УДК 512.

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ ЛИ $M(2,\mathbb{C})$

Н. С. Пушмина, С. С. Черных, А. А. Седаев*

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Получено семейств базисных двумерных комплексных матриц, задающих все двумерные не подобные друг другу вещественные подалгебры четырехмерной комплексной алгебры Ли $M(2,\mathbb{C})$. Описание всех различных алгебр Ли является полезным инструментом изучения однородных многообразий. Результаты данной работы будут применены при описании аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей трехмерного комплексного пространства.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При изучении однородных многообразий [1,3] важным инструментом исследования могут оказаться списки различных матричных подалгебр Ли (см., например, [2, 4]). Получению одного такого списка и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим множество $M(2,\mathbb{C})$ матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с комплексными элементами a,b,c,d как линейное пространство над полем вещественных чисел. С помощью операции скобки $[A,B]=AB-BA,\ A,B,\in M(2,\mathbb{C})$, в пространстве $M(2,\mathbb{C})$ вводится структура алгебры Ли.

Определение 1. *Вещественное линейное подпространство L пространства $M(2,\mathbb{C})$ замкнутое относительно операции скобки будем называть* **вещественной подалгеброй** *алгебры Ли $M(2,\mathbb{C})$.*

Пусть $C\in M(2,\mathbb{C})$ обратимая комплексная матрица. Определим с ее помощью на $M(2,\mathbb{C})$ преобразование подобия $S_C(A)=CAC^{-1},\ A\in M(2,\mathbb{C})$.

Определение 2. *Две вещественные подалгебры Ли L_1 и L_2 считаются эквивалентными, если для некоторого $C\in M(2,\mathbb{C})$ имеет место равенство $L_2=S_C(L_1)$.*

Наша цель — описать классы эквивалентности двумерных вещественных подалгебр алгебры Ли $M(2,\mathbb{C})$.

2. ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ БАЗИСНЫХ МАТРИЦ ПОДАЛГЕБР ЛИ

Пусть L — одна из подалгебр, и e_1, e_2 — ее базис. Так как нас интересует только класс эквивалентности, порожденный L, то вместо L мы можем рассмотреть подалгебру $S_C(L)$, порожденную базисом $f_1=S_C(e_1),\ f_2=S_C(e_2)$. Согласно теореме о приведении комплексной матрицы к каноническому виду [5], обратимую комплексную матрицу C можно выбрать так, чтобы первая базисная матрица $f_1=Ce_1C^{-1}$ имела канонический вид. Поэтому, без ограничения общности, мы будем считать, что исходная базисная матрица e_1 уже имеет канонический вид и совпадает с одной из следующих матриц $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ \lambda_1\neq\lambda_2;$ $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \lambda\neq 0;$ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \lambda\neq 0;$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$ где $\lambda_1,\lambda_2,\lambda$ — комплексные или вещественные числа.

Вторая базисная матрица e_2, априори, может быть произвольной, но требование замкнутости L относительно операции скобки существенно ограничивает ее вид. К описанию возможной структуры второго базисного вектора e_2 мы сейчас и перейдем.

1-й случай. Пусть матрица $e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и пусть $e_2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда $[e_1,e_2]=\begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix}=$

$$=xe_1+ye_2=x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\begin{cases} x+yb = d-a \\ ya = c \\ yd = -c \\ yc = 0 \end{cases}$. Из последнего уравнения либо $c=0, y\neq 0$, либо $y=0, c\neq 0$, либо $c=y=0$. В первом случае из второго и третьего уравнений заключаем, что $a=d=0$. Сле-

* Работа поддержана РФФИ-Р 03-01-96493-ЦЧР, РФФИ 05-01-00630

довательно, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому для базисности число b не должно быть вещественным. Таким образом имеем вариант

1. а): базис образуют матрицы $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Случай $y = 0, c \neq 0$ невозможен. Наконец, в случае $y = 0, c = 0$ получаем, что $d - a = x$ есть вещественное число, $a, d \neq 0$ одновременно, а b может быть любым. В результате мы получаем вариант

1. б): базис образуют матрицы $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $a, d \neq 0$ одновременно, $a - d$ вещественное число, а b-любое.

