УДК 517.5

ВЫСШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕРЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ

В. В. Стрыгин, Г. Ю. Северин

Воронежский государственный университет

В данной работе предлагается новый алгоритм разложения решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром в стандартной форме по Боголюбову. Найдены условия, при которых эти разложения пригодны для всей полуоси. Установлена равномерная оценка остатка разложения.

ВВЕДЕНИЕ

В ряде задач физики первое приближение метода усреднения является недостаточным и возникает необходимость получить более точные приближения. В. М. Волосов [1] построил приближение второго порядка. Ю. А. Митропольский [2], а затем П. П. Забрейко и Л. Б. Ледовская [3] показали, как найти приближение n-го порядка на конечном отрезке времени $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$. В дальнейшем этод подход был развит в работе Л. М. Перко [4]. Д. Кеворкян [5] и Д. Моррисон [6], используя метод многих масштабов, нашли новые приближения n-го порядка. В. В. Стрыгин предложил для построения высших приближений использовать понятия, связанные с задачами гироскопии [7—9]. В настоящей работе предлагается простой алгоритм построения приближения для нового класса условно-периодических нерезонансных систем на полуоси.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть G — область в $\mathbb{R}^m$, k — целочисленный мультииндекс ($k \in \mathbb{Z}^m$). Пусть $n+1$ раз непрерывно дифференцируемые отображения $a_k(x), b_k(x), (k \in \mathbb{Z}^m)$: $G \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяют условию: для любого компакта $K \subset G$ найдутся такие константы $\rho \in (0,1), \alpha > 0$, что при всех $j = 0, ..., n$ справедливо

$$\left\|a_k^{(j)}(x)\right\| \leq \alpha \rho^{|k|}, \tag{1}$$

где $|k| = k_1 + k_2 + ... + k_m$. Пусть $\omega \in \mathbb{Z}^m$ — фиксированный вектор, удовлетворяющий условию нерезонансности: т.е. найдутся такие положительные постоянные γ и β, что для всех $k \in \mathbb{Z}^m / \{0\}$ выполнено:

$$\left|(\omega, k)\right| \geq \gamma \, |k|^{-\beta}. \tag{2}$$

Пусть, далее,

$$F(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} a_k(x) e^{i(\omega,k)t}. \tag{3}$$

Очевидно, что множество всех таких функций образует линейное пространство. Обозначим это пространство через $A_\omega^n(G, \mathbb{R}^m)$.

Определение. Будем говорить, что отображение $a:[0,+\infty) \to \mathbb{R}^m$ имеет экспоненциальный предел $a(\infty) \in \mathbb{R}^m$, если существуют такие положительные константы C_0 и σ, что при всех $\xi \geq 0$ справедливо

$$\left\|a(\xi) - a(\infty)\right\| \leq C_0 e^{-\sigma\xi}.$$

Наряду с $A_\omega^n(G, \mathbb{R}^m)$ рассмотрим также $A_\omega^n([0,\infty), \mathbb{R}^m)$ —множество всех функций вида

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} B_k(\xi) e^{i(\omega,k)t}, \tag{4}$$

где экспоненциально $B_k(\xi) \to B_k(\infty)$ при $\xi \to \infty$. Через $A_\omega^n(\infty, \mathbb{R}^m)$ обозначим предельный случай пространства $A_\omega^n([0,\infty), \mathbb{R}^m)$ при $\xi \to \infty$.

Замечание 1. Для любой функции из класса $A_\omega^n([0,\infty), \mathbb{R}^m)$ существует экспоненциальный предел при $\xi \to \infty$ из класса $A_\omega^n(\infty, \mathbb{R}^m)$: $\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} a_k(\xi) e^{i(\omega,k)t}$ при $\xi \to \infty$ экспоненциально стремится к $\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} a_k(\infty) e^{i(\omega,k)t}$, причем, равномерно по $t \geq 0$.

Пусть x^* — устойчивый корень уравнения $a_0(x) = 0$, т.е. спектр $\sigma(a_0')$ матрицы $a_0'(x^*)$ лежит в левой открытой комплексной полуплоскости. Тогда при всех $\xi \geq 0$ справедлива оценка

$$\left\|e^{a_0'(x^*)\xi}\right\| \leq p e^{-\lambda\xi} \tag{5}$$

для некоторых $p > 0$ и $\lambda > 0$.

