УДК 517.988.63

ВЫНУЖДЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

А. И. Перов, Л. А. Полякова

Воронежский государственный университет

В настоящей статье на основе обобщенного принципа сжимающих отображений в форме, предложенным А. И. Перовым, уточняется и обобщается теорема существования периодических решений некоторых нелинейных систем автоматического регулирования, принадлежащая А. М. Красносельскому. Обобщение состоит в том, что нелинейностям разрешается зависеть не только от самих искомых функций, но также и от их производных. Приводится оценка периодических решений. Указываются условия единственности и в этих условиях дается оценка погрешности метода последовательных приближений нахождения периодических решений.

Рассмотрим систему, динамика которой описывается дифференциальными уравнениями

$$L_1\left(\frac{d}{dt}\right)x_1 = M_1\left(\frac{d}{dt}\right)f_1(t, x_1, ..., x_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (1)$$
$$L_n\left(\frac{d}{dt}\right)x_n = M_n\left(\frac{d}{dt}\right)f_n(t, x_1, ..., x_n).$$

Здесь

$$L_j(p) = p^{l_j} + a_1^j p^{l_j - 1} + ... + a_{l_j}^j, \quad j = 1, ..., n, \qquad (2)$$

$$M_j(p) = b_0^j p^{m_j} + b_1^j p^{m_j - 1} + ... + b_{m_j}^j, \; j = 1, ..., n, \qquad (3)$$

$$l_j \geq m_j + 1, \quad j = 1, ..., n, \qquad (4)$$

нелинейные функции $f_j(t, x_1, ..., x_n)$ будем считать измеримыми и ω-периодическими по времени t,

$$f_j(t + \omega, x_1, ..., x_n) = f_j(t, x_1, ..., x_n), \; j = 1, ..., n, \qquad (5)$$

и непрерывными по совокупности переменных $x_1, ..., x_n$ почти при всех t.

Предположим, что уравнения

$$L_j(p) = 0, \quad j = 1, ..., n, \qquad (6)$$

не имеют ни нулевых, ни чисто мнимых корней вида $p = ik\theta$, где i — мнимая единица, k — произвольное целое число и

$$\theta = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (7)$$

Поэтому определены числа

$$\sigma_j(\omega) = \max_k \left|\frac{M_j(ik\theta)}{L_j(ik\theta)}\right| = \max_k \left|W_j(ik\theta)\right|, \qquad (8)$$

где

$$W_j(p) = \frac{M_j(p)}{L_j(p)}, \quad j = 1, ..., n, \qquad (9)$$

являются *передаточными функциями* соответствующих линейных звеньев W_j. Мы пишем в (8) максимум, а не супремум, так как в силу неравенства (4) всегда имеет место $W_j(p) \to 0$ при $|p| \to +\infty$; в частности это имеет место для $p = ik\theta$ при $|k| \to +\infty$.

Предполагаются выполненными условия

$$\left|f_j(t, x_1, ..., x_n)\right| \leq \alpha_{j1}|x_1| + ... + \alpha_{jn}|x_n| + \beta_j, \quad j = 1, ..., n. \qquad (10)$$

По числам $\sigma_j(\omega)$ и коэффициентам α_{jk} составляется матрица

$$\mathbf{Q}(\omega) = \begin{pmatrix} \sigma_1(\omega)\alpha_{11} & \sigma_1(\omega)\alpha_{12} & \dots & \sigma_1(\omega)\alpha_{1n} \\ \sigma_2(\omega)\alpha_{21} & \sigma_2(\omega)\alpha_{22} & \dots & \sigma_2(\omega)\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_n(\omega)\alpha_{n1} & \sigma_n(\omega)\alpha_{n2} & \dots & \sigma_n(\omega)\alpha_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Теорема 1. (А. М. Красносельский [1]). *Пусть спектральный радиус матрицы* $\mathbf{Q}(\omega)$ *удовлетворяет условию*

$$spr\mathbf{Q}(\omega) < 1. \qquad (12)$$

Тогда система (1) *имеет по крайней мере одно* ω*-периодическое решение, непрерывное вместе с производными до порядка*

$$q = \min_j(l_j - m_j - 1). \qquad (13)$$

Сделаем к этой теореме следующие уточнения. Во-первых, каждое ω-периодическое решение $x_1(t), ..., x_n(t)$ системы (1) имеет непрерывные производные $x_1(t), ..., x_1^{(l_1 - m_1 - 1)}(t), ..., x_n(t), ..., x_n^{(l_n - m_n - 1)}(t)$ т.е. функция $x_j(t)$ имеет непрерывные производные до порядка

$$q_j = l_j - m_j - 1, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

(индивидуальная гладкость).

