УДК 517.988.8

СХОДИМОСТЬ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

В. В. Смагин, Д. С. Сотников

Воронежский государственный университет

Для квазилинейного параболического уравнения в условиях его слабой разрешимости установлена сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения этого уравнения. При этом дискретизация по времени проводится в главной части по неявной схеме Эйлера. Показано также, что для более гладких решений сходимость приближенных решений к точному получается с порядком скорости сходимости как по времени, так и по пространству.

Пусть дана тройка гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. Для $t \in [0,T]$ и $u, v \in V$ определено семейство полуторалинейных форм $a(t,u,v)$. Предполагается, что для всех $u, v \in V$ функции $t \to a(t,u,v)$ измеримы на $[0,T]$ и выполнены оценки

$$\begin{gathered} |a(t,u,v)| \le M_1 \|u\|_V \|v\|_V , \\ \operatorname{Re} a(t,u,u) + \lambda \|u\|_H^2 \ge \delta \|u\|_V^2 , \end{gathered} \tag{1}$$

где $\lambda \ge 0$, $\delta > 0$. Форма $a(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t): V \to V'$ такой, что для $u, v \in V$ выполняется $a(t,u,v) = (A(t)u, v)$. Отсюда следует оценка $\|A(t)\|_{V \to V'} \le M_1$. Здесь под выражением типа (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z,v), в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H.

Предположим также, что на $[0,T] \times H$ задана функция $f(t,u)$ со значениями в V' такая, что $f(t,u) \in L_2(0,T;V')$ при каждом фиксированном $u \in H$, и для всех $u_1, u_2 \in H$ выполняется

$$\|f(t,u_1) - f(t,u_2)\|_{V'} \le M_2 \|u_1 - u_2\|_H . \tag{2}$$

Заметим, что для функции $t \to u(t) \in H$, измеримой на $[0,T]$, функция $t \to f[t,u(t)] \in V'$ будет измеримой на $[0,T]$. Кроме того, если $u(t) \in L_2(0,T;H)$, то из оценки, следующей из (2),

$$\|f[t,u(t)]\|_{V'} \le M_2 \|u(t)\|_H + \|f(t,\theta)\|_{V'} ,$$

в которой θ — нуль в H, получаем $f[t,u(t)] \in L_2(0,T;V')$. Обратим внимание, что в приложениях условие (2) означает возможность нелинейности $f(t,u)$ содержать производные функции $u \in H$ по пространственным переменным.

В пространстве V' рассмотрим задачу Коши:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f[t,u(t)], \quad u(0) = u^0. \tag{3}$$

Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

При дополнительном предположении компактности вложения $V \subset H$ в [1] показано, что задача (3) имеет единственное решение $u(t)$, называемое слабым, такое что $u(t) \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$, а $u'(t) \in L_2(0,T;V')$. При этом удовлетворяются начальное условие и почти всюду на $[0,T]$ уравнение (3).

Далее задача (3) в сформулированных условиях слабой разрешимости решается приближенно проекционно-разностным методом. При этом по времени используется неявная схема Эйлера в главной части. В итоге процесс нахождения приближенного решения нелинейной задачи (3) сводится к нахождению решений конечных линейных систем алгебраических уравнений. Полученные здесь результаты о энергетической сходимости проекционного метода дополняют результаты работы [2], где подобные утверждения установлены для линейной задачи.

Опишем некоторые факты, связанные с проекционными подпространствами. Через V_h, где h — положительный параметр, обозначим конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство $V_{h'}$, задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup |(u_h, v_h)|$, точная верхняя граница берется по $v_h \in V_h$ и $\|v_h\|_V = 1$. Нетрудно видеть, что $\|u_h\|_{V_h'} \le \|u_h\|_{V'}$. Обозначим через P_h ортопроектор в пространстве H на V_h. В [3] замечено, что оператор P_h

* Работа выполнена при содействии РФФИ, проект № 04-01-00141.

допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V_h'$ и для $u \in V'$ справедлива оценка $\|\overline{P}_h u\|_{V_h'} \le \|u\|_{V'}$. Отметим также для $u_h \in V_h$ оценку $\|u_h\|_{V'} \le \|P_h\|_{V\to V} \|u_h\|_{V_h'}$ и для $u \in V'$ оценку $\|\overline{P}_h u\|_{V'} \le \|P_h\|_{V\to V} \|u\|_{V'}$ [4]. Кроме того, для $u \in V'$ и $v \in H$ справедливо важное соотношение $(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v)$ [5].