Пусть $u_0(\xi)$ -решение усредненной системы

$$\begin{cases} \dfrac{du_0}{d\xi} = a_0(u_0(\xi)), \\ u_0(0) = x_0, \end{cases} \tag{6}$$

где $\xi = \varepsilon t$, причем, $u_0(\xi)$ стремится к x^* при $\xi \to \infty$.

Наша ближайшая цель — найти равномерную асимптотику на полуоси $[0,+\infty)$ решения задачи Коши с малым параметром $\varepsilon \geq 0$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varepsilon F(\xi, t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Это приближение $x_n(\xi, t)$ на $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ будем искать, используя два масштаба времени $\xi = \varepsilon t$ и t, в виде функции двух независимых переменных ξ, t

$$x_n(\xi, t) = u_0(\xi) + \varepsilon H_n(\xi, t), \tag{8}$$

где $H_n(\xi,t) = [u_1(\xi) + v_1(\xi,t) + w_1(t)] + \ldots + \varepsilon^{n-1}[u_n(\xi) + v_n(\xi,t) + w_n(t)]$. Здесь $v_i(\xi,t), w_i(t)$ — 2π периодические по t, пока неизвестные вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}^m$, имеющие нулевое среднее по t. В процессе построения приближенного решения x_n будет доказано существование экспоненциальных пределов у функций $u_i(\xi)$ для $i = 0,\ldots,n-1$ и $v_i(\xi,t)$ для $i = 1,\ldots,n$.

Лемма 1. Среднее функции $F(t,x)$ класса $A^n_\omega(G, \mathbb{R}^m)$ совпадает с её нулевым коэффициентом $a_0(x)$, т.е. $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^m} a_k(x) e^{i(\omega,k)t} dt \equiv a_0(x)$ при всех $x \in K \subset G$.

Доказательство. Для произвольной функции $F(t,x) \in A^n_\omega(G, \mathbb{R}^m)$ имеем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(x,t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{|k|\neq 0} a_k(x) e^{i(\omega,k)t} dt + a_0(x).$$

При каждом фиксированном $T > 0$ получаем

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{|k|\neq 0} a_k(x) e^{i(k,\omega)t} dt = \sum_{|k|\neq 0} \frac{a_k(x)}{T}\int_0^T e^{i(k,\omega)t} dt = \sum_{|k|\neq 0} a_k(x) \frac{e^{i(k,\omega)T} - 1}{i(\omega,k)T}.$$

Т.к. эти ряды сходятся равномерно по $t \in [0,\infty), x \in K \subset G$, то закономерна такая перестановка операций интегрирования по t на отрезке $[0,T]$ и суммирования по всем ненулевым целым k. Используя условия (1) и (2), имеем

$$\left\| \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{|k|\neq 0} a_k(x) e^{i(k,\omega)t} dt \right\| \leq \frac{2}{T}\sum_{|k|\neq 0} \frac{a_k(x)}{|i(\omega,k)|} \leq \leq \frac{2\alpha}{T}\sum_{|k|\neq 0} \frac{\rho^{|k|}}{|k|^\beta}. \tag{9}$$

Числовой ряд $\sum\limits_{|k|\neq 0} \dfrac{\rho^{|k|}}{|k|^\beta}$, очевидно, сходится. Значит, все ряды в цепочке (9) сходятся равномерно по $t \geq 0$ и $x \in K \subset G$. Переходя почленно в неравенстве (9) к пределу при $T \to \infty$, получим

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{|k|\neq 0} a_k(x) e^{i(\omega,k)t} dt \equiv 0$$

равномерно по $t \geq 0$ и $x \in K \subset G$. Отсюда следует утверждение Леммы.

