УДК 517.98

# К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ НА ВЕЩЕСТВЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

**А. С. Загорский**

*Воронежский государственный университет*

В данной статье рассматриваются спектральные свойства линейных отношений (многозначных линейных операторов) на вещественных банаховых пространствах и их комплексификациях.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В большинстве известных монографий (см. например, [1—8]), в которых подробно излагается, либо существенно используется спектральная теория линейных операторов в банаховых пространствах, их авторы, как правило, предполагают, что эти пространства являются комплексными, либо указывают на возможность комплексификации вещественного банахова пространства. Тем не менее при построении спектральной теории линейных операторов в вещественных банаховых пространствах иногда необходимо подробно отслеживать переход в комплексификацию пространства и обратный переход.

В данной статье рассматриваются некоторые вопросы спектральной теории линейных отношений (многозначных линейных операторов) и, в частности, линейных операторов на вещественных банаховых пространствах (в § 2 дана сводка используемых понятий и результатов из теории линейных отношений).

В § 4 вводится в рассмотрение комплексная резольвента и осуществляется построение функционального исчисления для линейных отношений на вещественных банаховых пространствах. Применение построенного функционального исчисления осуществляется в двух направлениях. Так в § 5 по секториальному линейному отношению с помощью его комплексной резольвенты строится голоморфная полугруппа операторов. В этом же параграфе получена спектральная теорема: по спектральной компоненте из комплексного спектра линейного отношения осуществляется его разложение в прямую сумму частей отношения с непересекающимися спектрами.



* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-00141

## 2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Приводимые в этом параграфе понятия и результаты из теории линейных отношений содержаться в работах [7—10].

В этой статье символами $X,Y$ обозначаются линейные пространства, рассматриваемые над полем $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, т.е. либо $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Через $\widetilde{\mathbb{K}}$ обозначим расширение поля $\mathbb{K}$ с помощью точки $\{\infty\}$.

**Определение 2.1**. *Любое линейное подпространство $A \subseteq X \times Y$ называется* ***линейным отношением*** *между линейными пространствами $X$ и $Y$ (линейным отношением на пространстве $X$, если $Y = X$). Если $X,Y$ — банаховы пространства и подпространство $A$ замкнуто в $X \times Y$, то $A$ называется* ***замкнутым*** *линейным отношением.*

Подпространство $D(A) = \{x \in X :$ существует $y \in Y$ такой, что $(x,y) \in A\}$, являющееся (канонической) проекцией $A$ на $X$, называется **областью определения** линейного отношения $A \subseteq X \times Y$. Через $Ax$, где $x \in D(A)$, обозначим множество $\{y \in Y : (x,y) \in A\}$; кроме того, $\operatorname{Ker} A = \{x \in D(A) : (x,0) \in A\}$ — **ядро** отношения $A$ и $\operatorname{Im} A = \{y \in Y : (x,y) \in A$ для некоторого $x \in D(A)\} = \bigcup\limits_{x\in D(A)} Ax$ — **область его значений**, являющееся проекцией $A$ на $Y$. Отметим, что $Ax = y + A0$ для любого $y \in Ax$. Для любого подмножества $M \subseteq X$ полагается $A(M) = \bigcup\limits_{x\in M} Ax.$

**Суммой** двух линейных отношений $A,B \subseteq X \times Y$ называется линейное подпространство из $X \times Y$ вида $A + B = \{(x,y) \in X \times Y : x \in D(A) \cap D(B), y \in Ax + Bx\}$. Значит, $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$, и под $Ax + Bx$ понимается алгебраическая сумма двух множеств $Ax$, $Bx$.

**Произведением** линейных отношений $A \subseteq X \times Y, \subseteq Y \times Z$, где $Z$ — линейное пространство, называется линейное подпространство из $X \times Z$ вида $BA = \{(x,z) \in X \times Z :$ существует $y \in D(B) \subseteq Y$ такой, что $(x,y) \in A, (y,z) \in B\}$.

**Обратным** к линейному отношению $A \subseteq X \times Y$ называется линейное отношение $A^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in A\} \subseteq Y \times X$.

Каждое линейное отношение $A \subseteq X \times Y$ является графиком многозначного отображения $\widetilde{A} : D(A) \subseteq X \to 2^Y$, где $\widetilde{A}x = Ax \in 2^Y$. В дальнейшем они отождествляются, и для их обозначения используется один и тот же символ $A$. Множество линейных отношений между $X$ и $Y$ обозначим через $LR(X,Y)$; если же $X = Y$, то положим $LR(X) = LR(X,X)$. При этом множество линейных операторов $LO(X,Y)$, действующих из $X$ в $Y$ считается включенным (при отождествлении их с графиком) в $LR(X,Y)$. Если $X = Y$, то положим $LO(X) = LO(X,X)$.