2-й случай: $e_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$, и $e_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Скобка $[e_1, e_2]$ выглядит также, как и в первом случае. Поэтому мы приходим к системе $\begin{cases} x + yb &= d - a \\ x\lambda + ya &= c \\ x\lambda + yd &= -c \\ yc &= 0 \end{cases}$. Исследование этой системы показывает, что в этом случае возможен только следующий вариант.

2: базис образуют матрицы $e_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$, и $e_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, где a, b любые числа, кроме случая вещественной пропорциональности этих матриц.

Замечание 1. Из дальнейшего станет понятно, что подслучай варианта 1 б), когда $a = b$, уместно присоединить к случаю 2. Поэтому далее в варианте 1 б) мы будем считать, что $d - a \neq 0$ и вещественно, а в варианте 2 — λ любое, а $d = a$ всегда. То есть мы ращепляем случай $\lambda = 0$ на вариант 1 б) с $a - d \neq 0$ и вариант 2 с $a = d$.

3-й случай. Рассмотрим базис $e_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и $e_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Отсюда $[e_1, e_2] = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)b \\ (\lambda_2 - \lambda_1)c & 0 \end{pmatrix}$ и, значит, соответствующая система имеет вид $\begin{cases} yb &= (\lambda_1 - \lambda_2)b \\ x\lambda_1 + ya &= 0 \\ x\lambda_2 + yd &= 0 \\ yc &= (\lambda_2 - \lambda_1)c \end{cases}$. Если предположить, что $b, c \neq 0$, то возникает противоречие. Поэтому возможны варианты $c = 0$, $b \neq 0$, или $c \neq 0$, $b = 0$, или $c = 0, b = 0$.

В первом случае $y = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ **вещественное**, и $(a, d) = -x/y(\lambda_1, \lambda_2)$. То есть диагональные элементы матриц e_1, e_2 вещественно пропорциональны, а число b — любое не равное нулю. В результате мы приходим к варианту

3. а): базис образуют матрицы $e_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 - \lambda_2$ вещественное, и $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $b \neq 0$ — любое число.

Аналогично, в случае $b = 0$, $c \neq 0$ получаем, что $y = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ **вещественное**, откуда $(a, d) = -x/y(\lambda_1, \lambda_2)$. То есть диагональные элементы матриц e_1, e_2 вещественно пропорциональны, а c — любое не равное нулю число.

Применяя матрицу $C = C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ замечаем, что в данном случае $S_C(e_1) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и $S_C(e_2) = \begin{pmatrix} d & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$. То есть этот вариант эквивалентен первому и не может породить новое семейство двумерных вещественных алгебр Ли.

Наконец, в случае $b = c = 0$ числа a и d могут быть любыми, но не вещественно пропорциональными числам λ_1, λ_2. Имеем вариант

3. б): базис образуют $e_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и $e_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, причем матрицы не должны быть вещественно пропорциональны.

4-й случай: $e_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$, и $e_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Применим к e_1, e_2 преобразование подобия S_C с некоторой матрицей C. Так как e_1 остается неизменной при применении любого оператора подобия S_C , то за счет выбора матрицы C можно привести e_2 к одному из четырех канонических представлений комплексной матрицы, упомянутых выше. Так как первые три случая нами уже были рассмотрены, то остается рассмотреть только один случай, когда e_2 имеет такую же структуру, как и e_1 . Отсюда имеем вариант

4: базис образуют $e_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$,

где $\lambda, \omega \neq 0$ и ω/λ не является вещественным числом.

Легко проверить следующее простое утверждение: *скобка от линейных комбинаций заданных матриц равна линейной комбинации скобок от этих матриц.*

Поэтому описанные в рассмотренных выше случаях 1-4 базисы действительно порождают вещественные двумерные подалгебры алгебры Ли $M(2,\mathbb{C})$. Как следствие мы получаем следующий результат.

Теорема 1. *Все двумерные вещественные подалгебры алгебры Ли $M(2,\mathbb{C})$ могут быть представлены верхнетреугольными матрицами.*

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СЕМЕЙСТВ ПОДАЛГЕБР

Проверим, нет ли среди получившихся семейств двумерных подалгебр Ли эквивалентных между собой? Так как базисные матрицы из случая 4 при любых преобразованиях подобия не изменяются, то семейство алгебр Ли, заданных базисом из варианта 4, не эквивалентно ни одному из остальных семейств двумерных вещественных подалгебр Ли.