Обозначим через $M_t[F]$ среднее функции $F(t,x)$ по переменной t на полуоси $[0,\infty)$:

$$M_t[F] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(t,x)dt.$$

Очевидно, что M_t — линейный оператор и $M_t : A^n_\omega(G,\mathbb{R}^m) \to C^n(G,\mathbb{R}^m); A^n_\omega([0,\infty),\mathbb{R}^m) \to C^n([0,\infty),\mathbb{R}^m); A^n_\omega(\infty,\mathbb{R}^m) \to C^n(\infty,\mathbb{R}^m)$. Обозначим через K_t оператор удаления среднего $K_t[F] = F(\xi,t) - M_t[F]$. Очевидно, $K_t : A^n_\omega(G,\mathbb{R}^m) \to A^n_\omega(G,\mathbb{R}^m)$; $A^n_\omega([0,\infty),\mathbb{R}^m) \to A^n_\omega([0,\infty),\mathbb{R}^m)$; $A^n_\omega(\infty,\mathbb{R}^m) \to A^n_\omega(\infty,\mathbb{R}^m)$.

Замечание 2. Произведение двух условно-периодических функций всегда имеет среднее.

Обозначим через I_t оператор удаления среднего из интеграла от исходной функции

$$I_t[F](\xi,t) = K_t \int_0^t F(\xi,s)ds. \tag{10}$$

Из условий (1) и (2) следует, что $I_t : A^n_\omega(G,\mathbb{R}^m) \to A^n_\omega(G,\mathbb{R}^m)$; $A^n_\omega([0,\infty),\mathbb{R}^m) \to A^n_\omega([0,\infty),\mathbb{R}^m)$; $A^n_\omega(\infty,\mathbb{R}^m) \to A^n_\omega(\infty,\mathbb{R}^m)$.

Замечание 3. Условно-периодическую функцию класса $A^n_\omega([0,\infty),\mathbb{R}^m)$ можно почленно дифференцировать по переменной ξ, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} a_k(\xi) e^{i(\omega,k)t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \frac{da_k(\xi)}{d\xi} e^{i(\omega,k)t},$$

т.к. оба ряда сходятся равномерно по $t \geq 0, \xi \geq 0$.

Замечание 4. Условно-периодическую функцию с нулевым средним можно почленно интегрировать по переменной t, причем

$$\int_0^t \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} a_k(\xi) e^{i(\omega,k)t} dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \frac{a_k(\xi)}{i(\omega,k)} [e^{i(\omega,k)t} - 1],$$

т.к. получившийся ряд в силу условий (1) и (2) сходится равномерно по $t \geq 0, x \in K \subset G$.

Как и ранее, приближенное решение задачи Коши с малым параметром $\varepsilon \geq 0$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varepsilon F(q_x, t) \in A^n_\omega(G, \mathbb{Z}^m), \\ x(0) = x_0 \in G \end{cases} \tag{11}$$

будем искать как функцию $x_n(\xi,t)$ двух независимых переменных ξ, t вида

$$x_n(\xi,t) = u_0(\xi) + \varepsilon H_n(\xi,t), \qquad (12)$$

где $H_n(\xi,t) = [u_1(\xi) + v_1(\xi,t) + w_1(t)] + \ldots + \varepsilon^{n-1}[u_n(\xi) + v_n(\xi,t) + w_n(t)]$. Здесь $v_i(\xi,t) \in A^n_\omega([0,\infty), \mathbb{R}^m)$, $w_i(t) \in A^n_\omega(\infty, \mathbb{R}^m)$ и, более того, эти функции имеют нулевые средние по t.

ФОРМАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Подставляя (12) в (11), получаем

$$\varepsilon\left(\frac{du_0}{d\xi} + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{dw_1}{dt}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{du_1}{d\xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{dw_2}{dt}\right) + \ldots$$

$$+\varepsilon^n\left(\frac{du_n}{d\xi} + \frac{\partial v_n}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{n+1}}{\partial t} + \frac{dw_{n+1}}{dt}\right) + f(\xi,t) =$$

$$= \varepsilon\Big\{a_0(u_0) + \varepsilon a'(u_0)H_n + \ldots + \frac{\varepsilon^n}{n!}a^{(n)}(u_0)(H_n,\ldots,H_n) +$$

$$+R_n(F,u_0,\varepsilon H_n) + \sum_{|k|\neq 0}(a_k(u_0) + a_{k'}(u_0)H_n \ldots +$$

$$+\frac{\varepsilon^n}{n!}a_k^{(n)}(u_0)(H_n,\ldots,H_n)e^{i(\omega,k)t} + R_n(F,u_0,\varepsilon H_n)\Big\}, \qquad (13)$$