До конца этого параграфа $X, Y$ — банаховы пространства.

Множество замкнутых линейных отношений на $X$ обозначим через $LRC(X)$. Таким образом, если $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в $X$, то $\operatorname{End} \subset LO(X) \subset \subset LR(X)$.

Отношение $A \in LR(X,Y)$ называется **инъективным**, если $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, и **сюрьективным**, если $\operatorname{Im} A = Y$.

Замкнутое отношение $A \in LR(X)$ называется **непрерывно обратимым**, если оно одновременно инъективно и сюрьективно, и тогда $A^{-1} \in \operatorname{End} X$.

В следующем определении и в дальнейшем символ $I$, как правило, используется для обозначения тождественного оператора в любом из рассматриваемых банаховых пространств. В выражении «линейное отношение» слово «линейное» будет часто опускаться.

**Определение 2.2** *Пусть $X$ — банахово пространство, рассматриваемое над полем $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. **Резольвентным множеством** отношения $A \in LR(X)$ называется множество $\rho(A)$ всех $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых $(A - \lambda I)^{-1} \in \operatorname{End} X$. **Спектром** отношения $A \in LR(X)$ называется множество $\sigma(A) = \mathbb{K} \setminus \rho(A)$.*

Множество $\rho(A)$ открыто, спектр $\sigma(A)$ отношения $A \in LR(X)$ замкнут.

**Определение 2.3** *Отображение $R(\cdot, A) : \rho(A) \subseteq \mathbb{K} \to \operatorname{End} X, R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ называется **резольвентой** отношения $A \in LR(X)$.*

Резольвента отношения $A \in LR(X)$ является псевдорезольвентой в общепринятом смысле (см. следующее определение), при этом $\operatorname{Ker}(\lambda_0, A) = A0, \operatorname{Im}(\lambda_0, A) = D(A) \forall \lambda_0 \in \rho(A)$.

**Определение 2.4.** *Отображение $R : \Omega \subseteq \mathbb{K} \to \operatorname{End} X$, удовлетворяющее равенству (тождеству Гильберта) $R(\lambda_1) - R(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)R(\lambda_1)R(\lambda_2), \lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$ называется **псевдорезольвентой**.*

**Теорема 2.1** *Любая псевдорезольвента $R : \Omega \to \operatorname{End} X$ является резольвентой некоторого линейного отношения $A \in LR(X)$, $\Omega \subseteq \rho(A)$ и отношение $A$ определяется равенством $A = R(\lambda_0)^{-1} + \lambda_0 I$, $\lambda_0 \in \Omega$, причем правая часть не зависит от выбора $\lambda_0$.*

**Определение 2.5.** ***Расширенным спектром*** *отношения $A \in LR(X)$ называется подмножество $\tilde{\sigma}(A)$ из $\widetilde{\mathbb{K}}$, которое совпадает с обычным спектром $\sigma(A)$, если $A \in \operatorname{End} X$ и равное $\sigma(A) \cup \cup \{\infty\}$, если $A \notin \operatorname{End} X$. **Расширенным резольвентным множеством** отношения $A \in LR(X)$ называется множество $\tilde{\rho}(A) = \widetilde{\mathbb{K}} \setminus \tilde{\sigma}(A)$.*

Следующие два определения инвариантных подпространств, вообще говоря, не эквивалентны.

**Определение 2.6.** *Линейное замкнутое подпространство $X_0 \subseteq X$ назовем **инвариантным** для отношения $A \in LR(X)$ с непустым резольвентным множеством $\rho(A)$, если $X_0$ инвариантно относительно всех операторов $R(\lambda, A)$, $\lambda \in \rho(A)$. **Сужением** отношения $A \in LR(X)$ на инвариантное подпространство $X_0$ назовем отношение $A_0 \in LR(X_0)$, резольвентой которого является сужение $R_0 : \rho(A) \to \operatorname{End} X_0$, $R_0(\lambda) = R(\lambda, A) \mid X_0, \lambda \in \rho(A)$ резольвенты $R(\cdot, A) : \rho(A) \to \operatorname{End} X$ на $X_0$ и обозначим его через $A_0 = A \mid X_0$.*

Корректность определения сужения следует из теоремы 2.1.

