2. *Красносельский М.А. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М. Наука. 1969. 456 с.

3. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter semigroups for Linear evolution equations, Springer Verlag, 2000, 586 c.

4. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Матем. сборник. 2002. Т. 193, № 11. С. 3—42.

5. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Линейные отноения, дифференциальные включения и вырожденные полугруппы. Функ. ан. и его приложения. 2002. Т. 36, № 4. С. 65—70.

6. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Учебное пособие. Воронеж: Изд-во Воронежского госуниверситета, 1987. 165 с.

7. *Ускова Н.Б.* О спектре некоторых классов дифференциальных операторов // Дифференц. уравн. Т. 30, № 2. 1994.

8. *Ускова Н.Б.* Об оценках спектральных проекторов возмущенных самосопряженных операторов // Сибирский матем. журн. Т. 41, № 3, 2000. С. 712—721.

9. *Голуб Дж., Ван лоун Ч.* Матричные вычисления М: Мир. 1999.