УДК 517.983.24

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ *J*-НЕРАСТЯГИВАЮЩЕГО ОПЕРАТОРА*

Е. И. Иохвидов

Воронежский государственный технический университет

Вводится и исследуется семейство $\widetilde{M}_\beta$ ($\beta \in R$) линейных операторов, действующих в пространстве Крейна $H = P_+H \oplus P_-H$. Доказывается критерий принадлежности линейного оператора семейству $\widetilde{M}_\beta$. Устанавливается важное свойство этого семейства: всякий оператор $A \in \widetilde{M}_\beta$ ограничен тогда и только тогда, когда ограничен оператор P_-A. Описываются границы применимости преобразования Потапова—Гинзбурга к операторам $A \in \widetilde{M}_\beta$. Доказано, что операторы B, полученные с помощью такого преобразования, либо ограничены (при $\beta < 1$), либо наследуют вышеуказанное свойство операторов $A \in \widetilde{M}_\beta$ (при $\beta \geq 1$).

1. Рассматриваются линейные операторы, действующие в пространстве Крейна [1]. Эти операторы не предполагаются ограниченными и могут быть определены на произвольном (ненулевом) линеале этого пространства. Основным объектом исследования являются операторы класса $\widetilde{M}_\beta$, где $\beta \in R$.

Определение 1 *Будем говорить, что линейный оператор A с областью определения D_A принадлежит классу $\widetilde{M}_\beta$, если*

$$[Ax, Ax] \leq [x, x] + \beta \cdot \|x\|^2 \;\; \forall x \in D_A \tag{1}$$

для некоторого числа $\beta \in R$.

Замечание 1. *Из определения следует, что в частном случае $\beta \leq 0$ объединение операторных классов $\widetilde{M}_\beta$ по всем $\beta \leq 0$ совпадает с классом всех J-нерастягивающих операторов. С другой стороны, если $A \in \widetilde{M}_\beta$ для некоторого $\beta < 0$, то оператор A является равномерно J-нерастягивающим с константой $\delta = -\beta (> 0)$. Отметим также, что и те, и другие операторы хорошо известны и имеют многочисленные приложения (см., например, [2] и [3]).*

2. В этом разделе мы прежде всего докажем один критерий принадлежности линейного оператора классу $\widetilde{M}_\beta$ для некоторого $\beta \in R$. Напомним, что символом $\omega_+(A)$ обозначают следующую величину:

$$\omega_+(A) = \sup_{x \in D_A, x \neq 0} \frac{[Ax, Ax]}{\|x\|^2} \tag{2}$$

(см. [4]), которая, как показывают примеры, может быть как конечной, так и бесконечной.

Теорема 1. *Для того чтобы $A \in \widetilde{M}_\beta$ для некоторого $\beta \in R$, необходимо и достаточно, чтобы величина $\omega_+(A)$ была конечной.*

Необходимость. Из неравенства (1) вытекает

$$\frac{[Ax, Ax]}{\|x\|^2} \leq \frac{[x, x]}{\|x\|^2} + \beta \;\; \forall x \in D_A, \;\; x \neq 0. \tag{3}$$

Переходя к супремуму в обеих частях неравенства (3), получаем:

$$\omega_+(A) \leq \varepsilon_+(D_A) + \beta. \tag{4}$$

Так как число

$$\varepsilon_+(D_A) = \sup_{x \in D_A, x \neq 0} \frac{[x, x]}{\|x\|^2}, \tag{5}$$

называемое супремумом линеала D_A, удовлетворяет условиям

$$-1 \leq \varepsilon_+(D_A) \leq 1,$$

то из неравенства (4) вытекает конечность величины $\omega_+(A)$.

