УДК 681.3.06

НЕКОММУТАТИВНЫЕ РЕШЕТКИ И НЕМОНОТОННЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ

С. Д. Махортов

Воронежский государственный университет

В данной работе вводятся *некоммутативные решетки* (точнее — некоммутативные верхние полурешетки) как обобщение классических решеток. Операции на некоммутативных решетках хорошо формализуют не только накопление, но и замещение знаний в задачах искусственного интеллекта. Основным результатом здесь является теорема об ассоциативности операции некоммутативного объединения. Далее вводятся и изучаются действующие на этих решетках логические бинарные отношения. Эти отношения могут быть использованы для моделирования немонотонного логического вывода. Доказана теорема о существовании логического замыкания отношений на некоммутативных решетках. Получен также ряд вспомогательных результатов, относящихся к общей теории решеток и отношений.

Решетки находят широкое применение в формальных системах представления знаний [1, 2]. В работах [3, 4] автором был предложен и изучен специальный математический аппарат, позволяющий рассматривать задачи формализации логического вывода с точки зрения теории решеток и отношений. Доказаны существование и полезные свойства логических отношений на решетках. На основе полученных результатов можно строить эффективные процессоры логического вывода, а также осуществлять эквивалентные преобразования баз знаний, важнейшим из которых является логическая редукция. По мнению автора, эта теория может получить применение при решении многих интересных практических задач: автоматическая оптимизация логических программ, автоматизированный анализ и рефакторинг объектно-ориентированного кода и ряда других.

Однако ее применения ограничены лишь системами с так называемой *монотонной* логикой, вывод в которых означает монотонное накопление знаний. Вместе с тем существует гораздо больше практических задач искусственного интеллекта, предполагающих не только накопление, но и модификацию получаемых знаний. Эти задачи рассматриваются в ряде работ (например, [2, 5, 6]). К ним автор хотел бы добавить такую интересную область как анализ поведенческих свойств и преобразования императивных алгоритмов, во время работы которых информация не только накапливается, но и часто замещается. Формальная немонотонная логика, по-видимому, может быть также применена на решетках типов [2] для автоматизации исследования отношений в объектно-ориентированных системах, где по принципу замещения организуются виртуальные свойства и методы.

Существуют несколько общеизвестных подходов к моделированию немонотонных рассуждений (см. [5, 6] и библиографию в них). В настоящей работе предлагается математическая теория, основанная на обобщении результатов работ [3, 4]. Этот подход, по мнению автора, характеризуется более высокой степенью абстрагирования и позволяет получить новые результаты путем математических исследований.

Итак, в данной работе вводятся *некоммутативные решетки* (фактически — некоммутативные верхние полурешетки) как обобщение классических решеток [7]. Операции на некоммутативных решетках хорошо формализуют не только накопление, но и замещение знаний. Основным результатом здесь является теорема об ассоциативности операции некоммутативного объединения. Далее вводятся и изучаются действующие на этих решетках логические бинарные отношения, которые могут быть использованы для моделирования немонотонного логического вывода. Доказана теорема о существовании логического замыкания отношений на некоммутативных решетках. Получен также ряд вспомогательных результатов, относящихся к общей теории решеток и отношений.

Вначале мы приведем некоторые определения и свойства, связанные с обычными решетками и *монотонными* отношениями.

1. МОНОТОННЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ

Пусть $\mathbb{F}$ — решетка с отношением частичного порядка $\supseteq$ и операциями пересечения $\bigcap$ и объединения $\bigcup$. Если $A, B \in \mathbb{F}$ и $A \supseteq B$, то будем говорить, что A содержит B, а B содержится в A. Символом $\subseteq$ обозначим отношение, обратное $\supseteq$. Если $A \supseteq B$, но $A \neq B$, то этот факт будем обозначать $A \supset B$. Аналогично определяется и отношение $A \subset B$.

В этом разделе мы рассматриваем бинарные отношения на некоторой полной решетке $\mathbb{F}$. Обозначим L_F определенное на $\mathbb{F}$ отношение включения, задающее частичный порядок элементов $\mathbb{F}$. Очевидно, отношение включения является рефлексивным и транзитивным.

Определение 1.1. Отношение R на $\mathbb{F}$ назовем $\bigcup$-*дистрибутивным* (*верхне-дистрибутивным* или, в контексте настоящей работы, просто *дистрибутивным*), если из $(A, B_1), (A, B_2) \in R$ следует $(A, B_1 \bigcup B_2) \in R$.

Замечание 1.1. Легко видеть, что для дистрибутивного отношения R справедливо $(A, \bigcup_i B_i) \in R$, если $(A, B_i) \in R$ для $\forall i: 1 \le i \le n$, где n конечно.

Определение 1.2. Пусть задано некоторое отношение R на полной решетке $\mathbb{F}$. Рассмотрим элемент $U_R \in \mathbb{F}$ — объединение всех элементов $\mathbb{F}$, каждый из которых содержится хотя бы в одной паре отношения R. В силу полноты решетки такое объединение существует. *Алфавитом* отношения R назовем совокупность $\mathbb{F}_R$ всех элементов из $\mathbb{F}$, которые содержатся в U_R.

Согласно [7], множество $\mathbb{F}_R$ является подрешеткой $\mathbb{F}$ и, следовательно, может рассматриваться как самостоятельная решетка. Для данного отношения R на решетке $\mathbb{F}$ обозначим $L_F(R)$ — отношение включения на алфавите $\mathbb{F}_R$.

Определение 1.3. Отношение R на $\mathbb{F}$ называется *логическим*, если оно содержит $L_F(R)$, транзитивно и дистрибутивно.

