УДК 517.98

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПРЕДЕЛОВ БАНАХА ЭЛЕМЕНТАМИ ПРОСТРАНСТВА ℓ_1

А. А. Седаев*

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Статья посвящена обсуждению и решению проблемы аппроксимации пределов Банаха элементами пространства ℓ_1, поставленной Ю. Аппелем, Е. Де Паскале и П. П. Забрейко. В качестве приложения мы решаем вопрос С. В. Конягина о свойствах характеристической функции банаховых пределов.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть E банахово пространство и E^*, E^{**} первое и второе его сопряженные. Согласно теоремам Алаоглу и Голдстайна (см. например, [1], теоремы V.4.2 и V.4.5) единичный шар сопряженного пространства E^* бикомпактен в слабой топологии, порожденной пространством E, а единичный шар пространства E плотен в единичном шаре пространства E^{**} в слабой топологии, порожденной E^*. Опираясь на эти результаты в [2] было показано, что множество $\mathcal{E} = \{\bar{e}_n\}_{n=1}^\infty$ векторов стандартного базиса ℓ_1, рассматриваемое в $\ell_1^{**} = \ell_\infty^*$, снабженном слабой топологией, порожденной ℓ_∞, в качестве своих точек сгущения (*кластерных точек*) имеет множество $\mathbf{\Omega}$ тех и только тех *положительных линейных функционалов на* ℓ_∞, которые обладают следующими замечательными свойствами:

1) на подпространстве $c \subset \ell_\infty$ сходящихся последовательностей они равны их пределу (то есть продолжают на все ℓ_∞ обычный предел $\lim$);

2) переводят произведение элементов ℓ_∞ в произведение их образов.

Таким образом кластерные точки множества $\mathcal{E}$ согласно 1) представляют собой некоторое множество обобщенных пределов, а согласно 2) образуют множество непрерывных характеров на ℓ_∞, обращающихся в 0 на подпространстве c_0 сходящихся к нулю последовательностей, то есть множество характеров коммутативной C^*-алгебры ℓ_∞/c_0.

Там же был поставлен вопрос о приближении элементами пространства ℓ_1 классических обобщенных пределов Банаха $L \in \ell_\infty^*$, обладающих наряду со свойством 1) еще и свойством

3) $L(Tx) = L(x)$, где $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$, а T оператор левого сдвига $T\{x_i\}_{i=1}^\infty = \{x_i\}_{i=2}^\infty$.

Легко видеть, что свойства 2) и 3) между собой не совместимы.

Обобщенные пределы относятся к классическому функциональному анализу. Их существование первоначально было получено самим С. Банахом как изящное приложение знаменитой теоремы Хана—Банаха о продолжении линейных функционалов. Они находят многочисленные применения в самых разных областях. Так в работе [3] они были использованы для построения сингулярных симметричных функционалов и следов, которые в свою очередь находят применение в некоммутативной геометрии А. Конна [4]. В [3] был построен пример банахова предела $\mathcal{L}$, который инвариантен относительно действия любого оператора растяжения (кратного повторения элементов) последовательности $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty$, а также инвариантен относительно действия оператора Харди H, который n-ный элемент последовательности $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty$ заменяет на среднее арифметическое первых n ее элементов.

Е. М. Семенов предложил в качестве инструмента описания свойств обобщенных пределов использовать числовую функцию $F_L(t)$, $t \in [0,1]$, определяемую формулой $F_L(t) = L(B(t))$, где через $B(t)$ обозначена последовательность цифр двоичного разложения числа $t \in [0,1]$. Как следует из [2] теорема 2, если $L \in \mathbf{\Omega}$, то $F_L(t)$ во всех точках равна либо нулю, либо единице. Наоборот, согласно закону больших чисел

$$F_{\mathcal{L}}(t) = 1/2 \text{ почти повсюду} \qquad (1)$$

В связи с этим у С. В. Конягина возник вопрос, является ли последнее равенство уникальным,

---

* Работа поддержана РФФИ, грант 05-01-00629 и программой “Университеты России”, грант УР.04.01.016.

или кроме $\mathcal{L}$ существуют и другие обобщенные пределы, удовлетворяющие (1)?