Во-вторых, вместо вытекающей из (10) оценки $|f_j(t,0,\ldots,0)| \le \beta_j$ достаточно потребовать, чтобы эти функции были суммируемы с квадратом на отрезке $[0,\omega]$,

$$c_j \equiv \left\| f_j(t,0,\ldots,0) \right\|_{L_2(\omega)} = \left(\int_0^{\omega} \left| f_j(t,0,\ldots,0) \right| dt \right)^{1/2} < +\infty. \tag{15}$$

В-третьих, если

$$\xi_j \equiv \left\| x_j(t) \right\|_{L_2(\omega)}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

то

$$\xi \le (\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\omega))^{-1}\mathbf{d}, \tag{17}$$

где $\mathbf{d}$ — вектор-столбец с компонентами $\sigma_1(\omega)c_1, \ldots, \sigma_n(\omega)c_n$. Мы получили оценку периодического решения.

В-четвертых, если вместо (10) выполнено условие Липшица

$$\left| f_j(t,x_1,\ldots,x_n) - f_j(t,y_1,\ldots,y_n) \right| \le \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \left| x_k - y_k \right|, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

то ω — периодическое решение системы (1) не только существует, но и единственно. При этом мы дополнительно предполагаем, что $|f_j(t,0,\ldots,0)| \le \beta_j$, $j = 1, \ldots, n$, или, более общо, что выполнены условия (15).

В-пятых, если при соблюдении последних условий искать периодическое решение методом последовательных приближений $\mathbf{x}^{[0]}(t) \equiv 0, \mathbf{x}^{[1]}(t), \ldots, \mathbf{x}^{[k]}(t), \ldots$ (подробнее об этом методе сказано ниже), то имеют место следующие оценки погрешности: если

$$\eta_j^{[k]} \equiv \left\| x_j(t) - x_j^{[k]}(t) \right\|_{L_2(\omega)}, \tag{19}$$

то

$$\eta^{[k]} \le \mathbf{Q}^k(\omega)(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\omega))^{-1} d, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

где $\mathbf{d}$ — это введенный выше n-мерный вектор (см. (17)).

Мы хотим привести как доказательство сформулированные выше уточнения к теореме 1, так и дать ее дальнейшее развитие. С этой целью рассмотрим линейное звено W со скалярными входами и выходами и с *передаточной функцией*

$$W(p) = \frac{M(p)}{L(p)}, \tag{21}$$

где

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{22}$$

$$M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m, \tag{23}$$

$$n \ge m + 1. \tag{24}$$

Описание функционирования этого звена, к сожалению, громоздко (здесь мы для удобства читателя воспроизводим материал из книги [2, с. 188—190]).

При гладком входе $u(t)$ выход $x(t)$ связан с ним дифференциальным уравнением

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)u(t). \tag{25}$$

Для определения выхода нужны дополнительные условия, которые являются начальными состояниями звена. Изложим один из возможных подходов к построению пространства состояний (вектор обычных начальных условий использовать как начальное состояние по различным причинам неудобно, а в ряде случаев и невозможно).

Уравнение (25) можно (различными способами) записать в виде равносильной системы

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \gamma u(t), \quad x(t) = (\mathbf{z}(t), \mathbf{c}), \tag{26}$$

где γ и $\mathbf{c}$ — фиксированные n-мерные векторы, а квадратная порядка n матрица A имеет собственные значения, совпадающие с нулями многочлена (22). Состояниями звена с передаточной функцией (21) считают векторы $\mathbf{z}$. Тогда при начальном состоянии $z(t_0) = z_0$ выход $x(t)$ звена W определяется равенством

$$x(t) = (e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{z}_0, c) + \int_{t_0}^{t} (e^{(t-s)\mathbf{A}}\gamma, c)u(s)ds. \tag{27}$$

Формула (27) определяет значение выходного сигнала $x(t)$ уже при всех локально суммируемых входах.