где $R_n(F,u_0,\varepsilon H_n) = O(\varepsilon^n)$ — равномерно по $\xi, t \geq 0, a_k^{(n)}(u_0)$ — n-я производная Фреше. Легко показать, найдётся такая постоянная $C > 0$, что выполнено $\|f(\varepsilon,t)\| \leq C\varepsilon^{n+1}$ равномерно по $t \geq 0$. Выделим в равенстве (13) слагаемые первой степени по ε и приравняем их друг к другу

$$\frac{du_0}{d\xi} + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{dw_1}{dt} = a_0(u_0) + \sum_{|k|\neq 0}a_k(u_0)e^{i(\omega,k)t}.$$

Т. к. функция $u_0(\xi)$ есть решение усредненной системы, то получаем равенство

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{dw_1}{dt} = \sum_{|k|\neq 0}a_k(u_0)e^{i(\omega,k)t}.$$

Согласно Замечанию 1, правую часть этого уравнения можно представить в виде

$$\sum_{|k|\neq 0}a_k(x^*)e^{i(\omega,k)t} + \sum_{|k|\neq 0}[a_k(u_0(\xi)) - a_k(x^*)]e^{i(\omega,k)t}.$$

Используя Лемму 3, к этим слагаемым можно применить оператор I_t. Откуда получаем

$$v_1(\xi,t) = \\ = \sum_{|k|\neq 0}\frac{a_k(u_0) - a_k(x^*)}{i(\omega,k)t}e^{i(\omega,k)t} \in A^n_\omega([0,\infty),\mathbb{R}^m); \qquad (14)$$

$$w_1(t) = \sum_{|k|\neq 0}\frac{a_k(x^*)}{i(\omega,k)t}e^{i(\omega,k)t} \in A^n_\omega(\infty,\mathbb{R}^m). \qquad (15)$$

Заметим, что функции $v_1(\xi,t)$ и $w_1(t)$ имеют нулевые средние и при $\xi \to \infty$ экспоненциально $v_1(\xi,t) \to 0$, причем, равномерно по $t \geq 0$. Теперь приравняем между собой слагаемые порядка ε^2 равенства (13). Получим

$$\frac{du_1}{d\xi} + \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{dw_2}{dt} = S_1(\xi,t),$$

где

$$S_1(\xi,t) = -\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + [a_0'(u_0) +$$

$$+\sum_{|k|\neq 0}a_k'(u_0)e^{i(\omega,k)t}][u_1(\xi) + v_1(\xi,t) + w_1(t)].$$

Лемма 2. Точка $x = x^\star$ есть экспоненциальный предел для $u_0(\xi)$ при $\xi \to +\infty$.

Доказательство опирается на известную теорему об интегральных неравенствах и гурвицевость матрицы $a_0'(x^*)$.

Замечание 5. Если функция $H(u_0,\ldots,u_n)$ удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам и все функции $u_i(\xi)$ имеют при $\xi \to \infty$ экспоненциальные пределы $u_i(\infty)(i = 0,\ldots,n)$, то функция $L(\xi) = H(u_0(\xi),\ldots,u_n(\xi))$ при $\xi \to \infty$ имеет экспоненциальный предел $L(\infty) = H(u_0(\infty),\ldots,u_n(\infty))$.

Согласно этому замечанию, функции $\frac{\partial v_1}{\partial t}(\xi,t), v_1(\xi,t)$ и $S_1(\xi,t)$ имеют экспоненциальные пределы при $\xi \to \infty$ равномерные по $t \in [0,\infty)$.

Лемма 3. Функция $u_1(\xi)$ имеет при $\xi \to \infty$ экспоненциальный предел $u_1(\infty)$.