В данной работе полностью решается вопрос, поставленный в [2], и приводятся некоторые следствия, вытекающие из полученного результата. В частности будет показано, что кроме $\mathcal{L}$ равенству (1) удовлетворяет широкий класс других банаховых пределов. Наши построения будут основаны на теореме Сачестона [5], утверждающей, что для любого предела Банаха L и любого $x \in \ell^\infty$ справедливо точное неравенство

$$\lim_{m\to\infty} \inf_{1\le n<\infty} f_{m,n}(x) \le L(x) \le \lim_{m\to\infty} \sup_{1\le n<\infty} f_{m,n}(x). \quad (2)$$

При этом ясно, что предел можно брать не только по $m \to \infty$, но и по любой подпоследовательности $m_j \to \infty$. Выражения, стоящие в левой и правой частях неравенства (2) определяют на ℓ_∞ две полунормы $p(x)$ и $q(x)$. Согласно теореме Лоренца [5,6] существует нетривиальное подпространство ac пространства ℓ_∞, квалифицированно содержащее подпространство $c \subset \ell_\infty$, на котором обе полунормы равны, и на элементах которого все пределы Банаха имеют одинаковые значения. Такие элементы пространства ℓ_∞ принято называть *почти сходящимися*.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим на пространстве ℓ_∞ ограниченных последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty$ функционалы $f_{m,n}$, $m,n \in \mathbb{N}$, следующего вида

$$f_{m,n}(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=n}^{n+m-1} x_i. \quad (3)$$

Очевидно, что любой функционал $f_{m,n}$ принадлежит ℓ_1 — пространству суммируемых последовательностей, и отождествляется там с последовательностью $\{y_i\}_{i=1}^\infty$, носитель которой расположен на промежутке $[n, n+m-1]$, при этом $y_i = 1/m$ для $n \le i \le m+n-1$. Если обозначить через e_n, $n = 1,2,\dots$, стандартный базис в ℓ_1 и через $Co(\ell_1)$ выпуклую оболочку его элементов, то становится ясно, что функционалы $f_{m,n}$ являются элементами $Co(\ell_1)$ специального вида. В частности $\overline{e}_n = f_{1,n}$.

Обозначим через $SF(\{m_i\},\{n_i\})$ множество функционалов $\{f_{m_i,n_i}\}$, где $\{m_i = 8^i\}$ — фиксированная, а $\{n_i\}$ — некоторая последовательность.

Пусть

$$SF0 = \cup SF(\{m_i\},\{n_i\}),$$

где объединение берется по всевозможным последовательностям $\{n_i\}$.

Рассмотрим на сопряженном пространстве ℓ_∞^* ослабленную топологию $w^* = \sigma(\ell_\infty^*, \ell_\infty)$. Согласно теореме Алаоглу единичный шар B пространства ℓ_∞^* компактен в этой топологии. Это значит, что любое его бесконечное подмножество A имеет в B кластерные точки (то есть такие точки, что каждая их w^*-окрестность содержит бесконечно много точек из множества A).

Обозначим через $SFL(\{m_i\},\{n_i\})$ *множество w^*-кластерных точек* множества $SF(\{m_i\},\{n_i\})$, взятых в пространстве ℓ_∞^*. Согласно упомянутой теореме компактности это множество не пусто.

Предложение 1.

(i) *Пусть f есть w^*-кластерная точка для некоторой последовательности функционалов $\{f_n\}$, и пусть* $\limsup_{n\to\infty} f_n(x_0) \le A$ ($\liminf_{n\to\infty} f_n(x_0) \ge A$) *для некоторого* $x_0 \in \ell_\infty$. *Тогда* $f(x_0) \le A$ ($f(x_0) \ge A$). *В частности, если* $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = A$, *то* $f(x_0) = A$.

(ii) *Все точки из $SFL(\{m_i\},\{n_i\})$ являются пределами Банаха.*

Доказательство. (i) Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $m \in N$, что $| f(x_0) - f_m(x_0) | < \varepsilon$ и одновременно $f_m(x_0) - A < \varepsilon$. Тогда

$$f(x_0) - A \le f(x_0) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - A < 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε это и означает, что $f(x_0) \le A.$ Остальных утверждения из (i) доказываются аналогично.