Как следует из этого определения, отношения включения L_F и $L_F(R)$ сами являются логическими отношениями.

В работе [3] проведено подробное исследование свойств логических отношений на решетках. Здесь мы докажет еще одно полезное утверждение. Суть его в том, что при определении рассматриваемого класса логических отношений условие *дистрибутивности* можно заменить условием *монотонности*.

Определение 1.4. **Монотонным** называется такое отношение R на решетке $\mathbb{F}$, для которого выполнено следующее условие монотонности:

если $(A, B) \in R$, то $(A, A \bigcup B) \in R$ $(\forall A, B \in \mathbb{F})$. (1.1)

Лемма 1.1. Отношение R на $\mathbb{F}$ является логическим тогда и только тогда, когда оно содержит $L_F(R)$, транзитивно и монотонно.

Доказательство. Предположим вначале, что отношение R - логическое. Если $(A, B) \in R$, то, учитывая также соотношение $(A, A) \in R$, с помощью дистрибутивности R находим, что верно и $(A, A \bigcup B) \in R$.

Докажем теперь противоположную часть утверждения леммы. Пусть R содержит $L_F(R)$, транзитивно и таково, что выполнено (1.1). Покажем, что в этом случае R дистрибутивно. Для этого рассмотрим пары $(A, B_1), (A, B_2) \in R$. По условию (1.1) из $(A, B_1) \in R$ следует $(A, A \bigcup B_1) \in R$. Пользуясь транзитивностью отношения R, для $A \bigcup B_1 \supseteq A$ и $(A, B_2) \in R$ имеем $(A \bigcup B_1, B_2) \in R$. Применяя к этому соотношению условие вида (1.1), получим $(A \bigcup B_1, A \bigcup B_1 \bigcup B_2) \in R$. Отсюда, так как $(A, A \bigcup B_1) \in R$, в силу транзитивности R имеем $(A, A \bigcup B_1 \bigcup B_2) \in R$. Наконец, учитывая тот факт, что $(A \bigcup B_1 \bigcup B_2, B_1 \bigcup B_2) \in R$ и применяя еще раз транзитивность отношения R, приходим к соотношению $(A, B_1 \bigcup B_2) \in R$, которое означает дистрибутивность R. $\square$

Доказанная лемма дает эквивалентное определение логического отношения. Новое определение ориентировано на последовательный логический вывод, в то время как исходное определение дает больше возможностей для моделирования логического вывода с максимальным параллелизмом.

2. ПОНЯТИЕ НЕКОММУТАТИВНОЙ РЕШЕТКИ

Следуя [7], мы для частично упорядоченных множеств (в том числе и решеток) будем различать понятия *наименьшего элемента* (он меньше всех) и *минимального элемента* (для него нет меньшего элемента).

Для точки a элемента A решетки $\mathbb{F}$ мы будем иногда использовать обозначение $a \in A$ (наряду с $a \subseteq A$).

Заметим, что если решетка $\mathbb{F}$ моделирует некоторую область знаний, то для элементов $A, B \in \mathbb{F}$ знание $A \bigcup B \in \mathbb{F}$ может рассматриваться как объединение знаний A и B (точнее — добавление знаний B к знаниям A). При этом по определению решетки $A \cup B = B \cup A$. Однако в некоторых ситуациях часть знаний B может противоречить части знаний A. Наше решение состоит в том, чтобы вместо $\cup$ ввести на $\mathbb{F}$ другую операцию. Эта операция часть содержимого A будет замещать противоречащей ей частью содержимого B, а остальные части — объединять. Тогда, очевидно, коммутативность операции будет нарушена. При этом знания B (второй операнд) предполагаются более актуальными, чем A. Аналогично можно ввести и такую некоммутативную операцию объединения, при которой более актуальным будет первый операнд.

Пусть $\mathbb{F}$ — полная решетка с относительными дополнениями, $\varnothing$ — ее нижняя грань. Зафиксируем некоторый элемент $X \subseteq \mathbb{F}$ и рассмотрим множество всех элементов решетки $\mathbb{F}$, каждый из которых содержит лишь одну точку элемента X или ни одной. Обозначим это множество $\mathbb{F}_X$. Точки элемента X будем называть **несовместимыми точками**, а сам X — **элементом несовместимых точек**. Эти термины объясняются способом построения множества $\mathbb{F}_X$.

Если $A \in \mathbb{F}_X$ содержит точку x_a элемента X, то в силу свойств решетки $\mathbb{F}$ справедливо

$$A = A' \cup x_a, \qquad (2.1)$$

где $A' \in \mathbb{F}_X$ — относительное дополнение элемента x_a решетки $\mathbb{F}$ в ее замкнутом интервале $[\varnothing, A]$ (см. [7]). Очевидно, что A' не содержит точек элемента X. Вообще, для данного элемента $A \in \mathbb{F}_X$ символом A' будем обозначать соответствующий элемент в представлении (2.1). Всюду в дальнейшем для элементов множества $\mathbb{F}_X$ мы будем рассматривать представление (2.1) в обобщенном смысле, полагая $A' = A$, $x_a = \varnothing$, если A не содержит точек X.

Элементам множества $\mathbb{F}_X$ будем приписывать определенные *состояния*, связанные с точками X. Если для $A \in \mathbb{F}_X$ справедливо $A \neq A'$, то A всегда имеет состояние x_a (см. (2.1)). Если же $A' = A$, то такой элемент A в зависимости от ситуации способен находиться в различных состояниях, но в каждый момент — не более чем в одном состоянии. Факт нахождения элемента $A \in \mathbb{F}_X$ в состоянии x_a будем обозначать $[A] = x_a$. Если состояние A не определено (оно пусто), то будем писать $[A] = \varnothing$. Состояние самого элемента $\varnothing$ всегда считается пустым. Для $C = A \cap B$, $A, B \in \mathbb{F}_X$ положим $[C] = [A] \cap [B]$.

