УДК 514.83+514.7

ШЕСТЬ КЛАССОВ ПРОСТРАНСТВ МАКСВЕЛЛА, ДОПУСКАЮЩИХ НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ

М. А. Паринов

Ивановский государственный университет

Ключевые слова: *пространство Минковского, группа Пуанкаре, уравнения Максвелла, симплектическая структура, пространство Максвелла, классификация.*

Использование классификации потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре позволило уточнить описание некоторых классов пространств Максвелла. В работе представлено шесть таких классов пространств Максвелла, допускающих нетривиальные группы симметрий.

В работах [1, 2] наиболее полно представлена классификация пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре. Однако, в результате классификации потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре [3] выяснилось следующее: классы пространств Максвелла, соответствующие некоторым подгруппам группы Пуанкаре, вопреки [1] оказались непустыми. Исправлению этой ошибки посвящено настоящее сообщение.

Все используемые здесь обозначения совпадают с теми, что в работах [1, 2]. В частности, компоненты тензора F_{ij} отнесены к галилеевым координатам $\{x^i\}$. Подгруппы группы Пуанкаре обозначаются $G_{k,l}$, соответствующие им алгебры Ли векторных полей на пространстве Минковского — $\mathcal{L}_{k,l}$, а классы пространств Максвелла — $C_{k,l}$.

1. Класс $C_{4,16}$. Алгебре $\mathcal{L}_{4,16} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_3, e_{23} + e_{34} + \lambda e_1, e_{13}, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{4,16}$, порождаемая двумя одномерными подгруппами параболических винтов, подгруппами псевдовращений и трансляций в изотропном направлении.

Теорема 1. *Пространство Максвелла класса* $C_{4,16}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} = -\varphi\Phi_1(u) + \psi\Phi_2(u),\ F_{13} = \Phi_1(u), \\ F_{23} = -F_{34} = \varphi\Phi_2(u) + \psi\Phi_1(u),\ F_{24} = \Phi_2(u), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Phi_1(u) = K/(u^2 + \lambda^2)$, $K = \text{const}$, $\Phi_2(u)$ — *произвольная функция и*

$$u = x^2 + x^4,\ \varphi = \frac{\lambda x^1 + ux^3}{u^2 + \lambda^2},\ \psi = \frac{\lambda x^3 - x^1 u}{u^2 + \lambda^2}. \tag{2}$$

Пример 1. Подставим (2) в (1) и положим $\Phi_2(u) = 0$:

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} &= -\frac{K(\lambda x^1 + (x^2 + x^4)x^3)}{\left((x^2 + x^4)^2 + \lambda^2\right)^2}, \\ F_{13} &= \frac{K}{(x^2 + x^4)^2 + \lambda^2}, \\ F_{23} = -F_{34} &= \frac{K(\lambda x^3 - x^1(x^2 + x^4))}{\left((x^2 + x^4)^2 + \lambda^2\right)^2},\ F_{24} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Предложение 1. *Если* $K \neq 0$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором (3), допускает 4-мерную группу* $G_S = G_{4,16}$.

2. Класс $C_{4,17}$. Алгебре $\mathcal{L}_{4,17} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_{24}, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{4,17}$, порождаемая двумя одномерными подгруппами параболических вращений, группами пропорциональных бивращений и трансляций вдоль изотропной прямой.

Теорема 2. *Пространство Максвелла класса* $C_{4,17}$ *задается тензором* F_{ij} *вида*

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} &= \frac{1}{x^2 + x^4}\left(A\cos\frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} + \right. \\ &\left. + B\sin\frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} + Cx^1\right), \\ F_{23} = -F_{34} &= \frac{1}{x^2 + x^4}\left(B\cos\frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} - \right. \\ &\left. - A\sin\frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} - Cx^3\right), \\ F_{13} = 0,\ F_{24} &= C\ (A, B, C = \text{const}). \end{aligned} \tag{4}$$

Предложение 2. *Если 1)* $C \neq 0$ *и 2)* $A \neq 0$ *(или* $B \neq 0$*), то пространство Максвелла, определяемое тензором* F_{ij} *вида (4), допускает четырехмерную группу* $G_S = G_{4,17}$.