(ii) Пусть f кластерная точка множества $SF(\{m_i\},\{n_i\})$. Функционалы $f_{m,n}$ положительны, $f_{m,n}(\mathbf{1}) = 1$ и с ростом m почти инвариантны относительно сдвига: $\left|f_{m,n}(x) - f_{m,n}(Tx)\right| \le \le 2\|x\|_\infty / m \to 0$ при $m \to \infty$. По доказанному в (i) любая кластерная точка f множества $SF(\{m_i\},\{n_i\})$ представляет собой положительный непрерывный линейный функционал такой, что $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Отсюда следует выполнение для f свойства 1).

Проверим 2). Зафиксируем произвольные $x \in \ell_\infty, \varepsilon > 0$ и выберем m_j, n_j так, чтобы

$$\left|f(x) - f_{m_j,n_j}(x)\right| < \varepsilon,$$

$$\left|f(Tx) - f_{m_j,n_j}(Tx)\right| < \left|\varepsilon, f_{m_j,n_j}(Tx) - f_{m_j,n_j}(x)\right| < \varepsilon.$$

Тогда очевидно, что $\left|f(Tx) - f(x)\right| < 3\varepsilon.$ Предложение доказано.

Пусть BL множество всех пределов Банаха на пространстве ℓ_∞. Это множество есть выпуклое, замкнутое и, следовательно, w^*-компактное подмножество единичного шара сопряженного пространства ℓ_∞^*.

Обозначим через K *объединение всех* w^*-*кластерных точек множеств* $SF(\{m_i\},\{n_i\})$, *где объединение берется по всевозможным последовательностям* $\{n_i\}$. В силу сказанного выше, множество K не пусто и состоит только из пределов Банаха.

Теорема 1. *Любой предел Банаха на* ℓ^∞ *принадлежит множеству* K — w^*-*замыканию выпуклой оболочки множества K.*

Доказательство. Множество $\mathcal{K}$ очевидно есть выпуклое w^*-компактное множество функционалов на ℓ^∞.

Предположим, что существует банахов предел L, который не принадлежит $\mathcal{K}$. Тогда существует w^*-окрестность L, которая не содержит это множество. То есть найдутся такие $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \ell^\infty$, для которых w^*-окрестность

$$\{f \in \ell_\infty^* \mid L(x_j) - 1 < f(x_j) < L(x_j) + 1, \quad j = 1, 2, \ldots, k,\} \tag{4}$$

не содержит функционалы из $\mathcal{K}$.

Пусть H — подпространство ℓ_∞^*, равное пересечению гиперподпространств $H_j = \{f \in \ell_\infty^*, f(x_j) = 0\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, коразмерности, не превосходящей k, и пусть G — подпространство ℓ^∞, натянутое на $x_1, x_2, \ldots x_k$. Тогда между конечномерными пространствами G и $F = \ell_\infty^*/H$ имеет место отношение двойтвенности, являющееся сужением отношения двойственности между ℓ^∞ и ℓ_∞^*. Обозначим через $[A]$ класс эквивалентности в $F = \ell_\infty^*/H$ объекта A из ℓ_∞^*. Тогда $[\mathcal{K}]$ не содержит $[L]$. В силу конечномерности пространства F и выпуклости множества $[\mathcal{K}]$ существует гиперплоскость, отделяющая точку $[L]$ от множества $[\mathcal{K}]$. Это означает, что существует линейная комбинация x_0 элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ такая, что для всех $[f] \in [\mathcal{K}]$ выполняется неравенство

$$[f](x_0) < [L](x_0) - 1.$$

Отсюда немедленно следует, что для того же элемента $x_0 \in \ell^\infty$ и всех $f \in \mathcal{K}$

$$f(x_0) < L(x_0) - 1. \tag{5}$$

Но по теореме Сачестона существуют $n_i = n(m_i)$ такие, что

$$\lim_{m_i \to \infty} f_{m_i, n(m_i)}(x_0) \geq L(x_0) > L(x_0) - 1.$$

Согласно предложению 1 отсюда следует, что и для кластерных элементов из множества $SFL(\{m_i\},\{n(m_i)\})$ выполняется такое же неравенство. Так как $\mathcal{K} \supset K \supset SFL(\{m_i\},\{n(m_i)\})$ мы приходим к противоречию. Теорема 1 доказана.