Рассмотрим в V_h приближенную задачу

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_h^k u_k^h = f_h^k(u_{k-1}^h) \quad (k = \overline{1,N}), \quad (4)$$

где N — натуральное число, $\tau N = T$, $t_k = k\tau$,

$$A_h^k = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h A(t)dt, \quad f_h^k(v) = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h f(t,v)dt,$$

и элемент $u_0^h \in V_h$ считаем заданным. Обратим внимание, что задача (4) является линейной и, по крайней мере для $0 < \tau \le \lambda^{-1}$, имеет единственное решение.

Лемма 1. *Пусть $u(t)$ — решение задачи (3), а u_k^h — решение задачи (4). Тогда для $z_k^h = P_h u(t_k) - u_k^h$ справедлива оценка*

$$\max_{1\le k\le N}\|z_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N(\|z_k^h\|_V^2\,\tau + \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 +$$
$$+\|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2\,\tau) \le$$
$$\le M\{\|P_h u^0 - u_0^h\|_H^2 + \int_0^T \|(P_h - I)u(t)\|_V^2\,dt + \quad (5)$$
$$\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t) - u(t_{k-1})]\|_H^2\,dt +$$
$$+\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t_k) - u(t)]\|_V^2\,dt\}$$

Доказательство. К (3) применим оператор $\overline{P}_h$, полученное равенство интегрируем по t от t_{k-1} до t_k, и делим на τ. Учитывая далее (4), получим тождество

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + A_k^h z_k^h = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P_h}A(t)[P_h u(t_k) -$$
$$-u(t)]dt + \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P}_h[f(t,u) + f(t,u_{k-1}^h)]dt. \quad (6)$$

Умножим (6) скалярно в H на τz_k^h, возьмем удвоенную вещественную часть, учитывая (1) и (2), оценим полученные равенства.

$$\|z_k^h\|_H^2 - \|z_{k-1}^h\|_H^2 + \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + 2\delta\|z_k^h\|_V^2\,\tau \le$$
$$\le 2\lambda\|z_k^h\|_H^2\,\tau + 2M_1\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h u(t_k) - u(t)\|_V\|z_k^h\|_V\,dt +$$
$$+2M_2\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t) - u_{k-1}^h\|_H\|z_k^h\|_V\,dt. \quad (7)$$

Оценим I_2 — второе слагаемое в правой части (7).

$$I_2 \le \varepsilon_1\|z_k^h\|_V^2\,\tau + \frac{M_1^2}{\varepsilon_1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h u(t_k) - u(t)\|_V^2\,dt \le$$
$$\le \varepsilon_1\|z_k^h\|_V^2\,\tau + \frac{2M_1^2}{\varepsilon_1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t_k) - u(t)]\|_V^2\,dt +$$
$$+\frac{2M_1^2}{\varepsilon_1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|(P_h - I)u(t)\|_V^2\,dt, \quad (8)$$

где $\varepsilon_1 > 0$ произвольно. С произвольным $\varepsilon_2 > 0$ оценим I_3 — третье слагаемое в правой части (7).

$$I_3 \le \varepsilon_2\|z_k^h\|_V^2\,\tau + \frac{M_2^2}{\varepsilon_2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t) - u_{k-1}^h\|_H^2\,dt \le$$
$$\le \varepsilon_2\|z_k^h\|_V^2\,\tau + \frac{3M_2^2}{\varepsilon_2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|(I - P_h)u(t)\|_H^2\,dt +$$
$$+\frac{3M_2^2}{\varepsilon_2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t) - u(t_{k-1})]\|_H^2\,dt + \quad (9)$$
$$+\frac{3M_2^2}{\varepsilon_2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h u(t_{k-1}) - u_{k-1}^h\|_H^2\,dt.$$

Положим в (8) и (9) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta/2$. Тогда из (7), (8) и (9) следует оценка

$$\|z_k^h\|_H^2 - \|z_{k-1}^h\|_H^2 + \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + \delta\|z_k^h\|_V^2\,\tau \le$$
$$\le C_1\|z_k^h\|_H^2\,\tau + C_2\|z_{k-1}^h\|_H^2\,\tau +$$
$$+C_3\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|(P_h - I)u(t)\|_V^2\,dt +$$
$$+C_4\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t_k) - u(t)]\|_V^2\,dt +$$
$$C_5\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t) - u(t_{k-1})]\|_H^2\,dt.$$