Поскольку $\mathbb{F}$ — решетка с относительными дополнениями, то для любых $A, B \in \mathbb{F}$ можно определить операцию разности: $A \setminus B$ - относительное дополнение элемента $A \cap B$ в замкнутом интервале $[\varnothing, A]$. Что касается состояния элемента $A \setminus B$ (при $A, B \in \mathbb{F}_X$), то в случае $[A] = [B]$ будем считать, что $[A \setminus B] = \varnothing$, иначе — $[A \setminus B] = [A]$.

Далее на множестве $\mathbb{F}_X$ введем операцию $\cup_{X,R}$ следующим образом. Пусть $A, B \in \mathbb{F}_X$. Если $A \neq A'$ и $[B] = x_b \neq \varnothing$, то $A \cup_{X,R} B = A' \cup B \cup x_b$, в противном случае положим $A \cup_{X,R} B = A \cup B$. Что касается состояния элемента $C = A \cup_{X,R} B$, то по определению будем считать, что оно всегда совпадает с состоянием элемента B, за исключением ситуации, когда состояние B не определено. В этом случае оно переходит к C от A.

Соответственно введем операцию $\cup_{X,L}$: $A \cup_{X,L} B = B \cup_{X,R} A$.

Легко видеть, что множество $\mathbb{F}_X$ инвариантно относительно операций $\cup_{X,R}$, $\cup_{X,L}$, а также и $\cap, \setminus$. Это множество напоминает *фактор-пространство* в $\mathbb{F}$ с классом эквивалентности X. Важное отличие в нашем случае состоит в том, что точки множества X не вполне эквивалентны. Они замещают друг друга при выполнении операций, но не отождествляются.

Очевидно, введенные нами операции не коммутативны. Обычно для некоммутативных бинарных операций возникает вопрос вычисления или оценки «коммутатора». В данном случае, например для операции $\cup_{X,R}$, это выражение имеет вид $(A \cup_{X,R} B) \setminus (B \cup_{X,R} A)$. Нетрудно проверить, что при $A = A'$ и $B = B'$ его значение равно $\varnothing$, а в остальных случаях совпадает с $[B]$.

Ниже будет показано, что каждая из операций $\cup_{X,R}$ и $\cup_{X,L}$ является ассоциативной.

Введем оператор $\delta_{X,R}$, определенный на упорядоченных наборах состояний вида $x_1, \ldots, x_m$, где $m \geq 0$ и каждый элемент x_i - это точка в X (при этом $[x_i] = x_i$) либо $x_i = \varnothing$ (тогда $[x_i] = \varnothing$). Итак, $\delta_{X,R}(x_1, \ldots, x_m) = x_0$, где x_0 — первый справа непустой элемент набора $x_1, \ldots, x_m$ либо $\varnothing$. Аналогично определяется $\delta_{X,L}$, выбирающий первый непустой элемент слева.

Лемма 2.1. При любом ассоциативном порядке выполнения операций $\cup_{X,R}$ справедливо соотношение $x_1 \cup_{X,R} x_2 \cup_{X,R} \ldots \cup_{X,R} x_m = \delta_{X,R}(x_1, \ldots, x_m)$.

Доказательство. Докажем это утверждение с помощью индукции по $m \geq 0$. При $m \leq 2$ оно следует непосредственно из определений $\bigcup_{X,R}$ и $\boldsymbol{\delta}_{X,R}$. Предположим, что оно верно при любом количестве операндов, не превосходящем некоторого m, и рассмотрим случай $m+1$.

В этой ситуации объединим в произвольные группы наборы смежных операндов исходного выражения, так, чтобы каждый операнд попал ровно в одну группу. Для нетривиальной ассоциативности также требуется, чтобы групп было больше одной, и хотя бы одна из них содержала более одного операнда. Пусть этих групп окажется p штук. По построению $p \leq m$ и количество операндов в каждой группе также не превосходит m. Поэтому для каждой группы выполнено утверждение леммы, и соответственно в группах могут быть получены однозначные результаты вычислений. Обозначим их $y_1, \ldots, y_p$ и вместо $x_1 \bigcup_{X,R} \ldots \bigcup_{X,R} x_{m+1}$ рассмотрим выражение $y_1 \bigcup_{X,R} \ldots \bigcup_{X,R} y_p$, где $p \leq m$. Для него также выполнено предположение индукции, т.е. $y_1 \bigcup_{X,R} \ldots \bigcup_{X,R} y_p = \boldsymbol{\delta}_{X,R}(y_1, \ldots, y_p)$.