Наиболее прост переход к уравнению (26), в котором

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & . & . & . & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \gamma_{n-1} \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n-m-1} = 0,$$
$$\gamma_{n-m} = b_0,$$
$$\gamma_{n-m+1} + \gamma_{n-m}a_1 = b_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_n + \gamma_{n-1}a_1 + \ldots + \gamma_{n-m}a_m = b_m.$$

Напомним, что матрица $\mathbf{A}$ указанного выше вида называется *сопровождающей матрицей Фробениуса* для многочлена $L(p)$.

Если уравнение

$$L(p) = 0 \tag{29}$$

не имеет ни нулевых, ни чисто мнимых корней указанного вида, то при любом ω-периодическом входе $u(t)$ система (26) имеет единственное ω-периодическое решение $\mathbf{z}(t)$, которому отвечает единственный ω-периодический выход $x(t)$ звена W. Этот периодический выход определяется как значение $x(t) = \Pi(\omega)u(t)$ оператора

$$\Pi(\omega)u(t) = \int_0^\omega h(t-s;\omega)u(s)ds, \tag{30}$$

где скалярная функция $h(t-s;\omega)$ определена на всей числовой прямой, ω-периодична и

$$h(t;\omega) = ((\mathbf{I} - e^{\omega\mathbf{A}})^{-1}e^{t\mathbf{A}}\gamma, \mathbf{c}), \quad 0 \le t < \omega. \tag{31}$$

Функцию $h(t;\omega)$ называют импульсно-частотной характеристикой (ИЧХ) звена с передаточной функцией $W(p)$ [5, с. 31]. Физический смысл ИЧХ — это ω-периодическая реакция звена на ω-периодическую последовательность единичных входных импульсов. Отметим еще следующее выражение для передаточной функции (21)

$$W(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\gamma, \mathbf{c}). \tag{32}$$

Рассмотрим систему (26) более подробно:

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_2, \\ \dot z_2 &= z_3, \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &\cdots \\ \dot z_{n-m-1} &= z_{n-m}, \\ \dot z_{n-m} &= z_{n-m-1} + \gamma_{n-m}u(t), \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &\cdots \\ \dot z_{n-1} &= z_n + \gamma_{n-1}u(t), \\ \dot z_n &= -a_n z_1 - a_{n-1}z_2 - a_{n-2}z_3 - \ldots \\ &\quad -a_1 z_n + \gamma_n u(t). \end{aligned} \tag{33}$$

Мы видим, что $x(t) = z_1(t)$. Отметим далее, что $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ непрерывны (точнее абсолютно непрерывны) и так как согласно (33)

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_2, \\ \dot z_2 &= z_3, \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &\cdots \\ \dot z_{n-m-1} &= z_{n-m}, \end{aligned}$$

то $\dot z_1, \dot z_2, \ldots, \dot z_{n-m-1}$ также непрерывны. Формулы

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x(t), \\ z_2(t) &= \dot z_1(t) = \dot x(t), \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &\cdots \\ z_{n-m}(t) &= \dot z_{n-m-1}(t) = x^{(n-m-1)}(t) \end{aligned} \tag{34}$$

показывают, что $x(t)$ имеет непрерывные производные до порядка $n-m-1$ включительно.

Пусть $x(t) = \Pi(\omega)u(t)$ есть ω-периодическое решение уравнения (25) в разъясненном выше смысле. Тогда если

$$x(t) = \sum_k x_k e^{ik\theta t} \tag{35}$$

есть ряд Фурье этого решения, то в силу его гладкости имеем

$$\begin{aligned} \dot x(t) &= \sum_k ik\theta x_k e^{ik\theta t}, \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &\cdots \\ x^{(n-m-1)}(t) &= \sum_k (ik\theta)^{n-m-1} x_k e^{ik\theta t}. \end{aligned} \tag{36}$$

Отметим, что в силу формул (30)—(32)

$$x_k = W(ik\theta)u_k, \tag{37}$$

где u_k — коэффициент Фурье измеримой локально суммируемой ω-периодической функции $u(t)$, т.е.