3. Класс $C_{4,20}$. Алгебре $\mathcal{L}_{4,20} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13}, e_{24}\}$ соответствует группа $G_{4,20}$, порождаемая двумя одномерными подгруппами параболических вращений, одномерной группой поворотов и одномерной группой псевдовращений.

Теорема 3. *Пространство Максвелла класса $C_{4,20}$ задается тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = F_{14} = \frac{x^1\Phi}{x^2 + x^4},\ F_{13} = 0,$$

$$F_{23} = -F_{34} = -\frac{x^3\Phi}{x^2 + x^4},\ F_{24} = \Phi \qquad (5)$$

$$(\Phi = \Phi(\tilde{x}^4) = \Phi((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2)).$$

Предложение 3. *Если $\Phi'(\tilde{x}^4) \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором (5), допускает четырехмерную группу $G_S = G_{4,20}$.*

Замечание 1. В работе [2] класс $C_{4,20}$ непустой, но он заужен в сравнении с вышеприведенным.

4. Класс $C_{5,9}$. Алгебре $\mathcal{L}_{5,9} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13},_{24}, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{5,9}$, порождаемая двумя одномерными группами параболических вращений, одномерными группами поворотов, псевдовращений и трансляций в изотропном направлении. Алгебра $\mathcal{L}_{5,9}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{4,20}$ посредством вектора $e_2 - e_4$. Поэтому $C_{5,9} \subset C_{4,20}$.

Теорема 4. *Пространство Максвелла класса $C_{5,9}$ задается тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = F_{14} = \frac{Cx^1}{x^2 + x^4},\ F_{13} = 0,\ F_{24} = C,$$
$$F_{23} = -F_{34} = -\frac{Cx^3}{x^2 + x^4},\ (C = \text{const}). \qquad (6)$$

Предложение 4. *Если $C \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором (6), допускает пятимерную группу $G_S = G_{5,9}$.*

5. Класс $C_{6,5}$. Алгебре $\mathcal{L}_{6,5} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_{2},_{1}, e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{6,5}$, порождаемая двумя одномерными группами параболических вращений, одномерной группой эллиптических винтов и группой трансляций в направлениях векторов трехмерного изотропного подпространства.

Теорема 5. *Пространство Максвелла класса $C_{6,5}$ при $\lambda \neq 0$ задается тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = F_{14} = C_1 \sin\frac{x^2 + x^4}{\lambda} + C_2 \cos\frac{x^2 + x^4}{\lambda},$$

$$F_{23} = -F_{34} = C_1 \cos\frac{x^2 + x^4}{\lambda} - C_2 \sin\frac{x^2 + x^4}{\lambda}, \qquad (7)$$

$$F_{13} = F_{24} = 0 \quad (C_1, C_2 = \text{const}).$$

Если $\lambda = 0$, то $F_{ij} = 0$.

Предложение 5. *Если $C_1 \neq 0$ или $C_2 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором (7), допускает шестимерную группу $G_S = G_{6,5}$.*

6. Класс $C_{6,7}$. Алгебре $\mathcal{L}_{6,7} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{6,7}$, порождаемая двумя одномерными группами параболических вращений, одномерной группой пропорциональных бивращений и группой трансляций в направлениях векторов трехмерного изотропного подпространства.

Теорема 6. *Пространство Максвелла класса $C_{6,7}$ задается тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = F_{14} = \Phi,\ F_{13} = F_{24} = 0,\ F_{23} = -F_{34} = \Psi, \qquad (8)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{x^2 + x^4}\left(a_1 \cos\frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} - a_2 \sin\frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda}\right),$$

$$\Psi = \frac{1}{x^2 + x^4}\left(a_1 \sin\frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} + a_2 \cos\frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda}\right) \qquad (9)$$

($a_1, a_2 = \text{const}$).

Предложение 6. *Если $a_1 \neq 0$ или $a_2 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором (8)—(9), допускает шестимерную группу $G_S = G_{6,7}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна — Максвелла и уравнения Лоренца. Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. 180 с.

2. *Паринов М. А.* Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // ФПМ. — 2004. — Т. 10. — 1. — С. 183—237.

3. *Parinov M. A.* Classification of Potential Structures on Minkowski Space over Subgroups of the Poincare Group // http://arXiv.org/abs/math. DG/0602662 — 2006. — 45 p.