Доказательство содержит три этапа. Сначала доказывается с помощью теоремы об интегральных неравенствах экспоненциальная оценка для нормы фундаментальной матрицы $\mathbf{\Phi}(\xi,T)$ системы

$$\frac{dz}{d\xi} = a_0(u_0(\xi))z(\xi), \qquad (18)$$

удовлетворяющей условиям $\mathbf{\Phi}(T,T) = I,\ T \geq 0$, потом — ограниченность решения $u_1(\xi)$ на $[0,\infty)$ и, наконец, что $u_1(\xi) \to -a_0 l_1(\infty)$ экспоненциально при $\xi \to \infty$. Представим теперь S_1 в виде

$$S_1(\xi,t) = M_t[S_1(\xi,t)] + K_t S_1(\infty,t) + \\ +K_t[S_1(\xi,t) - S_1(\infty,t)]. \qquad (19)$$

Будем определять $u_1(\xi)$ как решение задачи Коши

$$\frac{du_1}{d\xi} = a_0'(u_0)u_1(\xi) + l_1(\xi),$$

$$u_1(0) = -v_1(0,0) - w_1(0),$$

где

$$l_1(\xi) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{|k|\neq 0} a_{k'}(u_0)e^{i(\omega,k)t}\sum_{|l|\neq 0} a_l(u_0)e^{i(\omega,l)t}dt.$$

Тогда $v_2(\xi,t)$ и $w_2(t)$ можно определить как и $v_1(\xi,t)$, $w_1(t)$ (см. (14), (15)). Аналогично определяются функции $u_2(\xi),\ldots,u_n(\xi)$; $v_3(\xi,t),\ldots,v_{n+1}(\xi,t)$ и $w_3(t),\ldots,w_{n+1}(t)$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $x(\varepsilon,t)$ — решение задачи Коши (7), рассматриваемое при всех возможных $t \geq 0$ и малых $\varepsilon > 0$, а $x_n(\varepsilon,t)$ — построенное выше приближение. Для обоснования сходимости x_n к x, запишем уравнение системы (7) в медленном времени ξ

$$\frac{dx}{d\xi} = F\left(x,\frac{\xi}{\varepsilon}\right),$$

а затем линеаризуем ее в точке $x = x_n$. Поэтому важную роль играет линеаризованная в точке $x = x_n(\xi,\varepsilon)$ система

$$\frac{dz}{d\xi} = F'\left(x_n,\frac{\xi}{\varepsilon}\right)z = a'(x_n(\xi,\varepsilon))z + \sum_{|k|\neq 0} a_k'(x_n(\xi,\varepsilon))e^{x\frac{\xi}{\varepsilon}}z. \qquad (22)$$

Так как $x_n = u_0(\xi) + O(\varepsilon)$, то ясно, что здесь принципиальное значение играет фундаментальная матрица линеаризованной в точке $x = u_0(\xi)$ системы

$$\frac{dz}{d\xi} = F'\left(x_n,\frac{\xi}{\varepsilon}\right)z = a'(u_0(\xi))z + \sum_{|k|\neq 0} a_k'(u_o(\xi))e^{x\frac{\xi}{\varepsilon}}z \qquad (23)$$

с быстро осциллирующими коэффициентами. Последние существенно не влияют на оценки фундаментальной матрицы. Поэтому наше рассмотрение опирается на фундаментальную матрицу $\Phi(\xi,T)(\Phi(T,T) = I)$ системы

$$\frac{dz}{d\xi} = A'(u_0)z. \qquad (24)$$

Как следует из леммы 4, эта фундаментальная матрица удовлетворяет оценке

$$\|\Phi(\xi,T)\| \leq c_0 e^{-\lambda_0\xi} \quad (\xi \geq 0), \qquad (25)$$

где c_0 и λ_0 — положительные постоянные. Пусть теперь $(m\times m)$-квадратная матрица $D(\xi,\varepsilon)(\xi\geq 0,\varepsilon > 0)$ равномерно ограничена вместе со своей производной по ξ

$$\|D(\xi,\varepsilon)\| \leq q, \quad \|D_\xi(\xi,\varepsilon)\| \leq q. \qquad (26)$$

Обозначим через $V(\xi,\varepsilon)$ $(V(0,\varepsilon) = I)$ фундаментальную матрицу системы с быстро осциллирующими коэффициентами на полуинтервале $[0,\infty)$.

$$\frac{dz}{d\xi} = \left[A'(u_0)z + D(\xi,\varepsilon)\sin\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)\right]z. \qquad (27)$$