Достаточность. Из определения инфимума линеала D_A, т.е. числа

$$\varepsilon_-(D_A) = \inf_{x \in D_A, x \neq 0} \frac{[x, x]}{\|x\|^2}, \tag{6}$$

следует неравенство

$$\varepsilon_-(D_A) \cdot \|x\|^2 \leq [x, x] \;\; \forall x \in D_A, \tag{7}$$

а из формулы (2) и конечности величины $\omega_+(A)$ — неравенство

$$[Ax, Ax] \leq \omega_+(A) \cdot \|x\|^2 \;\; \forall x \in D_A. \tag{8}$$

Тогда с учетом (7) и (8) получаем:

$$[Ax, Ax] \leq \omega_+(A) \cdot \|x\|^2 =$$
$$= \varepsilon_-(D_A) \cdot \|x\|^2 + [\omega_+(A) - \varepsilon_-(D_A)] \cdot \|x\|^2 \leq$$
$$\leq [x, x] + [\omega_+(A) - \varepsilon_-(D_A)] \cdot \|x\|^2 \;\; \forall x \in D_A.$$

Таким образом, имеем неравенство

$$[Ax, Ax] \leq [x, x] + \beta \cdot \|x\|^2 \;\; \forall x \in D_A,$$

где число $\beta \in R$ определяется по формуле

$$\beta = \omega_+(A) - \varepsilon_-(D_A).$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00203)

Следовательно, $A \in \widetilde{M}_\beta$, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. *Можно показать, что объединение операторных классов $\widetilde{M}_\beta$ по всем $\beta \in R$ включает в себя операторы каждого из следующих классов:*

1.Строгие минус-операторы.

2. Нестрогие минус-операторы.

3. Операторы A, для которых оператор P_+A ограничен.

4. Все ограниченные операторы.

Здесь P_+ — один из двух взаимно-дополнительных ортопроекторов, задающих разложение пространства Крейна H:

$$H = H_+ \oplus H_-,$$
$$H_\pm = P_\pm H, P_\pm^2 = P_\pm^* = P_\pm,$$
$$P_+ + P_- = I,$$

а также каноническую симметрию $J = P_+ - P_-$, определяющую индефинитную метрику

$$[x, y] = (Jx, y), \quad x, y \in H,$$

в этом пространстве.

Другое важное свойство операторов $A \in \widetilde{M}_\beta$ устанавливает

Теорема 2. *Всякий оператор $A \in \widetilde{M}_\beta$ является ограниченным лишь одновременно с оператором P_-A.*

Доказательство. Пусть $A \in \widetilde{M}_\beta$ для некоторого $\beta \in R$. Перепишем неравенство (1) в равносильном виде:

$$\|P_+Ax\|^2 - \|P_-Ax\|^2 \le [x, x] + \beta \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in D_A.$$

Отсюда и из неравенства

$$[x, x] \le \varepsilon_+(D_A) \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in D_A$$

(это следует из определения (5)) вытекает:

$$\|P_+Ax\|^2 \le \|P_-Ax\|^2 + [\varepsilon_+(D_A) + \beta] \cdot \|x\|^2 \ \forall x \in D_A. \quad (9)$$

Если оператор P_-A ограничен, то из неравенства (9) выводим последовательно:

$$\|P_+Ax\|^2 \le \|P_-A\|^2 \cdot \|x\|^2 + [\varepsilon_+ D_A) + \beta] \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in D_A,$$

$$\|P_+Ax\|^2 \le [\|P_-A\|^2 + \varepsilon_+(D_A) + \beta] \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in D_A.$$

Следовательно, оператор $P_+ A$ также ограничен, и имеет место оценка:

$$\|P_+A\| \le \sqrt{\|P_-A\|^2 + \varepsilon_+(D_A) + \beta]}. \quad (10)$$

Далее, используя теорему Пифагора, а также ограниченность операторов P_+A и P_-A, получаем:

$$\|Ax\|^2 = \|P_+Ax\|^2 + \|P_-Ax\|^2 \le$$
$$\le [\|P_-A\|^2 + \varepsilon_+(D_A) + \beta] \cdot \|x\|^2 + \|P_-A\|^2 \cdot \|x\| \,|^2 =$$
$$= [2 \cdot \|P_-A\|^2 + \varepsilon_+(D_A) + \beta] \cdot \|x\|^2,$$

или окончательно,

$$\|Ax\|^2 \le [2 \cdot \|P_-A\|^2 + \varepsilon_+(D_A) + \beta] \cdot \|x\|^2 \quad \forall x \in D_A.$$

Таким образом, оператор A ограничен и имеет место оценка:

$$\|A\| \le \sqrt{2 \cdot \|P_-A\|^2 + \varepsilon_+(D_A) + \beta}. \quad (11)$$

Итак, доказано, что ограниченность оператора $P_- A$ влечет за собой ограниченность исходного оператора $A \in \widetilde{M}_\beta$. Обратная импликация верна всегда, поскольку оператор P_- ограничен. Теорема доказана полностью.