Теорема 2. *Если одна верхнетреугольная двумерная вещественная подалгебра Ли переходит при преобразовании подобия с матрицей C в другую такую подалгебру, то матрица C сама имеет треугольный вид с нулевым элементом c_{21} или c_{22} .*

Доказательство. Согласно теореме 1 все матрицы, порожденные базисами, рассмотренными в случаях 1-3, имеют верхний треугольный вид $X = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix}$. Поэтому, если преобразование подобия S_C переводит одну из наших подалгебр в другую, то матрица $C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ должна быть такой, чтобы образ треугольной матрицы был также треугольной матрицей.

Присоединенной к C будет матрица $T = \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$, а $C^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} T$, где $\Delta = ps - qr \neq 0$ определитель матрицы C .

Возьмем треугольную матрицу $X = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix}$ и подействуем на нее преобразованием подобия с матрицей C :

$$S_C(X) = \frac{1}{\Delta} CXT =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} psu - prv - qrw & -pqu + p^2 v + pqw \\ rsu - r^2 v - rsw & -qru + prv + psw \end{pmatrix} = Z.$$

В результате должна получиться верхнетреугольна матрица Z и, значит,

$$z_{21}\Delta = r(s(u - w) - rv) \equiv 0. \qquad (1)$$

Выясним, что собой представляет матрица X во всех оставшихся не рассмотренными случаях 1-3, ибо в случае 4 X может перейти только в себя.

В случае 1 а) $X = \begin{pmatrix} 0 & x + iy \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $u = 0,\ v = x + iy,$ $w = 0,\ x, y$ любые вещественные числа.

В случае 1 б) $X = \begin{pmatrix} ya & x + by \\ 0 & yd \end{pmatrix}$, $u = ya,$ $v = x + by,\ w = yd,\ x, y, a - d$ любые вещественные числа. Отсюда $u = w = 0$ при $y = 0$, а x и с ним v любые.

В случае 2 $X = \begin{pmatrix} x\lambda + ya & x + yb \\ 0 & x\lambda + ya \end{pmatrix}$, $u = x\lambda + ya,\ v = x + yb,\ w = x\lambda + ya,\ x, y$ любые вещественные числа. Отсюда $u - w = 0$, а v произвольно.

В случае 3 а) $X = \begin{pmatrix} x\lambda_1 & yb \\ 0 & x\lambda_2 \end{pmatrix}$, $u = x\lambda_1,$ $v = yb,\ w = x\lambda_2,\ x, y, \lambda_1 - \lambda_2$ любые вещественные числа. Поэтому $u = w = 0$ при $x = 0$, а $v = yb$ произвольно.

В случае 3 б) $X = \begin{pmatrix} x\lambda_1 + ya & 0 \\ 0 & x\lambda_2 + yd \end{pmatrix}$, $u = x\lambda_1 + ya,\ v = 0,\ w = x\lambda_2 + yd,\ x, y$ любые вещественные числа.

Сделанные замечания показывают, что во всех случаях кроме 3 б) тождество (1) возможно только при условии, что элемент r матрицы C равен нулю. При этом $\Delta = ps$. Отсюда матрица Z имеет вид

$$Z=\begin{pmatrix} u & (pv+q(w-u))/s \\ 0 & w \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

В случае 3 б) (1) возможно либо при $r=0$, $\Delta=ps$ и матрица Z имеет вид (2), либо при $s=0$, $\Delta=-qr$. Тогда, с учетом равенства $v=0$, справедливого в случае 3 б), матрица Z выглядит следующим образом

$$Z=\begin{pmatrix} w & p(u-w)/r \\ 0 & u \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Теорема доказана.

Анализ матриц Z, выражающих собой общий вид элементов соответствующих (семейств) подалгебр Ли в случаях 1—4 после действия на них преобразования подобия приводит к важному утверждению, несложное доказательство которого мы опускаем.