По построению $K \subset BL$. Отсюда получаем

Следствие 1. *Множество банаховых пределов* BL *совпадает с множеством* $\mathcal{K}$.

К сожалению, не ясно, является ли множество K w^*-замкнутым. Поэтому рассмотрим его w^*-замыкание $\overline{K}$. Очевидно, что $\overline{K}$ есть компактное подмножество множества BL всех банаховых пределов и для него, как и для K, справедливо утверждение теоремы 1. Согласно частичному обращению теоремы Крейна—Мильмана (смотри Эдвардс [7], предложение 10.1.3.) мы имеем

Следствие 2. w^*-*компактное множество* $\overline{K}$ *содержит все крайние точки множества BL.*

Здесь следует упомянуть содержательную и незаслуженно забытую работу М. Джерисона [8], в которой еще до Л. Сачестона была получена оценка (2) и предложено другое множество, замкнутая выпуклая оболочка которого совпадает с множеством BL. А именно, *таковым является множество кластерных точек в* ℓ_∞^* *последовательностей вида* $\{\omega(T_n x)\}$, $\omega \in \Omega$, *где* $T_n x = \{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{i+k-1}\}_{i=1}^\infty$, *а* $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty$. Недостатком этого подхода является существенное применение функционалов из Ω (смотри введение и [2]), которые сами не имеют конструктивного построения.

Легко понять, что все точки из $\overline{K}$ могут быть получены в качестве кластерных точек некоторых бесконечных подмножеств из множества $SF0$. Следующая теорема уточняет, какие именно подмножества из $SF0$ порождают элементы множества $\overline{K}$.

Теорема 2. *Для каждого* m_k, $k = 1, 2, \ldots$, *множество* $B(m_k)$ *тех функционалов* $f_{m_i, n} \in SF0$, *для которых* $m_i \leq m_k$, *а* n *любое, не может иметь банахов предел в качестве своей кластерной точки.*

Доказательство. Предположим противное, пусть банахов предел N есть кластерная точка $B(m_k)$. Рассмотрим периодический с периодом $p = m_k + 2$ элемент x_0 пространства ℓ_∞, у которого первые m_k координат равны нулю, а две следующие координаты равны соответственно $+1$ и -1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_p$ элементы, полученные сдвигом x_0 соответственно на 1, 2, ..., p влево. Так как x_0, а с ним и все $x_1, x_2, \ldots, x_p$ по теореме Лоренца—Сачестона почти сходятся к нулю, то $N(x_i) = 0,\ i = 0,1,2,\ldots,p$.

В свою очередь легко понять, что любой $f_{m,n}$ с $m < m_k < p$ имеет носитель длины меньше p. Поэтому среди элементов $x_i,\ i = 0,1,2,\ldots,p$, обязательно найдется такой, для которого пересечение его носителя с носителем $f_{m,n}$ будет состоять ровно из одного элемента. Следовательно, $\max\{|f_{m,n}(x_i)|,\ i = 0,1,2,\ldots,p\} = 1/m > 1/m_k$ для всех $f_{m,n},\ m < m_k < p$. Поэтому банахов предел N не может быть кластерной точкой множества таких элементов. Противоречие.

Теорема доказана.

Так как любой банахов предел может быть приближен в w^*-топологии выпуклыми комбинациями элементов множества K, а те, в свою очередь, могут быть приближены элементами множества $SF0$, то любой банахов предел может быть приближен (в w^*-топологии) выпуклыми комбинациями элементов множества $SF0$. Так как все элементы $SF0$ содержатся в выпуклой оболочке $Co(\ell_1)$ базисных векторов пространства $\ell_1 \subset \ell_\infty^*$, то становится ясно, что любой банахов предел можно приблизить (в w^* - топологии) выпуклыми комбинациями $f_a = \sum_1^\infty a_n \bar{e}_n$, базисных векторов $\bar{e}_n$ пространства ℓ_1, которые мы отождествили с $f_{1,n}$. Здесь

$$a = \{a_n\},\ \sum_1^\infty a_n = 1,\ a_n \geq 0,\ n = 1,2,\ldots \qquad (6)$$

При этом, если $x = \{x_i\}_1^\infty \in \ell_\infty$, то $f_a(x) = \sum_1^\infty a_n x_n$. Следующая теорема уточняет, какими именно выпуклыми комбинациями приближаются банаховы пределы.