**Определение 2.7.** *Линейное замкнутое подпространство $X_0 \subseteq X$ назовем **инвариантным** для отношения $A \in LR(X)$, если $Ax \cap X_0 \neq \varnothing$ для любого вектора $x \in X_0 \cap D(A)$. Отношение $A_0 = A \cap (X_0 \times X_0) \in LR(X_0)$ назовем **сужением** (или частью) отношения $A$ на инвариантное подпространство $X_0$.*

Отметим, что если $X_0$ — инвариантное для $A \in LR(X)$ подпространство из $X$ по определению 2.6, то оно инвариантно для $A$ и в смысле определения 2.7. Обратное не всегда верно даже для ограниченных операторов. Определение 2.7 использовалось в статье [9].

**Определение 2.8.** *Пусть $X_0, X_1$ — инвариантные по определению 2.7 подпространства из $X$ дляотношения $A \in LR(X)$, $A_i = A \mid X_i, i = 0,1$ — сужения $A$ на подпространства $X_0, X_1$ соответственно и выполнены следующие условия:*

$$X = X_0 \oplus X_1, \tag{2.1}$$

$$A = A_0 \oplus A_1, \tag{2.2}$$

*где второе условие означает, что подпространство $A \subseteq X \times X$ есть прямая сумма подпространств $A_0 \subseteq X_0 \times X_0 \subseteq X \times X$ и $A_1 \subseteq X_1 \times X_1 \subseteq X \times X$. Тогда будем говорить, что $A$ допускает* ***разложение*** *относительно прямой суммы подпространств вида (2.1), а также, что $A$ является* ***прямой суммой*** *отношений $A_1$ и $A_2$.*

Отметим, что если отношение $A \in LR(X)$ допускает разложение относительно прямой суммы (2.1) и имеет место (2.2), то верны следующие разложения $D(A) = D(A_0) \oplus \oplus D(A_1), \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}_0 \oplus \operatorname{Ker} A_1, \quad \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A_0 \oplus \oplus \operatorname{Im} A_1, A0 = A_0 0 \oplus A_1 0$. Множество $Ax$ для любого вектора $x \in D(A)$ определяется формулой $Ax = A_0 x_0 + A_1 x_1, x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in D(A_0)$, $x_1 \in D(A_1)$. Непосредственно из определений 2.6—2.8 следует

**Лемма 2.1.** *Отношение $A \in LR(X)$ с непустым $\rho(A)$ допускает разложение относительно (2.1) тогда и только тогда, когда подпространства $X_i, i = 0,1$ инвариантны относительно $A$ в смысле определения 2.6.*

**Определение 2.9.** *Будем говорить, что отношение $A \in LR(X)$* ***перестановочно*** *с отображением $F : X \to X$ (не обязательно линейным оператором), если $(F(x), F(y)) \in A$ для всех $(x, y) \in A$.*

**Определение 2.10.** ***Сопряженным*** *к отношению $A \in LR(X,Y)$ называется линейное отношение $A^*$ из $Y^* \times X^*$ ($X^*, Y^*$ — сопряженные к $X$ и $Y$ банаховы пространства) вида*

$$A^* = \{(\eta, \xi) \in Y^* \times X^* : \xi(x) = \eta(y) \ \forall (x, y) \in A\}.$$

Сопряженное отношение $A^*$ всегда замкнуто.

## 3. КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

В дальнейшем символами $X$ и $Y$ обозначаются вещественные линейные пространства. Нами используется традиционное

**Определение 3.1.** *Линейное пространство $X^2 = X \times X$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел с законом внешней композиции $(\alpha + i\beta)(x, y) = = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (x, y) \in X^2$ называется* ***комплексификацией*** *вещественного линейного пространства $X$ и обозначается через $\mathbb{X}$ или через $Compl(X)$ ($\mathbb{Y}$ — комплексификация линейного пространства $Y$).*

Далее символом $\mathbb{I}$ будем обозначать тождественный оператор в комплексификации $\mathbb{X}$ пространства $X$. Элементы из $\mathbb{X}$ удобно записывать в виде $x + iy$, где $x, y \in X, i$ — мнимая единица. При этом $X$ будем рассматривать в качестве подпространства $\mathbb{X}$. Норму в $\mathbb{X}$, если $X$ — банахово пространство, определим равенством $\|(x, y)\| = \max\limits_{\psi \in [0, 2\pi]} \|(\cos\psi)x + (\sin\psi)y\|, x, y \in X$. Символом $\mathbb{J}$ обозначим отображения $\mathbb{J} : \mathbb{X} \to \to \mathbb{X}, \mathbb{J}(x + iy) = x - iy, x, y \in X$, которое будет аддитивным, но не однородным. Ясно, что $\mathbb{J}^2 = \mathbb{I}$ и $\mathbb{J}^{-1} = \mathbb{J}$.