Для доказательства леммы осталось проверить, что при любом описанном способе группирования операндов справедливо $\boldsymbol{\delta}_{X,R}(y_1, \ldots, y_p) = \boldsymbol{\delta}_{X,R}(x_1, \ldots, x_{m+1})$. Если при этом все состояния $x_1, \ldots, x_{m+1}$ пусты, то очевидно, что $\boldsymbol{\delta}_{X,R}(y_1, \ldots, y_p) = \boldsymbol{\delta}_{X,R}(x_1, \ldots, x_{m+1}) = \varnothing$. Поэтому рассмотрим нетривиальный случай. По определению имеем $\boldsymbol{\delta}_{X,R}(x_1, \ldots, x_{m+1}) = x_0$, где x_0 — первый справа непустой элемент набора $x_1, \ldots, x_{m+1}$. Рассмотрим группу G_0, в которую вошел элемент x_0. Очевидно, что все группы G_j, расположенные правее G_0, состоят лишь из пустых элементов. Поэтому соответствующие им значения y_j также пусты. Кроме того, и в самой группе G_0 элемент x_0 - *первый* справа непустой. Применяя для вычислений в G_0 предположение индукции, получим, что результат в этой группе равен x_0. Таким образом, первый справа непустой элемент в наборе $y_1, \ldots, y_p$ равен x_0. Это и означает, что $\boldsymbol{\delta}_{X,R}(y_1, \ldots, y_p) = x_0$. □

Аналогично доказывается, что при любом порядке выполнения операций $\bigcup_{X,L}$ справедливо $x_1 \bigcup_{X,L} x_2 \bigcup_{X,L} \ldots \bigcup_{X,L} x_m = \boldsymbol{\delta}_{X,L}(x_1, \ldots, x_m)$.

Лемма 2.2. Пусть $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{F}_X$, $m \geq 0$. Рассмотрим выражение $C = A_1 \bigcup_{X,R} A_2 \bigcup_{X,R} \ldots \bigcup_{X,R} A_m$. Введем обозначения $a_i = [A_i]$ и $a_0 = \boldsymbol{\delta}_{X,R}(a_1, \ldots, a_m)$. Тогда при любом ассоциативном порядке выполнения операций $\bigcup_{X,R}$ справедливо: если существует такое j, что $A'_j \neq A_j$, то $C = A'_1 \bigcup A'_2 \bigcup \ldots \bigcup A'_m \bigcup a_0$, иначе $C = A'_1 \bigcup A'_2 \bigcup \ldots \bigcup A'_m$. Кроме того, в любом случае $[C] = a_0$.

Доказательство. Как и выше, воспользуется индукцией по $m \geq 0$. При $m \leq 2$ утверждение леммы так же непосредственно вытекает из определений $\bigcup_{X,R}$ и $\boldsymbol{\delta}_{X,R}$. Предположим, что оно справедливо при любом количестве операндов, не превосходящем некоторого m. Рассмотрим случай $m+1$.

Заметим вначале, что если все $A'_j = A_j$, $j = 1, \ldots, m+1$, то по определению операции $\bigcup_{X,R}$ при любом порядке вычислений будем иметь $C = A'_1 \bigcup \ldots \bigcup A'_{m+1}$. Поэтому осталось рассмотреть альтернативный вариант. В этом варианте хотя бы один элемент набора $A_1, \ldots, A_{m+1}$ имеет непустое состояние. Обозначим его A_0. Очевидно, что $[A_0] = a_0$, где a_0 определен в условии леммы.

Объединим в группы наборы смежных операндов соответствующего выражения C таким образом, чтобы каждый операнд находился ровно в одной группе. Для исключения тривиальных случаев потребуем, чтобы групп было больше одной, и хотя бы одна из них содержала более чем один операнд. Предположим, что групп оказалось p штук. По их построению $p \leq m$ и количество операндов в группе не превосходит m. Следовательно, для каждой группы выполнено утверждение леммы, и в группах могут быть получены однозначные результаты вычислений. Обозначим их $Y_1, \ldots, Y_p$. Тогда, по предположению индукции, если некоторая группа G_k состоит из смежных элементов $A_{k1}, \ldots, A_{kl}$, то $Y'_k = A'_{k1} \bigcup \ldots \bigcup A'_{kl}$ и $[Y'_k] = \boldsymbol{\delta}_{X,R}([A'_{k1}], \ldots, [A'_{kl}])$.

Напомним, что мы рассматриваем такой вариант, когда для некоторого j справедливо $A_j \neq A'_j$. Поэтому для некоторой группы G_{k0} (содержащей элемент A_j) по предположению индукции выполнено $Y_{k0} \neq Y'_{k0}$. Этим фактором ниже будет определяться вид окончательного результата вычислений над $Y_1, \ldots, Y_p$.

Итак, наряду с выражением C рассмотрим выражение $Y_1 \bigcup_{X,R} \ldots \bigcup_{X,R} Y_p$, где $p \leq m$. Для него также выполнено предположение индукции, т.е. $Y_1 \bigcup_{X,R} \ldots \bigcup_{X,R} Y_p = Y'_1 \bigcup \ldots \bigcup Y'_p \bigcup y_0$, где $y_0 = \boldsymbol{\delta}_{X,R}([Y_1], \ldots, [Y_p])$. Подставляя вместо Y'_k их выражения через исходные операнды, получим $Y_1 \bigcup_{X,R} \ldots \bigcup_{X,R} Y_p = A'_1 \bigcup \ldots \bigcup A'_{k+1} \bigcup y_0$.

Чтобы доказать требуемое представление для C, осталось установить равенство $y_0 = a_0$.

Для этого рассмотрим группу G_0, в которую вошел элемент A_0 (см. выше). Результат вычислений в группе G_0 обозначим Y_0. Очевидно, что все группы G_j, расположенные правее G_0, состоят лишь из элементов с пустыми состояниями. Поэтому соответствующие им значения $[Y_j]$ также пусты. Кроме того, и в самой группе G_0 элемент A_0 — *первый* справа с непустым состоянием. Применяя для вычислений в G_0 предположение индукции, получим, что $[Y_0] = a_0$. Таким образом, первый справа непустой элемент в наборе $[Y_1],\dots,[Y_p]$ равен a_0. Это и означает, что $y_0 = a_0$.