Неравенства (10) просуммируем по k от 1 до $m \le N$.

$$\|z_m^h\|_H^2 - \|z_0^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^m(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + \delta\|z_k^h\|_V^2\,\tau) \le$$
$$\le C_1\sum_{k=1}^m\|z_k^h\|_H^2\,\tau + C_2\sum_{k=1}^m\|z_{k-1}^h\|_H^2\,\tau +$$
$$+C_3\int_0^T\|(P_h - I)u(t)\|_V^2\,dt +$$
$$+C_4\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t_k) - u(t)]\|_V^2\,dt +$$
$$+C_5\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t) - u(t_{k-1})]\|_H^2\,dt.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^m\|z_{k-1}^h\|_H^2\,\tau = \tau\|z_0^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{m-1}\|z_k^h\|_H^2\,\tau \le$$
$$\le T\|z_0^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^m\|z_k^h\|_H^2\,\tau.$$

Таким образом, из (11) получим для всех $m \le N$

$$\left\|z_m^h\right\|_H^2 + \sum_{k=1}^{m}(\left\|z_k^h - z_{k-1}^h\right\|_H^2 + \delta\left\|z_k^h\right\|_V^2 \tau) \le$$
$$\le C_1\{\left\|z_0^h\right\|_H^2 + \int_0^T \left\|(P_h - I)u(t)\right\|_V^2 dt +$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|P_h[u(t_k) - u(t)]\right\|_V^2 dt + \tag{12}$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|P_h[u(t) - u(t_{k-1})]\right\|_H^2 dt\} + C_2\sum_{k=1}^{m}\left\|z_k^h\right\|_H^2 \tau.$$

В (12) выделим суммарное неравенство для $\left\|z_k^h\right\|_H^2$.

$$\left\|z_m^h\right\|_H^2 \le C_1\{\left\|z_0^h\right\|_H^2 + \int_0^T \left\|(P_h - I)u(t)\right\|_V^2 dt +$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|P_h[u(t_k) - u(t)]\right\|_V^2 dt +$$
$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|P_h[u(t) - u(t_{k-1})]\right\|_H^2 dt\} + C_2\sum_{k=1}^{m}\left\|z_k^h\right\|_H^2 \tau,$$

которое приведет к оценке (5)для $\max\limits_{1\le k\le N}\left\|z_k^h\right\|_H^2$. Эту оценку подставим в правую часть (12) и получим оценку (5) для

$$\max_{1\le k\le N}\left\|z_k^h\right\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N}(\left\|z_k^h\right\|_V^2 \tau + \left\|z_k^h - z_{k-1}^h\right\|_H^2).$$

Окончательная оценка (5) следует теперь непосредственно из (6). Действительно, из (6) получим оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\right\|_{V_h'}^2 \tau \le C\{\sum_{k=1}^{N}\left\|z_k^h\right\|_V^2 \tau +$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|P_h u(t_k) - u(t)\right\|_V^2 dt +$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|u(t) - u_{k-1}^h\right\|_H^2 dt\},$$

которая позволяет получить оценку (5) в полном объеме. Для получения сходимости приближенных решений предположим, что задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в пространстве V, то есть $\left\|(I - Q_h)v\right\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$, где Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h. Заметим, что тогда последовательность $\{V_h\}$ предельно плотна и в H, что следует из оценки для любых $u \in H$ и $v \in V$

$$\left\|(I - P_h)u\right\|_H \le \left\|(I - P_h)(u - v)\right\|_H + \left\|(I - P_h)v\right\|_H \le$$
$$\le \|u - v\|_H + \left\|(I - Q_h)v\right\|_H$$

и плотного непрерывного вложения $V \subset H$. Аналогично из оценки для любых $u \in V'$ и $v \in H$

$$\left\|(I - S_h)u\right\|_{V'} \le \|u - v\|_{V'} + \left\|(I - P_h)v\right\|_{V'},$$