Теорема 3. *Для того, чтобы бесконечное множество $B \subset Co(\ell_1) \subset \ell_\infty^*$ имело своими кластерными точками только функционалы, инвариантные относительно сдвига, необходимо, чтобы*

(*) *для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $A_n = \{a_\nu \in B, \|a_\nu\|_\infty > 1/n\}$ было конечно.*

Доказательство. Предположим противное — для некоторого $n \in \mathbb{N}$ множество A_n бесконечно. Тогда в силу w^* - компактности у A_n существует кластерная точка L, которая по условию теоремы является функционалом из ℓ_∞^*, инвариантным относительно сдвига. Так как $L(\mathbf{1}) = 1$ и L, очевидно, неотрицателен, то он является банаховым пределом. Рассмотрим периодическую с периодом $p = 2n$ последовательность $x_0 \in \ell_\infty$, у которой первые $p-1$ членов равны нулю, а p-й член равен 1. В силу периодичности эта последовательность почти сходится к $1/p$ (см (2)). Поэтому $L(x_0) = 1/p$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_p$ последовательности, получаемые из x_0 сдвигом влево на $1,2,\ldots,p$, соответственно. Тогда очевидно $\max_{0\leq i\leq p} f_{a_\nu}(x_i) \geq$ $\geq 1/n = 2/p$ для любого $a_\nu \in A_n$. В то же время, в силу инвариантности L относительно сдвига, $L(x_i) = 1/p,\ i = 0,1,2,\ldots,p$. Следовательно L не может быть w^* - кластерной точкой множества A_n. Противоречие.

Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (*) теоремы 3 не является достаточным. Пусть $B = \{a_n =$ $= (0,1/n,0,1/n,\ldots 0,1/n,0,0,\ldots)\},\ n = 1,2,3,\ldots$, где у последовательности a_n первые $2n$ членов поочередно принимают значения 0 и $1/n$, а остальные члены нули. Такие последовательности a_n удовлетворяют условию (6) и условию (*) теоремы 3. Однако для $y = (0,1,0,1,\ldots) \in \ell_\infty$ имеем $f_{a_n}(y) - f_{a_n}(T_1 y) = 1,\ n = 1,2,\ldots$. То есть предельные функционалы для такого B не могут быть инвариантны относительно сдвига.

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ БАНАХОВЫХ ПРЕДЕЛОВ

Обозначим через $DS \subset \ell_\infty$ множество последовательностей из нулей и единиц, которое с точностью до двоично-рациональных чисел можно отождествить с множеством действительных чисел на отрезке $I = [0,1]$. В частности, на множестве DS таким образом определена вероятностная мера μ (мера Лебега на отрезке I).

Характеристической функцией обобщенного предела L назовем функцию $F_L(t) = L(B(t))$, где $B(t)$ есть последовательность цифр двоичного разложения числа $t,\ 0 \leq t \leq 1$.

Пусть $z_i = z_i(t)$ i-тая цифра двоичного разложения $t \in [0,1]$. Это случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $([0,1],\mu)$, где μ — мера Лебега. Хорошо известно, что случайные величины $z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots$ независимы, одинаково распределены и имеют математическое ожидание $M(z_i) = 1/2$ и дисперсию $D(z_i) = 1/4$. При этом с учетом отождествления DS и I сужение функционала $f_{1,n}$ на DS порождает на этом вероятностном пространстве случайную величину, совпадающую с $z_n,\ n = 1,2,\ldots$. Рассмотрим случайную величину $u_{m,n}(x),\ x \in DS$, определенную по формуле

$$u_{m,n} = u_{m,n}(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=n}^{n+m-1} f_{1,i}.$$

Ясно, что $u_{m,n}(x) = f_{m,n}(x)$. Так как слагаемые, в формуле, определяющей $u_{m,n}$ независимые случайные величины, то $M(u_{m,n}) = M(z_i) = 1/2$, $D(u_{m,n}) = (mD(z_i))/m^2 = 1/(4m)$.