Рассмотрим, наконец, вопрос о состоянии элемента C, который вычисляется в соответствии со сделанным разбиением операндов на группы. Состояние C также может быть получено с помощью предположения индукции, которое сначала применяется к каждой группе, а затем к результатам групп, т.е. $[C] = y_0$. Если состояния не всех элементов $A_1,\dots,A_{m+1}$ пусты, то $a_0 \neq \varnothing$ и, как показано выше, $y_0 = a_0$. В противном случае для каждого Y_k справедливо $[Y_k] = \varnothing$. Соответственно $y_0 = \delta_{X,R}([Y_1],\dots,[Y_p]) = \varnothing = a_0$. □

Аналогичная лемма справедлива и для операции $\bigcup_{X,L}$.

Из леммы 2.2 непосредственно вытекает

Теорема 2.1. Операции $\bigcup_{X,R}$ и $\bigcup_{X,L}$ ассоциативны. □

Определение 2.1. Операцию $\bigcup_{X,R}$ назовем некоммутативным объединением с правым приоритетом, операцию $\bigcup_{X,L}$ — некоммутативным объединением с левым приоритетом.

Замечание 2.1. Пусть $A, B \in \mathbb{F}_X$. Нетрудно заметить, что $A \bigcup_{X,R} B \subseteq A \bigcup B$ в контексте решетки $\mathbb{F}$. Если же $[A] = [B]$, то $A \bigcup_{X,R} B = A \bigcup B$.

Аналогичное замечание справедливо и для операции $\bigcup_{X,L}$.

Замечание 2.2. Из определения этих операций очевидным образом следуют также соотношения $B \subseteq A \bigcup_{X,R} B$ и $A \subseteq A \bigcup_{X,L} B$.

В дальнейшем мы будем рассматривать в основном одну из этих двух операций — $\bigcup_{X,R}$, обозначая ее для краткости $\bigcup_X$ и используя полные обозначения лишь при необходимости. Аналогично вместо $\delta_{X,R}$ будем писать δ_X.

Определение 2.2. Множество $\mathbb{F}_X$ с введенными на нем некоммутативными операциями $\bigcup_{X,R}$, $\bigcup_{X,L}$, а также исходной операцией пересечения $\bigcap$, назовем **верхне-некоммутативной** (в контексте настоящей работы — просто **некоммутативной**) **решеткой**, порожденной данным элементом X решетки $\mathbb{F}$.

Нетрудно заметить, что при $X = \varnothing$ решетка $\mathbb{F}_X$ совпадает с $\mathbb{F}$. Таким образом, понятие некоммутативной решетки шире понятия обычной решетки.

Рассмотрим некоторые детали связи некоммутативного объединения $\bigcup_X$ с обычной операцией $\bigcup$.

Определение 2.3. Выражение (некоммутативное объединение) $A \bigcup_X B$ называется **нормализованным**, если из двух элементов A, B точку элемента X содержит не более чем один элемент.

Замечание 2.4. Очевидно, что для нормализованного объединения справедливо $A \bigcup_X B = A \bigcup B = B \bigcup A$.

Из определения операции $\bigcup_X$ следует, что если для $A, B \in \mathbb{F}_X$ выполнено $A' \neq A$ и $B' \neq B$, то имеет место равенство $A \bigcup_X B = A' \bigcup_X B$. Если же $A' = A$ либо $B' = B$, то объединение $A \bigcup_X B$ уже нормализовано. Это позволяет сделать вывод о том, что выражение вида $A \bigcup_X B$ всегда может быть заменено равнозначным ему нормализованным.

Возможно обобщение понятия нормализации на случай m.

Определение 2.4. Объединение $A_1 \bigcup_X \dots \bigcup_X A_m$, в котором не более чем один элемент содержит точку элемента X, называется **нормализованным**.

Справедлива следующая

Лемма 2.3. Любое выражение вида $A_1 \bigcup_X \dots \bigcup_X A_m$ может быть заменено равнозначным ему нормализованным. Новое выражение получается из исходного таким образом, что каждый операнд A_j со свойством $A_j \neq A'_j$ заменяется на A'_j, за исключением крайнего правого из таковых, а остальные операнды сохраняются.

Доказательство. Если операндов с указанным свойством в выражении нет или он только один, то оно само является нормализованным. В противном случае в силу леммы 2.2 имеем $A_1 \bigcup_X \dots \bigcup_X A_m = A'_1 \bigcup A'_2 \bigcup \dots \bigcup A'_m \bigcup a_0$. Заметим, что по определению элемент a_0 представляет собой состояние такого A_i, который в наборе $A_1,\dots,A_m$ расположен не левее чем крайний справа элемент A_j со свойством $A_j \neq A'_j$. В предельном случае возможно лишь равенство $[A_j] = a_0$. Описанное же в лемме преобразование затрагивает лишь те операнды исходного выражения, которые расположены левее чем A_j. Следовательно, оно сохраняет как способ вычисления выражения, так и саму величину $A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_m' \cup a_0$. □

Аналогичным образом можно определить некоммутативную решетку, порожденную не одним элементом X, а их счетным множеством $\{X_m\}$. В этом случае состояния элементов определяются векторами, компоненты которых составлены из точек множеств $\{X_m\}$. Для таких решеток утверждения и доказательства настоящей работы будут более громоздкими, но принципиальных новшеств не принесут.

3. ОТНОШЕНИЯ НА НЕКОММУТАТИВНЫХ РЕШЕТКАХ

Пусть R — бинарное отношение на некотором множестве F. Для каждой упорядоченной пары $(a,b) \in R$ элемент a будем называть *левой частью,* а элемент b — ее *правой частью*.