где S_h — ортопроектор в пространстве V' на V_h, и плотного непрерывного вложения $H \subset V'$ следует предельная плотность $\{V_h\}$ и в V'. Пусть также выполнены оценки:

$$\left\|(I - Q_h)v\right\|_H \le r_1 h\|v\|_V, \tag{13}$$

$$\left\|v_h\right\|_V \le r_2 h^{-1}\left\|v_h\right\|_H, \tag{14}$$

где r_1 и r_2 не зависят от $v \in V$, $v_h \in V_h$ и h. Условие (14) типично для метода конечных элементов и в приложениях означает равномерное разбиение области пространственных переменных. Заметим, что в простейшем одномерном случае такими являются, например, подпространства непрерывных кусочно линейных на равномерной сетке функций. Из (13) и (14) легко следует необходимая в дальнейшем оценка $\left\|P_h\right\|_{V\to V} \le r_1 r_2 + 1$.

Перед формулировкой утверждения о сходимости отметим, что решение задачи (3) $u \in L_2(0,T;V)$ и, вообще говоря, значение в точке (на множестве меры нуль) $u(t_k) \in V$ не определено. Поэтому вместо $\sum_{k=1}^{N}\left\|u(t_k) - u_k^h\right\|_V^2 \tau$ имеет смысл оценивать

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} u(t)dt - u_k^h\right\|_V^2 \tau \le \sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t) - u_k^h\right\|_V^2 dt.$$

Теорема. *Пусть* $u(t)$ *— слабое решение задачи (3), а* u_k^h *— решение задачи (4). Пусть* $\{V_h\}$ *— предельно плотная в* V *последовательность конечномерных подпространств, для которой выполняются условия (13), (14). Наконец, при* $h \to 0$ *пусть* $\left\|P_h u^0 - u_0^h\right\|_H \to 0$ *и* $\tau h^{-2} \to 0$. *Тогда*

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k) - u_k^h\right\|_H + (\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t) - u_k^h\right\|_V^2 dt)^{1/2} +$$
$$(\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau)^{1/2} \underset{h\to 0}{\to} 0. \tag{15}$$

Доказательство. Из условия (14) для $u_h \in V_h$ следует оценка

$$\left\|u_h\right\|_H = \sup_{v_h\in V_h}\frac{\left|(u_h, v_h)\right|}{\left\|v_h\right\|_H} \le r_2 h^{-1}\sup_{v_h\in V_h}\frac{\left|(u_h, v_h)\right|}{\left\|v_h\right\|_V} =$$
$$= r_2 h^{-1}\left\|u_h\right\|_{V_h'}. \tag{16}$$

С учетом (14) и (16) получим почти при всех $t \in (t_{k-1}, t_k)$ оценку

$$\|P_h[u(t_k)-u(t)]\|_V^2 = \left\|\int_t^{t_k} \overline{P}_h u'(s)ds\right\|_V^2 \le$$

$$\le r_2^4 h^{-4}\left\|\int_t^{t_k} \overline{P}_h u'(s)ds\right\|_{V_h'}^2 \le r_2^4 \tau h^{-4}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(t)\|_{V'}^2\, dt.$$

Отсюда следует оценка

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t_k)-u(t)]\|_V^2\, dt \le \le r_2^4\tau^2 h^{-4}\int_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2\, dt. \quad (17)$$

Подобным образом почти при всех $t\in(t_{k-1},t_k)$ получим

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t)-u(t_{k-1})]\|_H^2\, dt \le \le r_2^2\tau^2 h^{-2}\int_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2\, dt. \quad (18)$$

Заметим также, что для любого $v\in V$ при $h\to 0$

$$\|(I-P_h)v\|_V = \|(I-P_h)(v-Q_h v)\|_V \le \le (1+\|P_h\|_{V\to V})\|(I-Q_h)v\|_V \to 0. \quad (19)$$

Таким образом, стремление к нулю первых двух слагаемых в (15) следует из (5), (17), (18), (19) и тождества

$$u(t)-u_k^h = (I-P_h)u(t) + P_h[u(t)-u(t_k)] + z_k^h. \quad (20)$$

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^N \left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)dt - \frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^N \left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(I-\overline{P}_h)u'(t)dt\right\|_{V'}^2 \tau\right)^{1/2} +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^N \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V'}^2\, \tau\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int_0^T \|(I-\overline{P}_h)u'(t)\|_{V'}^2\, dt\right)^{1/2} +$$

$$+C\left(\sum_{k=1}^N \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2\, \tau\right)^{1/2}.$$

Подобно (19) для любого $v\in V'$ при $h\to 0$

$$\|(I-\overline{P}_h)v\|_{V'} \le (1+\|P_h\|_{V\to V})\|(I-S_h)v\|_{V'} \to 0. \quad (22)$$

Стремление к нулю третьего слагаемого в (15) следует теперь из (21), (19), (22), (5), (17) и (18). Далее покажем, что при условии дополнительной гладкости решения $u(t)$ из оценки (5) следуют и порядки скорости сходимости, как по времени, так и по пространству. При этом требование $\tau = o(h^2)$ в (15) можно существенно ослабить.