$$u(t) \sim \sum_k u_k e^{ik\theta t}. \qquad (38)$$

Поэтому из (36) и (37) получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_k W(ik\theta) u_k e^{ik\theta t}, \\ \dot{x}(t) &= \sum_k ik\theta W(ik\theta) u_k e^{ik\theta t}, \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &\cdots \\ x^{(n-m-1)}(t) &= \sum_k (ik\theta)^{n-m-1} W(ik\theta) u_k e^{ik\theta t}. \end{aligned} \qquad (39)$$

Введем новые постоянные, связанные с передаточной функцией (21)

$$\begin{aligned} \sigma^a(\omega) &= \max_k \left| \frac{(ik\theta)^a M(ik\theta)}{L(ik\theta)} \right| = \\ &= \max_k \left| (ik\theta)^a W(ik\theta) \right|, \\ a &= 0,1,\ldots,n-m-1 \end{aligned} \qquad (40)$$

(a в первом случае не степень, а индекс). В теореме 1 были использованы лишь постоянные $\sigma_1(\omega) = \sigma_1^0(\omega), \ldots, \sigma_n(\omega) = \sigma_n^0(\omega)$ для разных звеньев (см. (8)). Из формулы (39), используя обозначения (40), в силу равенства Парсеваля для периодических функций находим

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^2_{L_2(\omega)} &= \omega \sum_k |W(ik\theta)u_k|^2 \le \\ &\le \omega(\sigma^0)^2 \sum_k |u_k|^2 = (\sigma^0)^2 \|u(t)\|^2_{L_2(\omega)}, \\ \|\dot{x}(t)\|^2_{L_2(\omega)} &= \omega \sum_k |ik\theta W(ik\theta)u_k|^2 \le \\ &\le \omega(\sigma^1)^2 \sum_k |u_k|^2 = (\sigma^1)^2 \|u(t)\|^2_{L_2(\omega)}, \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &\cdots \\ \|x^{(n-m-1)}(t)\|^2_{L_2(\omega)} &\le (\sigma^{n-m-1})^2 \|u(t)\|^2_{L_2(\omega)}. \end{aligned} \qquad (41)$$

Извлекая квадратные корни из обеих частей получившихся неравенств окончательно получаем

$$\begin{aligned} \|x^a(t)\|_{L_2(\omega)} &\le \sigma^a \|u(t)\|_{L_2(\omega)}, \\ a &= 0,1,\ldots,n-m-1. \end{aligned} \qquad (42)$$

Новые при $a > 0$ оценки (42) являются центральными в развиваемой нами теории. Нетрудно проверить, что эти оценки оказываются точными.

Вернемся к исходной системе (1), которую рассмотрим теперь в более общем виде, разрешив нелинейностям содержать производные исходных функций

$$\begin{aligned} L_1\left(\frac{d}{dt}\right) x_1 &= M_1\left(\frac{d}{dt}\right) f_1\left(t, x_1, \ldots, x_1^{(l_1-m_1-1)}, \ldots, x_n, \ldots, x_n^{(l_n-m_n-1)}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_n\left(\frac{d}{dt}\right) x_n &= M_n\left(\frac{d}{dt}\right) f_n\left(t, x_1, \ldots, x_1^{(l_1-m_1-1)}, \ldots, x_n, \ldots, x_n^{(l_n-m_n-1)}\right). \end{aligned} \qquad (43)$$

Прежде всего для каждого звена W_j с передаточной функцией (9) построим соответствующие постоянные (см. формулы (40))

$$\begin{aligned} \sigma_j^a(\omega) &= \max_k \left| (ik\theta)^a W_j(ik\theta) \right|, \\ a &= 0,1,\ldots,l_j - m_j - 1, \quad j = 1,..,n. \end{aligned} \qquad (44)$$

Потребуем чтобы были выполнены условия (сравни с условиями (10))

$$\begin{aligned} &\left| f_j(t, x_1, \ldots, x_1^{(l_1-m_1-1)}, \ldots, x_n, \ldots, x_n^{(l_n-m_n-1)}) \right| \le \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{a=0}^{l_k-m_k-1} \alpha_{jk}^a \left| x_k^{(a)} \right| \right) + \varphi_j(t), \; j = 1,\ldots,n, \end{aligned} \qquad (45)$$

где α_{jk}^a — некоторые неотрицательные постоянные, $\varphi_j(t)$ — неотрицательные измеримые ω-периодические функции, суммируемые с квадратом на отрезке $0 \le t \le \omega$.