Хорошо известно, что для любого отношения R существует замыкание относительно свойств рефлексивности и транзитивности, которое называется *рефлексивно-транзитивным замыканием* (РТЗ). Нам понадобится теоретико-множественное описание всей совокупности элементов РТЗ.

Определение 3.1. Пусть даны элементы $a,b \in F$ и некоторое отношение R на F. Если существует упорядоченный набор элементов $\vec{r} = (b_1,\ldots,b_m)$ ($b_1,\ldots,b_m \in F$, $0 \le m < \infty$), такой, что $(a,b_1),(b_1,b_2),\ldots,(b_m,b) \in R$ (в случае $(a,b) \in R$ предполагается $m = 0$), то указанный набор $\vec{r}$ будем называть **транзитивной цепочкой** (длины m), соединяющей a и b в R.

Пусть $a,b \in F$ и R_1 — транзитивное отношение на F. Очевидно, что если существует транзитивная цепочка $\vec{r}_{ab}$, соединяющая a и b в R_1, то $(a,b) \in R_1$.

Справедлива также следующая

Лемма 3.1. Для данного отношения R на F рефлексивно-транзитивное замыкание представляет собой объединение R^* множества всех рефлексивных пар (a,a) ($a \in F$) с множеством всех упорядоченных пар $a,b \in F$, для которых существует соединяющая их транзитивная цепочка в R.

Несложное доказательство этой леммы изложено в [3]. □

Замечание 3.1. Из леммы 3.1 непосредственно следует свойство: если $R_1 \subseteq R_2$, то $R_1^* \subseteq R_2^*$.

Наряду с транзитивным замыканием мы будем использовать также понятие *транзитивной редукции* данного отношения R. Это минимальное отношение R_0 среди тех отношений, транзитивное замыкание которых совпадает с транзитивным замыканием R. В [8] приведен алгоритм построения транзитивной редукции ориентированных графов (следовательно, и конечных отношений); показано, что эта задача вычислительно эквивалентна задаче построения транзитивного замыкания, и доказана единственность транзитивной редукции *ациклического* графа.

Перейдем к определению логических бинарных отношений на некоммутативных решетках.

Обозначим L_F естественным образом определенное на $\mathbb{F}$ отношение включения, задающее частичный порядок элементов $\mathbb{F}$. Обозначим также $L_{F,X}$ отношение включения на некоммутативной решетке $\mathbb{F}_X$, порожденной некоторым элементом $X \in \mathbb{F}$. Понятие отношения $L_{F,X}$ требует уточнений, связанных с механизмом состояний элементов решетки $\mathbb{F}_X$.

Определение 3.2. Отношение $L_{F,X}$ состоит из всех таких упорядоченных пар (A,B) элементов $A,B \in \mathbb{F}_X$, что $A \supseteq B$ и $[A]=[B]$.

Замечание 3.2. Если $(A,B) \in L_{F,X}$, то справедливо $A \bigcup_X B = A$. Это легко следует из определения операции U_X (см. п. 2).

Определение 3.3. Пусть R - произвольное отношение на $\mathbb{F}_X$. Рассмотрим совокупность всех элементов $\mathbb{F}_X$, которые содержатся в элементах пар отношения R. Построим далее всевозможные некоммутативные объединения этих элементов. Полученное множество $\mathbb{F}_X(R)$ назовем **алфавитом** отношения R на $\mathbb{F}_X$.

Замечание 3.3. Нетрудно показать, что множество $\mathbb{F}_X(R)$ образует некоммутативную подрешетку в $\mathbb{F}_X$.

Для произвольного отношения R, заданного на некоммутативной решетке $\mathbb{F}_X$, обозначим $L_{F,X}(R)$ — подмножество отношения включения $L_{F,X}$ на алфавите $\mathbb{F}_X(R)$.

Определение 3.4. Псевдомонотонным называется такое отношение R на решетке $\mathbb{F}_X$, для которого выполнено следующее условие *псевдомонотонности*:

$$\text{если } (A,B) \in R, \quad \text{то } (A, A \textstyle\bigcup_X B) \in R \ (\forall A,B \in \mathbb{F}_X). \tag{3.1}$$

Определение 3.5. Отношение R на $\mathbb{F}_X$ называется **логическим**, если оно содержит $L_{F,X}(R)$, транзитивно и псевдомонотонно.

Как следует из этого определения и замечания 3.2, отношения включения $L_{F,X}$ и $L_{F,X}(R)$ сами являются логическими отношениями.

Рассматриваемый в данном разделе тип логических отношений относится к так называемым *немонотонным* отношениям, т.к. не для любой пары $(A,B) \in R$ обязано выполняться $(A, A \bigcup B) \in R$. Используемое здесь понятие логического отношения не основывается на свойстве дистрибутивности, в отличие от того, как это было в п. 1 для монотонных отношений. Оно сформулировано в стиле леммы 1.1. Дело в том, что в силу природы немонотонных отношений для них в общем случае свойство дистрибутивности оказывается невыполненным. Это не удивительно, поскольку немонотонный логический вывод содержит существенно меньше возможностей для параллельного моделирования, чем монотонный. Тем не менее, справедлива следующая лемма, говорящая о *локальной* дистрибутивности немонотонных логических отношений, т. е. дистрибутивности в пределах одного состояния элементов решетки.

Лемма 3.2. Пусть R — логическое отношение на $\mathbb{F}_X$ и $A, B_1, B_2 \in \mathbb{F}_X$, причем $[A] = [B_1] = [B_1] = [B_2]$. Тогда из $(A, B_1), (A, B_2) \in R$ следует $(A, B_1 \bigcup_X B_2) \in R$.