Лемма 2. *Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (3) дополнительно такое, что*

$$u' \in L_p(0,T;H) \quad (1\le p\le 2), \quad (23)$$

а подпространства V_h обладают свойством (14). Тогда справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t)-u(t_{k-1})]\|_H^2\, dt + +\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t_k)-u(t)]\|_V^2\, dt \le (r_2^2+T^2)\tau^{3-2/p}h^{-2}\left(\int_0^T\|u'(t)\|_H^p\, dt\right)^{2/p}. \quad (24)$$

Доказательство следует из оценки второго слагаемого в (24)

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t_k)-u(t)]\|_V^2\, dt \le$$

$$\le r_2^2 h^{-2}\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|\int_t^{t_k} P_h u'(s)ds\right\|_H^2 dt \le$$

$$\le r_2^2 h^{-2}\tau\sum_{k=1}^N\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_H\, ds\right)^2 \le$$

$$\le r_2^2\tau^{3-2/p}h^{-2}\left(\int_0^T\|u'(t)\|_H^p\, dt\right)^{2/p}$$

и подобной оценки первого слагаемого в (24)

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t)-u(t_{k-1})]\|_H^2\, dt \le$$

$$\le \tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u'(t)\|_H^p\, dt\right)^{2/p}.$$

Далее предполагается, что существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $E\subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$ [6, с.23]. Например, если оператор $A(t)$ порожден в области $\Omega\subset R^n$ с гладкой границей равномерно эллиптическим дифференциальным выражением второго порядка и краевым условием Дирихле, то полагаем $H=L_2(\Omega)$, $V=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $E=W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задано условие Неймана, то полагаем $H=L_2(\Omega)$, $V=W_2^1(\Omega)$, $E=W_2^2(\Omega)$.

Пусть также подпространства V_h такие, что

$$\|(Q_h-I)v\|_V \le rh\|v\|_E \quad (v\in E), \quad (25)$$

где константа $r>0$ не зависит от v и h. Условие (25) является типичным для подпространств V_h типа конечных элементов.

В [7] показано, что из (25) следует для всех $v\in V$ оценка

$$\|(Q_h-I)v\|_H \le rh\|(Q_h-I)v\|_V, \quad (26)$$

из которой очевидно образом получается (13).

Предположим, что для решения $u(t)$ задачи (3) выполняется условие (23), а также

$$u \in L_2(0,T;E). \tag{27}$$

Пусть подпространства V_h удовлетворяют условиям (25) и (14). Тогда из (5), (20) и (24) получим оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t)-u_k^h\right\|_V^2 dt \le M\left\{\left\|P_h u^0-u_0^h\right\|_H^2 + \right. \\ \left. +h^2\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2 dt+\tau^{3-2/p}h^{-2}\left(\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_H^p dt\right)^{2/p}\right\}. \tag{28}$$

В тех же предположениях проведем оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2\tau \le \\ \le 2\tau^{1-2/p}\left(\int_0^T\left\|(I-P_h)u'(t)\right\|_{V'}^p dt\right)^{2/p}+ \\ +2\sum_{k=1}^{N}\left\|(z_k^h-z_{k-1}^h)\tau^{-1}\right\|_{V'}^2\tau. \tag{29}$$

Воспользуемся далее оценкой из [8], которая следует из (25),

$$\left\|(I-P_h)u\right\|_{V'} \le rh\left\|(I-P_h)u\right\|_H \quad (u\in H). \tag{30}$$

Из (29), учитывая (30), получим оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2\tau \le \\ \le M\left\{\left\|P_h u^0-u_0^h\right\|_H^2+h^2\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2 dt+ \right. \\ \left. +\left(\tau^{1-2/p}h^2+\tau^{3-2/p}h^{-2}\right)\left(\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_H^p dt\right)^{2/p}\right\}. \tag{32}$$