Конечно же, мы требуем чтобы рассматриваемые функции

$$f_j(t, x_1, \ldots, x_1^{(l_1-m_1-1)}, \ldots, x_n, \ldots, x_n^{(l_n-m_n-1)})$$

были измеримыми и ω-периодическими по t

$$\begin{aligned} &f_j(t+\omega, x_1, \ldots, x_1^{(l_1-m_1-1)}, \ldots, x_n, \ldots, x_n^{(l_n-m_n-1)}) = \\ &= f_j(t, x_1, \ldots, x_1^{(l_1-m_1-1)}, \ldots, x_n, \ldots, x_n^{(l_n-m_n-1)}) \end{aligned} \qquad (46)$$

и непрерывными по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_1^{(l_1-m_1-1)}, \ldots, x_n, \ldots, x_n^{(l_n-m_n-1)}$ почти при всех t.

Для формулировки теоремы 2 составим по числам $\sigma_j^a(\omega)$ и коэффициентам α_{jk}^a квадратную $N \times N$ - матрицу $\mathfrak{Q}(\omega)$, где

$$N = (l_1 - m_1) + (l_2 - m_2) + \ldots + (l_n - m_n) \qquad (47)$$

и

$$\mathfrak{Q}(\omega) = \mathfrak{D}(\omega)\mathfrak{A}. \qquad (48)$$

здесь $\mathfrak{D}(\omega)$ есть диагональная матрица, состоящая из чисел $\sigma_j^a(\omega)$, а именно

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\omega) = \operatorname{diag}\{&\sigma_1^0, \sigma_1^1, \ldots, \sigma_1^{l_1-m_1-1}; \ldots; \\ &\sigma_n^0, \sigma_n^1, \ldots, \sigma_n^{l_n-m_n-1}\}, \end{aligned} \qquad (49)$$

а матрица $\mathfrak{A}$ состоит из коэффициентов α_{jk}^{a} следующим образом

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{ll} l_1 - m_1 & \left\{ \begin{matrix} \alpha_{11}^0 & \alpha_{11}^1 & \dots & \alpha_{11}^{l_1-m_1-1} & \dots & \alpha_{1n}^0 & \alpha_{1n}^1 & \dots & \alpha_{1n}^{l_n-m_n-1} \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ \alpha_{11}^0 & \alpha_{11}^1 & \dots & \alpha_{11}^{l_1-m_1-1} & \dots & \alpha_{1n}^0 & \alpha_{1n}^1 & \dots & \alpha_{1n}^{l_n-m_n-1} \end{matrix} \right. \\ & \quad \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \\ l_n - m_n & \left\{ \begin{matrix} \alpha_{n1}^0 & \alpha_{n1}^1 & \dots & \alpha_{n1}^{l_1-m_1-1} & \dots & \alpha_{nn}^0 & \alpha_{nn}^1 & \dots & \alpha_{nn}^{l_n-m_n-1} \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ \alpha_{n1}^0 & \alpha_{n1}^1 & \dots & \alpha_{n1}^{l_1-m_1-1} & \dots & \alpha_{nn}^0 & \alpha_{nn}^1 & \dots & \alpha_{nn}^{l_n-m_n-1} \end{matrix} \right. \end{array} \right). \tag{50}$$

Отметим, что матрица $\mathfrak{A}$ имеет четко выраженную блочную структуру, причем диагональные блоки являются квадратными матрицами. Первые $l_1 - m_1$ строк являются повторением выписанных в определенном порядке коэффициентов Липшица функции f_1, следующие $l_2 - m_2$ строк являются повторением выписанных в определенном порядке коэффициентов Липшица функции f_2 и т.д.

Теорема 2. *Пусть неотрицательная квадратная матрица $\mathfrak{Q}(\omega)$ является a-матрицей, это означает, что ее спектральный радиус меньше единицы*

$$\operatorname{spr} \mathfrak{Q}(\omega) < 1. \tag{51}$$

Тогда система (43) *имеет по крайней мере одно ω-периодическое решение. Если $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — произвольное ω-периодическое решение системы* (43), *то $x_j(t)$ имеет непрерывные производные до порядка*

$$q_j = l_j - m_j - 1, \quad j = 1, \dots, n \tag{52}$$

(*сравни с* (14)).