**Лемма 3.1.** *Для каждого линейного подпространства $\mathbb{X}_0$ из $\mathbb{X}$ его образ при отображении $\mathbb{J}$ является линейным подпространством в $\mathbb{X}$.*

**Определение 3.2.** *Подпространство $\mathbb{X}_0$ из комплексификации $\mathbb{X}$ пространства $X$ назовем* ***симметричным****, если выполнено условие $\mathbb{J}(\mathbb{X}_0) = \mathbb{X}_0$, или, что эквивалентно, для любого вектора $x + iy$ из $\mathbb{X}_0$ подпространству $\mathbb{X}_0$ принадлежит вектор $x - iy$.*

**Лемма 3.2.** *Линейное подпространство $\mathbb{X}_0$ из $\mathbb{X}$ является комплексификацией некоторого подпространства $X_0$ из $X$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}_0$ — симметричное подпространство из $\mathbb{X}$.*

**Замечание 3.1.** *Если $\mathbb{X}_0$ — симметричное подпространство из $\mathbb{X}$, то $\mathbb{X}_0$ является комплексификацией подпространства $X_0 = \mathbb{X}_0 \cap X$.*

**Лемма 3.3.** *Для любого линейного отношения $A \in LR(\mathbb{X})$ множество пар $A_{\mathbb{J}} = \mathbb{J} A \mathbb{J} \subseteq \mathbb{X}^2$ также является линейным отношением на $\mathbb{X}$, причем замкнутым, если $X$ — банахово пространство и $A \in LRC(X)$.*

**Определение 3.3.** ***Комплексификацией*** *линейного отношения $A \in LR(X,Y)$ называется линейное отношение $\mathbb{A} = \{(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2) \in \in \mathbb{X}^2 : (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A\} \in LR(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.*

**Замечание 3.2.** *Канонические вложения $X \subset \mathbb{X}$ и $Y \subset \mathbb{Y}$ индуцируют вложения $X^2 \subset \mathbb{X}^2$ и $Y^2 \subset \mathbb{Y}^2$ и, значит вложение $A \subset \mathbb{A}$. Таким образом имеет место равенство $A = \mathbb{A} \cap (X \times Y)$. Значит, комплексификация $\mathbb{A}$ является комплексификацией только одного отношения из $LR(X,Y)$. Если $A \in LO(X,Y)$, то и $\mathbb{A} \in LO(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.*

В оставшейся части этого параграфа $X$ — вещественное банахово пространство и $\mathbb{X}$ — его комплексификация.

**Определение 3.4.** *Пусть $A \in LRC(X)$. Множество $\sigma(\mathbb{A})$ назовем* ***комплексным спектром*** *отношения $A$, а множество $\widetilde{\sigma}(\mathbb{A})$ — его* ***расширенным комплексным спектром****. Они обозначаются соответственно через $\sigma(A,\mathbb{C})$ и $\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})$. Множества $\rho(A,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A,\mathbb{C}), \widetilde{\rho}(A,\mathbb{C}) = \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})$ называются* ***комплексным резольвентным*** *и* ***расширенным комплексным резольвентным*** *множествами отношения $A$.*

**Лемма 3.4.** *Для любого отношения $A \in LR(X)$ верны равенства:*

1. $D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A)$,
2. $\operatorname{Ker} \mathbb{A} = \operatorname{Ker} A \times \operatorname{Ker} A$,
3. $\operatorname{Im} \mathbb{A} = \operatorname{Im} A \times \operatorname{Im} A$,
4. $\mathbb{A}0 = A0 \times A0$,
5. $\widetilde{\sigma}(A) = \widetilde{\sigma}(\mathbb{A}) \cap \widetilde{\mathbb{R}}$,
6. $\sigma(A) = \sigma(\mathbb{A}) \cap \mathbb{R}$,