Лемма 4. Существуют такие положительные постоянные c_0,ε_0, что имеет место оценка

$$\|V(\xi,\varepsilon)\| \leq c_0 e^{-\lambda_0\xi}. \qquad (28)$$

при всех $\xi \geq 0$ и $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Основная идея доказательства состоит а том, что для любой ограниченной, дважды непрерывно дифференцируемой функции f на $[0,\infty)$ выполнено $\int_0^\infty f(\mu)\sin\frac{\mu}{\varepsilon}d\mu \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Замечание 4. Легко видеть, что утверждение Леммы 5 можно легко обобщить, заменив $D(\xi,\varepsilon)\sin\frac{\xi}{\varepsilon}$ равномерно сходящимся, быстро осциллирующим рядом $\sum_{|k|\neq 0} a_k'(x_n(\xi,\varepsilon))e^{k\frac{\xi}{\varepsilon}}z$.

Лемма 5. Фундаментальная матрица $W(\xi,\varepsilon),(W(0,\varepsilon) = I)$ системы

$$\frac{dz}{d\xi} = \sum_{|k|\in\mathbb{Z}} a_k'(x_n(\xi,\varepsilon))e^{k\frac{\xi}{\varepsilon}}z$$

на полуинтервале $[0,\infty)$ при достаточно малых ε удовлетворяет оценке

$$\|W(\xi,\varepsilon)\| \leq 2c_0 e^{-\lambda_0\xi} \quad (\xi \geq 0).$$

Доказательство этой леммы проводится по схеме доказательства Леммы 5, учитывая, что $x_n = u_0(\xi) + \varepsilon H_n(\xi,\varepsilon)$ и функции $a_k'(x_n)e^{k\frac{\xi}{\varepsilon}}$ вместе со своими производными по ξ равномерно ограничены при всех $\xi \in [0,\infty)$ и малых ε.

Таким образом, норма фундаментальной матрицы линеаризованной задачи оценивается сверху убывающей экспонентой на всей полуоси $[0,\infty)$.

Пусть $v(\xi,\varepsilon) = x(\xi,\varepsilon) - x_n\left(\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}\right)$. Очевидно, что $v(0) = 0$ и $\frac{dx_n}{d\xi} = F\left(x_n,\frac{\xi}{\varepsilon}\right) - f(\xi,\varepsilon)$, где $\|f(\xi,\varepsilon)\| < L\varepsilon^n$. Тогда

$$\frac{dv}{d\xi} = F\left(x,\frac{\xi}{\varepsilon}\right) - F\left(x_n,\frac{\xi}{\varepsilon}\right) + f(\xi,\varepsilon) =$$

$$= F'\left(x_n,\frac{\xi}{\varepsilon}\right)v(\xi,\varepsilon) + R(\xi,\varepsilon)(v(\xi,\varepsilon),v(\xi,\varepsilon)) + f(\xi,\varepsilon),$$

$$R(\xi,\varepsilon) = \int_0^1 \frac{1}{2!}F''\left(x_n\left(\xi,\frac{\xi}{\varepsilon}\right) + sv(\xi,\varepsilon)\right)ds.$$

Очевидно, что

$$\|R(\xi,\varepsilon)\| < d.$$

Основная Теорема. Найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ разность $v(\xi,\varepsilon)$ равномерно на всей полуоси $[0,\infty)$ удовлетворяет следующей оценке

$$\|v(\xi,\varepsilon)\| < \frac{3Lc_0}{\lambda_0}\varepsilon^n. \qquad (29)$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. найдётся такая последовательность $\{\varepsilon_\nu\} \to 0$ при $\nu \to \infty$ и моменты времени $\{\xi_\nu\}$, для которых

$$\|v(\xi_\nu,\varepsilon_\nu)\| = \frac{3Lc_0}{\lambda_0}\varepsilon_\nu^n. \qquad (30)$$