Если к условиям (23), (27) добавить требование $u\in C([0,T],V)$, то справедлива еще одна оценка

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_H^2 \le M\left\{\left\|P_h u^0-u_0^h\right\|_H^2+\right. \\ +h^2\left(\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)\right\|_V^2+\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2 dt\right)+ \\ \left. +\tau^{3-2/p}h^{-2}\left(\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_H^p dt\right)^{2/p}\right\}. \tag{33}$$

Полагая в оценках (28), (31) и (32), например, $p=2$ и $\tau=h^2$, получим сходимость квадратов соответствующих норм погрешности как h^2.

Потребовав от решения $u(t)$ еще большей гладкости, можно получать оценки погрешности, в которых параметры τ и h независимы.

Лемма 3. *Пусть $u(t)$ — решение задачи (3) такое, что*

$$u'\in L_p(0,T;V) \quad (1\le p\le 2), \tag{33}$$

а подпространства V_h такие, что $\| P_h \|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|P_h[u(t)-u(t_{k-1})]\right\|_H^2 dt+ \\ +\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|P_h[u(t_k)-u(t)]\right\|_V^2 dt \le \\ \le M\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^p dt\right)^{2/p}. \tag{34}$$

Доказательство следует из оценок

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|P_h[u(t_k)-u(t)]\right\|_V^2 dt \le \\ \le C\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|\int_t^{t_k}u'(s)ds\right\|_V^2 dt \le \\ \le C\tau^{3-2/p}\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u'(s)\right\|_V^p ds\right)^{2/p} \le \\ \le C\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^p dt\right)^{2/p}$$

и подобной оценки

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|P_h[u(t)-u(t_{k-1})]\right\|_H^2 dt \le \\ \le \tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_H^p dt\right)^{2/p}.$$

Пусть для решения задачи (3) выполняются условия (27) и (33), а подпространства V_h удовлетворяют условиям (25) и (14). Тогда из (5), (34) и (26) получим оценку

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_H^2 \le M\left\{\left\|P_h u^0-u_0^h\right\|_H^2+\right. \\ +h^2\left(\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)\right\|_V^2+\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2 dt\right)+ \\ \left. +\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^p dt\right)^{2/p}\right\}.$$

Воспользовавшись в аналогичной ситуации оценкой (29), получим

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2\tau \le \\ \le M\left\{\left\|P_h u^0-u_0^h\right\|_H^2+h^2\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2 dt+\right. \\ \left. +\left(\tau^{1-2/p}h^4+\tau^{3-2/p}\right)\left(\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^p dt\right)^{2/p}\right\}.$$

Оценим в тех же условиях

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_V^2\tau\le 2\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t_k)-u(t)\right\|_V^2 dt+ \\ +2\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t)-u_k^h\right\|_V^2 dt. \quad (35)$$

Из (35), (20), (25) и (34) получим оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_V^2\tau\le M\left\{\left\|P_h u^0-u_0^h\right\|_H^2+\right. \\ \left.+h^2\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2 dt+\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^p dt\right)^{2/p}\right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смагин В.В., Тужикова М.В.* О слабой разрешимости нелинейной вариационной задачи параболического типа // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — 2004. № 1. С. 153—156.

2. *Смагин В.В.* Энергетическая сходимость погрешности проекционно-разностного метода для слабо разрешимых параболических уравнений // Труды математ. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. — 1999. № 4. С. 114—119.

3. *Вайникко Г.М., Оя П.Э.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. ур-ния. — 1975. Т.11, № 7. С.1269—1277.

4. *Смагин В.В.* Оценки погрешности проекционного метода для параболических уравнений с несимметричными операторами // Труды математ. ф-та (новая серия). Воронеж. гос. ун-т. — 1997. № 2. С. 63—67.

5. *Смагин В.В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Математ. сборник. — 1997. Т. 188, № 3. С. 143—160.

6. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

7. *Смагин В.В.* Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами // Дифференц. ур-ния. — 2001. Т. 37, № 1. С. 115—123.

8. *Смагин В.В.* Коэрцитивная энергетическая сходимость проекционно-разностного метода для параболических уравнений // Вестник ВГУ. Серия физика, математика — 2002. № 2. С. 96—100.