Доказательство основано на том, что периодическое решение $x_1(t), \dots, x_n(t)$ системы (43) удовлетворяет следующей системе нелинейных интегральных уравнений

$$\begin{gathered} x_j^a(t) = \int_0^{\omega} h_j^{(a)}(t-s;\omega) f_j(s, x_1(s), \dots, \\ x_1^{(l_1-m_1-1)}(s), \dots, x_n(s), \dots, x_n^{(l_n-m_n-1)}(s))ds, \\ a = 0, 1, \dots, l_j - m_j - 1; \quad j = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{53}$$

И наоборот — периодическое решение системы (53) является также периодическим решением системы (43). Для изучения написанной системы нелинейных интегральных уравнений рассмотрим обобщенное гильбертово пространство $\mathfrak{H} = L_2\left({}^{1}_{l_1-m_1-1}\cdots{}^{n}_{l_n-m_n-1}\right)$, элементами которого являются вектор-функции $x(t) = \operatorname{col}\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, причем каждая компонента (числовая функция) $x_j(t)$ имеет абсолютно непрерывные производные до порядка $l_j - m_j - 2$, а производная $x_j^{l_j-m_j-1}(t) \in L_2(\omega)$. (Конечно, все эти функции предполагаются ω-периодическими.) В качестве обобщенной нормы элемента $x(t)$ примем вектор $[\![x]\!]$ размерности N со следующими компонентами

$$\begin{gathered} [\![x]\!] = col\left\{ \|x_1(t)\|_{L_2(\omega)}, \dots, \|x_1^{(l_1-m_1-1)}(t)\|_{L_2(\omega)}, \dots, \right. \\ \left. \|x_n(t)\|_{L_2(\omega)}, \dots, \|x_n^{(l_n-m_n-1)}(t)\|_{L_2(w)} \right\}. \end{gathered} \tag{54}$$

Обозначим, через $\mathcal{F}$ нелинейный интегральный оператор, порожденный правыми частями системы уравнений (53). Система (53) переписывается в виде одного операторного уравнения

$$\mathbf{x} = \mathcal{F}\mathbf{x} \tag{55}$$

и таким образом речь идет о неподвижной точке отображения $\mathcal{F}$.

Из условия (45) вытекает, что

$$[\![\mathcal{F}\mathbf{x}]\!] \le \mathfrak{Q}(\omega)[\![\mathbf{x}]\!] + \mathbf{d}, \tag{56}$$

где

$$\begin{gathered} \mathbf{d} = \operatorname{col}\{\sigma_1^0 \|\varphi_1(t)\|_{L_2(\omega)}, \dots, \sigma_1^{l_1-m_1-1} \|\varphi_1(t)\|_{L_2(\omega)}; \dots; \\ \sigma_n^0 \|\varphi_n(t)\|_{L_2(\omega)}, \dots, \sigma_n^{l_n-m_n-1} \|\varphi_n(t)\|_{L_2(\omega)}\}. \end{gathered} \tag{57}$$

Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть неподвижная точка отображения $\mathcal{F}$. Тогда из (55) в силе неравенства (56) получаем

$$[\![\mathbf{x}]\!] \le \mathfrak{Q}(\omega)[\![x]\!] + d.$$

Из условия (51), как хорошо известно, вытекает, что матрица $I - \mathfrak{Q}(\omega)$ имеет обратную и эта обратная матрица является неотрицательной: $(I - \mathfrak{Q}(\omega))^{-1}$, получаем оценку

$$[\![\mathbf{x}]\!] \le (I - \mathfrak{Q}(\omega))^{-1}\mathbf{d}. \tag{58}$$

Эта оценка отличается от оценки (17) тем, что в нее включены и оценки производных периодического решения.