Пусть T_μ — минимальный такой момент. Тогда на отрезке $[0,T_\nu]$ справедливо

$$\|v(\xi)\| \le \frac{3Lc_0}{\lambda_0}\varepsilon^n.$$

Далее, в силу (31) при всех $\xi \in [0,T_\nu]$ имеем

$$v(\xi,\varepsilon) \le c_0\int_0^\xi e^{-\lambda_0(\xi-\mu)}\left[d\|v(\mu,\varepsilon)\|^2 + L\varepsilon_\nu^n\right]d\mu \le$$

$$\le c_0\int_0^\xi e^{-\lambda_0(\xi-\mu)}\left[\varepsilon_\nu^n\,\frac{3dL}{\lambda_0}\|v(\mu,\varepsilon)\| + L\varepsilon_\nu^n\right]d\mu$$

По известной теореме об интегральных неравенствах на отрезке $[0,T_\nu]$ справедливо $\|v(\xi,\varepsilon)\| \le \psi(\xi)$, где $\psi(0)=0$, причем,

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -\lambda_0\psi(\xi) + \frac{3dLc_0}{\lambda_0}\varepsilon_\nu^n\psi(\xi) + Lc_0\varepsilon_\nu^n.$$

Заметим, что последнее уравнение имеет единственное постоянное устойчивое решение

$$\psi^* = \frac{Lc_0\varepsilon_\nu^n}{\lambda_0 - \frac{3dLc_0}{\lambda_0}\varepsilon_\nu^n}.$$

Очевидно, что $\psi^* > 0$ при достаточно больших ν. Будем выбирать ν таким большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\|v(\xi,\varepsilon_\nu)\| < 2\frac{Lc_0\varepsilon_\nu^n}{\lambda_0}$$

при всех $\xi \in [0,T_\nu]$. Но, с другой стороны, вспоминая (30), получим

$$3\frac{Lc_0\varepsilon_\nu^n}{\lambda_0} = \|v(T_\nu,\varepsilon_\nu)\| \le \|v(\xi,\varepsilon_\nu)\| < 2\frac{Lc_0\varepsilon_\nu^n}{\lambda_0}.$$

Следовательно, получили противоречие, которое завершает доказательство Основной Теоремы.

Пусть область G содержит конечное число точек $x_j^*(j=1,\dots,p)$, каждая из которых является устойчивым корнем уравнения $a_0(x)=0$. Более того, пусть каждый корень x_j^* имеет свою область притяжения $G_j \subset G$. Тогда для всех решений $u_{0j}(\xi)$ со значениями в G_j справедливо $\lim\limits_{\xi\to\infty} u_{0j}(\xi) = x_j^*$. Очевидно, что в каждой такой области G_j можно предложенным выше методом построить приближённое решение $x_{nj}(\varepsilon,t)$ задачи Коши (7) и будет справедлива теорема о точности приближения во всех областях G_j.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волосов В.М.* Высшие приближения усреднений, Доклады АН СССР, 2, 1961. С. 382—385.

2. *Mitropolski Yu.* Averaging Method in Nonlinear Mechanics, Int. J.Nonlinear Mechanics (2), 69-96, (1967).

3. *Забрейко П.П., Ледовская Л.Б.* Высшие приближения метода усреднения Боголюбова—Крылова. Доклады АН СССР, 117, 1966. № 2, С. 1453—1456.

4. *Perko L.M.* Higher order and related methods for perturbed periodic and quasi-periodic systems, SIAM. J. Appl: Math. 1968. 17, № 4.

5. *Kevorkian J.* The uniformly valid asymptotic representation of the solution of certain nonlinear ordinary differential equations. Doctoral thesis, California Institute of Technology, Pasadena, 1991.

6. *Morrison J.A.* Comparison of the modified method of averaging and the two variable expansion procedure, SIAM Rev. 8, 1966. P. 66—85.

7. *Стрыгин В.В.* Об одной модификации метода усреднения при отыскании высших приближений, Прикл. мат. и мех. 1984. 48, № 6, С. 1042—1045.

8. *Strygin V.V.* The Principles of averaging in the theory of nonlinear oscillations and the separation of movements, Z. Angew. Math. Mech. 1986. 66, № 11, P. 560—561.

9. *Стрыгин В.В.* Об асимптотическом интегрировании уравнений движения механических систем под действием быстро осциллирующих сил, Прикл. мат. и мех. 1989. 53, № 3.

10. Стрыгин В.В., Янин А.Д. Приближения высшего порядка метода усреднения для осциллирующих систем, Прикл. мат. и мех. 1992. 28, № 11, С. 84—91.