Теорема 3. *Подалгебры из 1 б) и 3 а) и только они подобны друг другу.*

Таким образом существует всего 5 неэквивалентных между собой классов двумерных вещественных подалгебр алгебры Ли $M(2,\mathbb{C})$. Это классы 1 а), 1 б), 2, 3 б) и 4.

4. МИНИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ПАРАМЕТРОВ ПОДАЛГЕБР ЛИ

Хотя все двумерные вещественные подалгебры Ли полностью охвачены перечисленными выше случаями, формулы, задающие общий вид этих семейств, содержат избыточные параметры, а внутри семейств могут оказаться подобные (то есть эквивалентные между собой) подалгебры. Ниже мы будем учитывать то, что одно и то же линейное пространство может задаваться многими базисами, что любые два вещественно не пропорциональных комплексных числа порождают все C, стандартный базис которого состоит из 1 и i, и что образ верхнетреугольной матрицы $X=\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix}$ под действием преобразования подобия с матрицей $C=\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}$ имеет вид (2), а под действием $C=\begin{pmatrix} p & q \\ r & 0 \end{pmatrix}$ диагональная матрица (из случая 3 б) с $v=0$) имеет вид (3). При этом ясно, что, без ограничения общности, s (и, соответственно, r) можно считать равным 1.

Вариант 1 а). С учетом сказанного, очевидно, что случай 1 а) порождает всего одну подалгебру Ли с базисом $e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Вариант 1 б) ≡ 3 а). Базис состоит из матриц $e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $e_2=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, где $d-a\neq 0$ вещественное, а b любое.

С помощью e_1 уничтожим вещественную часть b и поделим e_2 на модуль ненулевого диагонального элемента. В результате мы получим базис $e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} e^{i\phi} & iy \\ 0 & e^{i\phi}+r \end{pmatrix}$, где $0\le\phi<2\pi, r\neq 0, y$ — вещественные числа. Применяя преобразование подобия с матрицей $C=\begin{pmatrix} 1 & -iy/r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, мы приходим к базису $e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi}+r \end{pmatrix}$, где $0\le\phi<2\pi$, $r\neq 0$ — вещественные числа.

Частный случай, не содержащийся в предыдущем двупараметрическом семействе: $e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$, где $r\neq 0$ — вещественное число, которое, без ограничения общности, можно считать 1.

Итог аналогичного исследования остальных подалгебр содержит следующая

Теорема 4. *Перечисленные ниже базисные семейства с минимальным числом параметров порождают все (с точностью до эквивалентности) двумерные вещественные подалгебры алгебры Ли* $M(2,\mathbb{C})$.

I. *Изолированные (Нульпараметрические подалгебры Ли.)*

1) $e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

2) $e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

3) $e_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

II. *Двупараметрические семейства подалгебр Ли*

4) $e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi}+r \end{pmatrix}$, *где* $0\le\phi<\pi$, $r\neq 0$ — *вещественные числа;*

5) $e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} e^{i\phi} & it \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$, *где* $0\le\phi<\pi, t$ — *вещественные числа,* t — *любое.*

6) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & g+ih \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, *где* $g, h \in R$.

7) $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *где* $0 \le \phi \le \psi < \pi$ *— вещественные числа.*

III. *Четырехпараметрическое семейство*

8) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$, *где* μ, ν *— произвольные комплексные числа.*

Замечание 2. *Интервал изменения угловых параметров сужен до* $[0, \pi)$ *для того, чтобы исключить повторение базисов при умножении на* -1.

Авторы благодарны профессору А. В. Лободе за постановку задачи, полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Г.* Современная геометрия. — М: Наука, 1979, 760 с.

2. *Лобода А.В., Ходарев А.С.* Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного коиплексного пространства // Известия ВУЗов. Математика, 2003, № 10. С. 30—38.

3. *Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M.* Homogeneous surfaces in the 3-dimensional affine geometry // Prepr. Ser. Pure Math. Inst. Math. Univ. Oslo. 1995, № 4, P. 1—26.

4. *Loboda A.V.* Three-dimensional real Lie subalgebras of matrix algebra $M(2, C)$ // Russian Journal of Mathematical Physics. 2003, V. 10, № 4, P. 495—500.

5. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.*, Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986, 303 с.