Оценка (58) получена в предположении, что система (43) имеет периодическое решение. Покажем теперь, что это периодическое решение действительно существует. Для этого, как мы об этом говорили выше, достаточно установить, что оператор $\mathcal{F}$ имеет неподвижную точку. Для достижения поставленной цели мы применим принцип неподвижной точки Шаудера. Из свойств отображения $\mathcal{F}$ вытекает, что оно является компактным в том смысле, что каждое ограниченное множество пространства $\mathfrak{H}$ преобразуется им в компактное множество. Обозначим через $\mathfrak{S}$ шар из $\mathfrak{H}$ с центром в нуле и радиуса

$$\mathbf{r} = (I - \mathfrak{Q}(\omega))^{-1}\mathbf{d}. \tag{59}$$

Проверим, что

$$\mathcal{F}\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}. \tag{60}$$

Действительно, если $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$, то $[\![\mathbf{x}]\!] \leq \mathbf{r}$. Из оценки (56) в силу (60) вытекает, что

$$[\![\mathcal{F}\mathbf{x}]\!] \leq \mathfrak{Q}(\omega)[\![\mathbf{x}]\!] + \mathbf{d} \leq \mathfrak{Q}(\omega)\mathbf{r} + \mathbf{d} = \mathbf{r}.$$

Осталось сослаться на известный принцип Шаудера (см. по этому поводу [4, с.250]).

Рассмотрим теперь вместо (45) более жесткое условие — условие Липшица

$$\begin{gathered}\Big|f_j(t, x_1, \ldots, x_1^{(l_1-m_1-1)}, \ldots, x_n, \ldots, x_n^{(l_n-m_n-1)}) - \\ - f_j(t, y_1, \ldots, y_1^{(l_1-m_1-1)}, \ldots, y_n, \ldots, y_n^{(l_n-m_n-1)})\Big| \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{a=0}^{l_k-m_k-1} \alpha_{jk}^{a}\left|x_k^{(a)} - y_k^{(a)}\right|\right), \quad j = 1, \ldots, n.\end{gathered} \tag{61}$$

Из него вытекает, что

$$[\![\mathcal{F}\mathbf{x} - \mathcal{F}\mathbf{y}]\!] \leq \mathfrak{Q}(\omega)[\![\mathbf{x} - \mathbf{y}]\!]. \tag{62}$$

Так как выполнено основное условие (51), то применим обобщенный принцип сжимающих отображений [3-4], согласно которому отображение $\mathcal{F}$ имеет в $\mathfrak{H}$ единственную неподвижную точку и эта неподвижная точка может быть получена обычным методом последовательных приближений

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathcal{F}\mathbf{x}^{[k-1]}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{63}$$

начиная с произвольной точки $\mathbf{x}^{[0]}$ из $\mathfrak{H}$, причем скорость сходимости характеризуется следующей оценкой

$$\begin{gathered}[\![\mathbf{x} - \mathbf{x}^{[k]}]\!] \leq \mathfrak{Q}^k(\omega)(I - \mathfrak{Q}(\omega))^{-1}[\![\mathcal{F}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0]\!], \\ k = 1, 2, \ldots .\end{gathered} \tag{64}$$

В заключении заметим, что если в условиях теоремы 2 функции f_j зависят только от переменных $x_1, \ldots, x_n$, т.е. имеет вид $f_j(t, x_1, \ldots, x_n)$, то $\alpha_{jk}^{a} = 0$ при $a = 1, \ldots, l_k - m_k - 1$ (если $l_k - m_k - 1 \geq 1$) и условие (51) для матрицы $\mathfrak{Q}(\omega)$ сводятся к условию (12) для матрицы $\mathbf{Q}(\omega)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский А.М.* Частотные критерии в задаче о вынужденных периодических колебаниях систем автоматического регулирования/ А. М. Красносельский // Автоматика и телемеханика, — 1980, № 9. — С. 23—30.

2. *Красносельский М.А.* Позитивные линейные системы./ М. А. Красносельский, Е. А. Лифщиц, А. В. Соболев. М.: Наука, 1985. — 256 с.

3. *Перов А.И.* Об одном общем методе решения краевых задач/ А. И. Перов, А. В. Кибенко // Изв. АН СССР, сер. математика, — 1966. — 30, № 2. — С. 249-264.

4. *Перов А.И.* Обобщенный принцип сжимающих отображений/ А. И. Перов // Вестник ВГУ, сер. Физика, математика, — 2005, № 1. — С.190—201.

5. *Розенвассер Е.Н.* Колебания нелинейных систем /Е. Н. Розенвассер, М.: Наука, 1969. — 576 с.