Доказательство. Согласно замечанию 2.1, в условиях настоящей леммы имеем $B_1 \bigcup_X B_2 = B_1 \bigcup B_2$. Поскольку также $A \bigcup_X B_1 = A \bigcup B_1$ и $A \bigcup_X B_2 = A \bigcup B_2$, то для рассматриваемых элементов A, B_1, B_2 условие *псевдомонотонности* (3.1) превращается в условие *монотонности* вида (1.1). Поэтому, повторяя вторую часть доказательства леммы 1.1, получим $(A, B_1 \bigcup B_2) \in R$. Но, поскольку в нашем случае $B_1 \bigcup_X B_2 = B_1 \bigcup B_2$, лемма доказана. □

Определение 3.6. Логическим замыканием отношения R, заданного на $\mathbb{F}_X$, называется наименьшее логическое отношение, содержащее R.

Попробуем выяснить структуру немонотонного логического отношения.

Определение 3.7. Пусть R — отношение на некоммутативной решетке $\mathbb{F}_X$. Будем говорить, что элементы $A, B \in \mathbb{F}_X$ **верхне-дистрибутивно** (в контексте настоящей работы — просто **дистрибутивно**) **связаны** в R, если существует упорядоченная пара $(A_1, B_1) \in R$, такая, что $A \supseteq A_1$, $[A] = [A_1]$ и $B = A \bigcup_X B_1$.

Замечание 3.4. Очевидно, что если $(A,B) \in R$, то пара $(A, A \bigcup_X B)$ дистрибутивно связана в R.

Лемма 3.3. Если R — логическое отношение на $\mathbb{F}_X$ и пара (A,B) дистрибутивно связана в R, то $(A,B) \in R$.

Доказательство. Поскольку отношение R содержит $L_{F,X}(R)$, то в условиях леммы $(A, A_1) \in R$. Далее, так как $(A_1, B_1) \in R$ и отношение R удовлетворяет (3.1), имеем $(A_1, A_1 \bigcup_X B_1) \in R$. Отсюда, пользуясь транзитивностью R, получим $(A, A_1 \bigcup_X B_1) \in R$. Применяя к последнему соотношению условие вида (3.1), находим, что $(A, A \bigcup_X A_1 \bigcup_X B_1) \in R$. Наконец, поскольку $A \bigcup_X A_1 = A$ (см. замечание 3.2), то в силу ассоциативности операции $\bigcup_X$ (теорема 2.1), имеем $A \bigcup_X A_1 \bigcup_X B_1 = A \bigcup_X B_1$. Таким образом, $(A, A \bigcup_X B_1) \in R$, что и требовалось доказать. □

Определение 3.8. Пусть R — произвольное отношение на $\mathbb{F}_X$ и выбраны два элемента $A, B \in \mathbb{F}_X$. Пусть также существует упорядоченный набор элементов $\vec{r}_{AB} = (B_1, \ldots, B_m)$ ($B_1, \ldots, B_m \in \mathbb{F}_X$, $0 \le m < \infty$), такой, что в последовательности $(B_0, B_1), (B_1, B_2), \ldots, (B_m, B_{m+1})$, где $B_0 = A$, $B_{m+1} = B$, каждая пара принадлежит $L_{F,X}(R)$ либо дистрибутивно связана в R (в случае $m = 0$ это сама пара (A,B)). Тогда указанный набор $\vec{r}_{AB}$ будем называть **логической цепочкой** (длины m), соединяющей A и B в R. Пару (A,B) при этом будем называть **логически связанной** в R.

Замечание 3.5. По определению 3.8, если $(A,B) \in L_{F,X}(R)$, то пара (A,B) логически связана в R.

Замечание 3.6. Из леммы 3.3 вытекает, что если R — логическое отношение на $\mathbb{F}_X$ и пара (A,B) логически связана в R, то $(A,B) \in R$.

Рассмотрим свойства некоторых операций над логическими цепочками.

Определение 3.9. Пусть дано отношение R на $\mathbb{F}_X$ и выбраны элементы $A, B, C \in \mathbb{F}_X$. Пусть существуют логические цепочки $\vec{r}_{AB}$ и $\vec{r}_{BC}$, соединяющие соответственно (A,B) и (B,C) в R. Цепочка $\vec{r}_{AC} = \vec{r}_{AB}\vec{r}_{BC}$, составленная последовательно из $\vec{r}_{AB}, B, \vec{r}_{BC}$, называется транзитивным объединением цепочек $\vec{r}_{AB}$ и $\vec{r}_{BC}$.

Замечание 3.7. Очевидно, $\vec{r}_{AC} = \vec{r}_{AB}\vec{r}_{BC}$ является логической цепочкой, соединяющей (A,C) в R. Таким образом, если (A,B) и (B,C) логически связаны в R, то и пара (A,C) логически связана в R.

В работе [3] при исследовании *монотонных* логических отношений наряду с операцией транзитивного объединения логических цепочек введено также и понятие суммы цепочек. Свойства суммы логических цепочек во многом обусловлены дистрибутивностью логических отношений. Поскольку рассматриваемые в данном разделе *немонотонные* отношения в общем случае не обладают свойством дистрибутивности, то и аналоги сумм цепочек «работают» лишь в *локальном* смысле (см. лемму 3.2), когда все элементы цепочек имеют одно и то же состояние.