Замечание 3. *В случае, когда $\beta = 0$ и $H = B$ — банахово пространство с J-метрикой, соответствующий результат был получен в [5] (см. теорему 3.2).*

3. Исследуем теперь соотношения между классами $\widetilde{M}_\beta$ при различных $\beta \in R$ и так называемым классом Γ.

Определение 2. *Говорят, что линейный оператор A принадлежит классу Γ, если выполняется условие:*

$$\ker(P_+ + P_-A) = \{0\} \quad (12)$$

Условие $A \in \Gamma$, как легко проверить, равносильно тому, что ни один ненулевой вектор из подпространства H_- не переводится оператором A в подпространство H_+. В частности, справедлива импликация:

$$D_A \cap H_- = \{0\} \Rightarrow A \in \Gamma. \quad (13)$$

Теорема 3. *Если $A \in \widetilde{M}_\beta$ и $\beta < 1$, то $A \in \Gamma$.*

Доказательство. Из неравенства (1) последовательно выводим:

$$\begin{gathered} \|P_+Ax\|^2 - \|P_-Ax\|^2 \le \|P_+x\|^2 - \|P_-x\| \,|^2 + \\ +\beta \cdot \|P_+x\|^2 + \beta \cdot \|P_-x\|^2 \quad \forall x \in D_A, \\ \|P_+Ax\|^2 - \|P_-Ax\|^2 \le \\ \le (\beta+1) \cdot \|P_+x\|^2 + (\beta-1) \cdot \|P_-x\|^2 \quad \forall x \in D_A. \end{gathered} \quad (14)$$

Пусть x_0 — произвольный вектор из линеала $\ker(P_+ + P_-A)$, тогда

$$P_+x_0 = 0, \quad P_-Ax_0 = 0. \quad (15)$$

Подставляя равенства (15) в неравенство (14), получим:

$$\|P_+Ax_0\|^2 \le (\beta - 1) \cdot \|P_-x_0\|^2. \quad (16)$$

Из неотрицательности левой части (16) вытекает:

$$(\beta-1)\cdot\|P_-x_0\|^2 \geq 0. \qquad (17)$$

С другой стороны, условие $\beta<1$ влечет за собой условие:

$$(\beta-1)\cdot\|P_-x_0\|^2 \leq 0. \qquad (18)$$

Из неравенств (17) и (18) выводим последовательно:

$$(\beta-1)\cdot\|P_-x_0\|^2 = 0, \quad \|P_-x_0\|^2 = 0,$$

и, наконец,

$$P_-x_0 = 0 \qquad (19)$$

Сопоставив (19) с (15), получим, что $x_0 = 0$. Таким образом, проверена справедливость равенства (12), что и требовалось доказать.

В отличие от случая $\beta<1$, рассмотренного в теореме 3, случай $\beta\geq 1$ является «неопределенным» в том смысле, что имеют место соотношения

$$\widetilde{M}_\beta \cap \Gamma \neq 0 \quad \forall\beta\in[1;+\infty), \qquad (20)$$

и, в то же время,

$$\widetilde{M}_\beta \setminus \Gamma \neq 0 \quad \forall\beta\in[1;+\infty), \qquad (21)$$

Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий

Пример. В двумерном пространстве Крейна $H = H_+ \oplus H_-$, где $H_+ =$ л.о. $\{e\}$, $H_- =$ л.о. $\{f\}$, $\|e\| = \|f\| = 1$, $e\perp f$, зададим семейство операторов $A = A(\mu;\nu)$ формулой

$$Af = A(\mu;\nu)f = \mu e + \nu f. \qquad (22)$$

На произвольном векторе $x = \xi e + \eta f$ индефинитная метрика вычисляется по формуле

$$[x,x] = |\xi|^2 - |\eta|^2 . \qquad (23)$$

Отсюда вытекает, что

$$A(\mu;\nu)\in\widetilde{M}_\beta \Leftrightarrow |\mu|^2 - |\nu|^2 \leq \beta-1. \qquad (24)$$

Далее, для произвольного $\beta\in[1;+\infty)$ рассмотрим оператор $A = A(\sqrt{\beta};1)$, действующий по формуле

$$A(\sqrt{\beta};1)f = \sqrt{\beta}\cdot e + f. \qquad (25)$$

Легко проверить, что

$$A(\sqrt{\beta};1)\in\widetilde{M}_\beta \cap \Gamma. \qquad (26)$$

Таким образом, доказана справедливость соотношения (20).

С другой стороны, оператор $A = A(\sqrt{\beta-1};0)$, где $\beta\in[1;+\infty)$, действующий по формуле

$$A(\sqrt{\beta-1};0)f = \sqrt{\beta-1}\cdot e, \qquad (27)$$

очевидным образом принадлежит множеству $\widetilde{M}_\beta \setminus \Gamma$, что и подтверждает справедливость (21).

4. В этом разделе устанавливаются некоторые свойства преобразования Потапова—Гинзбурга, применительно к операторам семейства $\widetilde{M}_\beta$. Как известно, для всякого оператора $A\in\Gamma$ (и только в этом случае) имеет смысл дробно-линейное операторное преобразование Потапова—Гинзбурга следующего вида:

$$B = \delta(A) = (P_- + P_+A)(P_+ + P_-A)^{-1}. \qquad (28)$$

Это означает, что, во-первых,

$$D_B = (P_+ + P_-A)D_A, \qquad (29)$$

и, во-вторых, если

$$z = (P_+ + P_-A)x, \;\; x\in D_A, \qquad (30)$$

то

$$Bz = (P_- + P_+A)x \qquad (31)$$

(См. [1], 5.1).

Нам так же понадобятся общие формулы, вытекающие из формул (30) и (31):

$$P_+z = P_+x, \quad P_-z = P_-Ax, \qquad (32)$$

а так же

$$P_+Bz = P_+Ax, \quad P_-Bz = P_-x, \qquad (33)$$

Теорема 4. *Пусть* $A\in\widetilde{M}_\beta$ *и* $\beta\in[0;1)$. *Тогда оператор* $B = \delta(A)$ *ограничен, и при этом имеет место оценка:*

$$\|B\| \leq \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что оператор $B = \delta(A)$ имеет смысл в силу теоремы 3. Далее, из определения класса $\widetilde{M}_\beta$ вытекает, как и в теореме 3, неравенство:

$$\begin{aligned}&\|P_+Ax\|^2 - \|P_-Ax\|^2 \leq \\ &\leq (\beta+1)\cdot\|P_+x\|^2 + (\beta-1)\cdot\|P_-x\|^2 \quad \forall x\in D_A.\end{aligned} \qquad (34)$$

Подставив в это неравенство формулы (32) и (33), получим:

$$\begin{aligned}&\|P_+Bz\|^2 - \|P_-z\|^2 \leq \\ &\leq (\beta+1)\cdot\|P_+z\|^2 + (\beta-1)\cdot\|P_-Bz\|^2 \quad \forall z\in D_B.\end{aligned} \qquad (35)$$

Отсюда последовательно выводим:

$$\|P_+Bz\|^2 + (1-\beta)\|P_-Bz\|^2 \leq (\beta+1)\cdot\|P_+z\|^2 + \|P_-z\|^2,$$

$$(1-\beta)\|P_+Bz\|^2 + (1-\beta)\|P_-Bz\|^2 \leq$$

$$\leq (\beta+1)\cdot\|P_+z\|^2 + (\beta+1)\cdot\|P_-z\|^2,$$

$$(1-\beta)\cdot\|Bz\|^2 \leq (\beta+1)\cdot\|z\|^2 .$$

И, наконец,

$$\|Bz\|^2 \le \frac{1+\beta}{1-\beta}\cdot\|z\|^2 \quad \forall z \in D_B. \tag{36}$$

Неравенство (36), в силу положительности дроби в правой части, означает, что оператор B ограничен и действительно имеет место оценка:

$$\|B\| \le \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \tag{37}$$

Замечание 4. *Из оценки (37) в частном случае $\beta = 0$ вытекает классический результат:*

Преобразование Потапова—Гинзбурга J-нерастягивающего оператора является сжатием.