По неравенству Чебышева для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\mu\{x \in DS, \left|u_{m,n} - M(u_{m,n})\right| > \varepsilon\} \leq \frac{D(u_{m,n})}{\varepsilon^2}. \quad (7)$$

Или

$$\mu\{x \in DS, \left|u_{m,n}(x) - 1/2\right| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{4m\varepsilon^2}$$

равномерно по $n \in \mathbb{N}$. В частности, если $\varepsilon = 2^{-j}$, то при $m = m_j = 2^{3j}$

$$\mu\{x, \left|u_{m,n}(x) - 1/2\right| > 2^{-j}\} =$$
$$= \mu\{x, \left|f_{m,n}(x) - 1/2\right| > 2^{-j}\} < 2^{-j}$$

независимо от n.

Теорема 4. *Для любого $L \in K$ и для почти всех $x \in DS$ имеет место равенство $L(x) = 1/2$.*

Доказательство. Согласно определению множества K функционал $L \in SFL(\{m_j\}, \{n_j\})$ для некоторой последовательности $\{n_j\}$). По неравенству Чебышева для последовательности $\{m_j = 8^j\}_{j=1}^{\infty}$ и любого n

$$\mu\{x \in DS, \left|f_{m_j}, n(x) - 1/2\right| > 2^{-j}\} < 2^{-j},\ j = 1, 2, \ldots.$$

В частности, для любой фиксированной последовательности $\{n_j\}$

$$\mu\{x \in DS, \text{ что } \left|f_{m_j}, n_j(x) - 1/2\right| > 2^{-k}, \text{ хотя бы для одного из } j = k, k+1, \ldots\} \leq$$

$$\leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu\{x \in DS, \left|f_{m_j}, n_j(x) - 1/2\right| > 2^{-j}\}\} \leq$$

$$\leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} \leq 2^{-k+1}.$$

Отсюда, согласно предложению 1 (i) мы получаем, что для любого $L \in SFL(\{m_j\}, \{n_j\})$ выполняется неравенство

$$\mu\{x \in DS, \left|L(x) - 1/2\right| \geq 2^{-k}\} \leq 2^{-k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \quad (8)$$

Таким образом, для почти всех $x \in DS$ имеет место равенство $F_L(x) = 1/2$.

Теорема доказана.

С учетом теоремы 3 мы можем доказать даже более общий результат.

Теорема 5. *Пусть функционал $N \in \ell_\infty^*$ есть кластерная точка последовательности $B = \{a_\nu\}, \nu \in N$, где последовательности $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$, удовлетворяют (6) и $\|a_\nu\|_\infty \leq 1/8^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Тогда для почти всех $x \in DS$ $N(x) = 1/2$.*

Доказательство. Легко видеть, что сужение на множество DS функционала f_{a_ν} имеет следующий вид

$$f_{a_\nu}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\nu) f_{1,i}(x), \quad a_\nu = (a_1(\nu), a_2(\nu), \ldots), \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in DS, \quad (9)$$

где $f_{1,i}(x) = x_i$ есть i-я координата двоичной последовательности x. Так как $f_{1,i}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин на $\{DS, \mu\}$ с $M(f_{1,i}) = 1/2, D(f_{1,i}) = 1/4$, то согласно (9) математическое ожидание случайной величины f_{a_ν} равно 1/2, а дисперсия равна сумме дисперсий независимых слагаемых $a_i(\nu) f_{1,i}$, $i = 1, 2, \ldots$. То есть

$$D(f_{a_\nu}) = \sum_{i=1}^{\infty} D(a_i(\nu) f_{1,i}) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i(\nu))^2 D(f_{1,i}) =$$
$$= 1/4 \sum_{i=1}^{\infty} (a_i(\nu))^2 \leq \|a_\nu\|_\infty \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\nu) = \|a_\nu\|_\infty. \quad (10)$$

Пусть $N \in \ell_\infty^*$ есть кластерная точка множества B. Рассмотрим $g_n = f_{a_n}$ как случайные величины на (DS, μ). В силу неравенства (10) дисперсия $D(g_n) = D(f_{a_n}) \leq \|a_n\|_\infty \leq 8^{-n}$.