Определение 3.10. Пусть задано произвольное отношение R на $\mathbb{F}_X$ и выбраны элементы $A,B,C,D \in \mathbb{F}_X$, такие, что существуют логические цепочки $\vec{r}_{AB} = (B_1,...,B_m)$ и $\vec{r}_{CD} = (D_1,...,D_p)$, соединяющие соответственно (A,B) и (C,D) в R, причем $[A]=[B_1]=...=[B_m]=[B]=[C]=$ $=[C]=[D_1]=...=[D_p]=[D]$. Пусть для определенности $m \geq p$. Суммой цепочек $\vec{r}_{AB}$ и $\vec{r}_{CD}$ называется цепочка $\vec{r}_{AB}+\vec{r}_{CD}=(B_1 \bigcup_X D_1,...,$ $B_p \bigcup_X D_p, B_{p+1} \bigcup_X D_p,..., B_m \bigcup_X D_p)$.

Замечание 3.8. Аналогично работе [3] можно показать, что $\vec{r}_{AB}+\vec{r}_{CD}$ является логической цепочкой, соединяющей $(A \bigcup_X B, C \bigcup_X D)$ в R.

Определение 3.11. Пусть даны логические цепочки $\vec{r}_{AB}=(B_1,...,B_m)$ и $\vec{r}_{AC}=(C_1,...,C_p)$, соединяющие соответственно (A,B) и (A,C) в R, причем $[A]=[B_1]=...=[B_m]=[B]=[C_1]=$ $=...=[C_p]=[C]$. Дистрибутивным объединением цепочек $\vec{r}_{AB}$ и $\vec{r}_{AC}$ называется цепочка $\vec{r}_{A(B+C)}=\vec{r}_{AB}+\vec{r}_{AC}$.

Замечание 3.9. Поскольку дистрибутивное объединение — это частный случай суммы, то $\vec{r}_{A(B+C)}$ является логической цепочкой, соединяющей $(A, B \bigcup_X C)$ в R.

Введенные над логическими цепочками операции легко могут быть распространены на конечное число операндов с сохранением указанных свойств.

Перейдем к доказательству существования логических замыканий отношений на некоммутативных решетках.

Теорема 3.1. Для произвольного отношения R на некоммутативной решетке $\mathbb{F}_X$ логическое замыкание существует и представляет собой множество R^{L_X} всех упорядоченных пар $A,B \in \mathbb{F}_X$, логически связанных в R.

Доказательство. В силу замечания 3.5 определенное в условии теоремы отношение R^{L_X} содержит $L_{F,X}(R)$. Докажем, что отношение R^{L_X} транзитивно. Пусть $(A,B),(B,C) \in R^{L_X}$. Тогда существуют логические цепочки $\vec{r}_{AB}$ и $\vec{r}_{BC}$, соединяющие соответственно (A,B) и (B,C) в R. Рассмотрим цепочку $\vec{r}_{AC}=\vec{r}_{AB}\vec{r}_{BC}$ — транзитивное объединение исходных цепочек. Согласно замечанию 3.6, $\vec{r}_{AC}$ является логической цепочкой, соединяющей A и C в R. Следовательно, $(A,C) \in R^{L_X}$, т.е. определенное в теореме отношение транзитивно. Наконец, из замечания 3.4 следует, что R^{L_X} удовлетворяет условию (3.1).

Таким образом, отношение R^{L_X} - логическое. Покажем теперь, что $R^{L_X} \supseteq R$. Пусть $(A,B) \in R$. Тогда в силу замечания 3.4 пара $(A, A \bigcup_X B)$ дистрибутивно связана в R и соответственно $(A, A \bigcup_X B) \in R^{L_X}$. Поскольку $A \bigcup_X B \supseteq B$ (см. замечание 2.2) и R^{L_X} содержит $L_{F,X}(R)$, то $(A \bigcup_X B, B) \in R^{L_X}$. Наконец, в силу доказанной выше транзитивности R^{L_X}, получим $(A,B) \in R^{L_X}$.

Итак, логическое отношение R^{L_X} содержит R. Осталось показать, что оно *наименьшее* из таковых. Пусть R_1 — любое другое логическое отношение, содержащее R. Пусть также $(A,B) \in R^{L_X}$. Тогда, поскольку существует соединяющая (A,B) в $R \subseteq R_1$ логическая цепочка $\vec{r}_{AB}$, то в силу замечания 3.6 $(A,B) \in R_1$. Таким образом, $R^{L_X} \subseteq R_1$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sowa J.F.* Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations. Brooks Cole Publishing Co., Pacific Grove, CA. 1999.

2. *Тейз А., Грибомон П. и др.* Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию: Пер. с франц. — М.: Мир, 1990. — 432 с.

3. Махортов С.Д. Логические отношения на решетках. // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — Воронеж, 2003, № 2. — С. 203—209.

4. *Махортов С.Д.* О разрешимости логических уравнений на решетках. // Образование, наука, производство и управление в XXI веке: Сб. труд. Межд. научн. конф., Т. 1. — Ст. Оскол, 2004. С. 308—311.

5. *Вагин В.Н., Головина Е.Ю, Загорянская А.А., Фомина М.В.* Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах / Под ред. В. Н. Вагина, Д. А. Поспелова. — М.: Физматлит, 2004. — 704 с.

6. *Ашинянц Р.А.* Логические методы в искусственном интеллекте. — М.: МГАПИ, 2001. — 204с.

7. *Биркгоф Г.* Теория решеток: Пер. с англ. — М.: Наука, 1984. — 568 с.

8. *Aho A.V., Garey M.R., Ulman J.D.* The transitive reduction of a directed graph. SIAM J. Computing. 1972. 1:2, P. 131—137.