Теорема 5. *Пусть $A \in \widetilde{M}_\beta$, где $\beta \ge 0$, а также $A \in \Gamma$. Тогда:*

1) если $\beta \in [0;1]$ то P_+B ограничен, и при этом справедлива оценка:

$$\|P_+B\| \le \sqrt{1+\beta}.$$

2) Если $\beta > 1$, то из ограниченности оператора P_-B вытекает ограниченность оператора B, и при этом справедлива оценка:

$$\|B\| \le \sqrt{\beta\cdot\|P_-B\|^2 + 1 + \beta}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы, справедливо неравенство:

$$\begin{gathered}\|P_+Bz\|^2 - \|P_-z\|^2 \le \\ \le (\beta+1)\cdot\|P_+z\|^2 + (\beta-1)\cdot\|P_-Bz\|^2 \quad \forall z \in_B .\end{gathered} \tag{38}$$

В случае $\beta \in [0;1]$ отсюда последовательно выводим:

$$\|P_+Bz\|^2 - \|P_-z\|^2 \le (\beta+1)\cdot\|P_+z\|^2,$$

$$\|P_+Bz\|^2 \le (\beta+1)\cdot\|P_+z\|^2 + (\beta+1)\cdot\|P_-z\|^2,$$

$$\|P_+Bz\|^2 \le (\beta+1)\cdot\|z\|^2 \quad \forall z \in D_B.$$

Следовательно, оператор P_+B ограничен, и имеет место оценка

$$\|P_+B\| \le \sqrt{\beta+1} \tag{39}$$

В случае $\beta > 1$ из того же неравенства (38) получаем:

$$\|P_+Bz\|^2 \le (\beta-1)\cdot\|P_-Bz\|^2 + (\beta+1)\cdot\|z\|^2,$$

$$\|Bz\|^2 = \|P_+Bz\|^2 + \|P_-Bz\|^2 \le$$

$$\le (\beta-1)\cdot\|P_-Bz\|^2 + (\beta+1)\cdot\|z\|^2 + \|P_-Bz\|^2 =$$

$$= \beta\cdot\|P_-Bz\|^2 + (\beta+1)\cdot\|z\|^2,$$

или, окончательно,

$$\|Bz\|^2 \le \beta\cdot\|P_-Bz\|^2 + (\beta+1)\cdot\|z\|^2 \quad \forall z \in D_B.$$

Предполагая теперь ограниченность оператора P_-B, из последнего неравенства будем иметь:

$$\|Bz\|^2 \le \{\beta\cdot\|P_-B\|^2 + \beta + 1\}\cdot\|z\|^2 \quad \forall z \in D_B,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 5. *Сравнивая теоремы 2, 4 и 5, можно сделать вывод о том, что преобразования Потапова—Гинзбурга операторов из класса $\widetilde{M}_\beta$ либо ограничены (если $\beta < 1$), либо (если $\beta \ge 1$) обладают свойством, описанным в теореме 2, а именно: ограниченность такого оператора B равносильна ограниченности оператора P_-B.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986. 352 с.

2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивостьрешений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.

3. *Лившиц М.С.* Операторы, колебания, волны (открытые системы). М.: Наука, 1966. 300 с.

4. *Иохвидов Е.И.* Об операторах, коллинеарных равномерно J-нерастягивающим // В кн.: Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы” (Тезисы докладов). МГУ. М.: 2001. С. 166—168.

5. *Иохвидов И.С.* О банаховых пространствах с J-метрикой и некоторых классах линейных операторов в этих пространствах. — Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1968, 1, С. 60—80.