Тогда на основе неравенства Чебышева (см. (7)) при $\varepsilon = 2^{-n}$ имеем

$$\mu\{x \in DS, \left|g_n(x) - 1/2\right| > \varepsilon\} \leq \frac{D(g_n)}{\varepsilon^2} < \frac{1}{8^n 4^{-n}} = 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно,

$$\mu\{x \in DS, \text{ что } \left|g_n(x) - 1/2\right| > 2^{-m}, \text{ хотя бы для одного из } n = m, m+1, \ldots\} \leq$$

$$\leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu\{x \in DS, \left|g_n(x) - 1/2\right| > 2^{-n}\}\} \leq$$

$$\leq \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} \leq 2^{-m+1}.$$

Отсюда, согласно предложению 1 (i) мы получаем, что для N выполняется неравенство

$$\mu\{x \in DS, \left|N(x) - 1/2\right| \geq 2^{-m}\} \leq 2^{-m+1}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, для почти всех $x \in DS$ имеет место равенство $N(x) = 1/2$.

Теорема доказана.

Е. М. Семенов доказал, что если характеристические функции двух банаховых пределов равны, то такие пределы совпадают. В связи с этим и предыдущими результатами у него возник вопрос: существуют ли различные банаховы пределы, у которых характеристические функции равны почти всюду? Ответ на этот вопрос положительный.

Действительно, рассмотрим в качестве L_1, L_2 некоторые кластерные точки двух последовательностей $SF(\{m_i\},\{n_i^1\})$ и $SF(\{m_i\},\{n_i^2\})$, в которых последовательности $\{n_i^1\},\{n_i^2\}$ выбраны так, чтобы множества $S_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{n_i^1, n_i^1+1,\ldots, n_i^1+m_i-1\}$, $S_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{n_i^2, n_i^2+1,\ldots, n_i^2+m_i-1\}$ (объединение носителей функционалов из $SF(\{m_i\},\{n_i^1\})$ и $SF(\{m_i\},\{n_i^2\})$) не пересекались.

Пусть $x_0 \in \ell_\infty$ есть характеристическая последовательность множества $S_1 : x_0 = \chi_{S_1}$. Тогда все функционалы из множества $SF(\{m_i\},\{n_i^1\})$ равны на x_0 единице, а функционалы из множества $SF(\{m_i\},\{n_i^2\})$ на x_0 равны нулю. Следовательно, по предложению 1 $L(x_0)=1$, $L_2(x_0)=0$.

В то же время по теореме 4 оба функционала равны $1/2$ почти для всех $x \in DS$. Что и требовалось доказать.

Автор благодарен Е. М. Семенову за поддержку и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы общая теория М.: ИЛ, 1962. — 895 с.

2. *Appel J., De Pascale E., Zabrejko P.P.* Some remarks on Banach limits // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, — 1994, XLII, P. 273—278.

3. *Доддс П.Г., Де Пагтер Б., Седаев А.А., Семенов Е.М.Сукочев Ф.А.* Сингулярные симметричные функционалы и банаховы пределы с дополнительными свойствами инвариантности // Известия АН РФ. Серия математическая, — 2003, Т. 67, № 6, С. 111—136.

4. *Connes A.* Noncommutative Geometry Academic Press, New York, 1994.

5. *Sucheston L.* Banach Limits // Amer. Math. Monthly, — 1967, P. 305—311.

6. *Lorentz G.G.* A contribution to the theory of divergent sequences // Acta Math. — 1948, P. 167—190.

7. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ М: Мир, 1969. — 1071 с.

8. *Jerison M.* The set of all generalized limits of bounded sequences // Canad. J. Math. — 1957, № 9, P. 79—89.