*причем $\mathbb{A} \in LRC(\mathbb{X})$, если $A \in LRC(X)$.*

**Лемма 3.5.** *Отношение $\mathbb{A} \in LR(\mathbb{X})$ является комплексификацией некоторого отношения $A \in LR(X)$ тогда и только тогда, когда оно перестановочно с отображением $\mathbb{J}$, или, что эквивалентно, выполняется равенство*

$$\mathbb{A} = \mathbb{J}\mathbb{A}\mathbb{J}. \tag{3.2}$$

**Следствие 3.6.** *Если для $\mathbb{A} \in LR(\mathbb{X})$ выполнено соотношение (3.2), то $\mathbb{A}$ является комплексификацией отношения $A = \mathbb{A} \cap (X \times X)$.*

**Следствие 3.2.** *Комплексификацией отношения $A^{-1}$, где $A \in LR(X)$, является отношение $\mathbb{A}^{-1} \in LR(\mathbb{X})$.*

**Лемма 3.6.** *Пусть $\mathbb{A} \in LR(\mathbb{X})$ — комплексификация некоторого отношения $A \in LR(X)$ и $\mathbb{X}_0$ — подпространство из $\mathbb{X}$, являющееся комплексификацией подпространства $X_0$ из $X$. Тогда $\mathbb{X}_0$ – инвариантное (по определению 2.7) подпространство для $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда $X_0$ инвариантно для $A$. Если $\mathbb{X}_0$ — инвариантное подпространство для $\mathbb{A}$, то $\mathbb{A} \mid \mathbb{X}_0$ — комплексификация отношения $A \mid X_0$.*

## 4. О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ НА ВЕЩЕСТВЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

До конца этой статьи символом $X$ обозначается вещественное банахово пространство, $\mathbb{X}$ — его комплексификация, $A \in LR(X)$ — вещественное линейное отношение, $\mathbb{A} \in LR(\mathbb{X})$ — его комплексификация.

Для любого множества $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ через $\overline{\Delta}$ обозначим множество $\{\overline{\lambda} : \lambda \in \Delta\}$. Таким же символом $\overline{\Delta}$ традиционно обозначается замыкание множества, но в этой статье оно не используется. Если $\Delta = \overline{\Delta}$, то множество $\Delta$ будем называть **симметричным** относительно $\mathbb{R}$.

**Лемма 4.1.** *Спектр $\sigma(\mathbb{A})$ комплексификации $\mathbb{A}$ отношения $A$ симметричен, причем верны равенства*

$$\mathbb{A} - \overline{\lambda}\mathbb{I} = \mathbb{J}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbb{J}, \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.1}$$

$$R(\overline{\lambda}, \mathbb{A}) = \mathbb{J}R(\lambda, \mathbb{A})\mathbb{J},\ R(\overline{\lambda}, \mathbb{A})\mathbb{J} = \mathbb{J}R(\lambda, \mathbb{A}), \quad \lambda \in \rho(A, \mathbb{C}). \tag{4.2}$$

Из леммы 4.1 следует, что при построении функционального исчисления для линейных отношений из $LR(X)$ следует учитывать симметричность их комплексного спектра и свойство (4.2) резольвенты.

Пусть $\Delta$ открытое множество из $\mathbb{C}$, содержащее $\sigma(A,\mathbb{C})$ и обладающее свойством $\Delta = \overline{\Delta}$. Рассмотрим алгебру $C(\Delta)$ непрерывных на $\Delta$ комплекснозначных функций. Пусть $\gamma$ — контур, лежащий в $\Delta \cap \rho(A,\mathbb{C})$ и являющийся образом непрерывно дифференцируемой функции $\varphi : L \to \mathbb{C}$ (допускается конечное число разрывов первого рода у $\varphi'$), где $L$ — некоторый промежуток из $\mathbb{R}$, совпадающий либо с отрезком вида $[-\Theta, \Theta]$, $\Theta > 0$, либо $L = \mathbb{R}$. Дополнительно предположим, что $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$, $t \in L$.

Рассмотрим функцию $f \in C(\Delta)$ и контурный интеграл

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_f &= \frac{i}{2\pi}\int_\gamma f(\lambda)R(\lambda,\mathbb{A})d\lambda = \\ &= \frac{i}{2\pi}\int_L f(\varphi(t))R(\varphi(t),\mathbb{A})\varphi'(t)dt \end{aligned} \tag{4.3}$$

при условии его абсолютной сходимости. Тем самым этой формулой определен ограниченный оператор $\mathbb{B}_f \in \operatorname{End}\mathbb{X}$. Из леммы 4.1 следует, что верны равенства $\mathbb{J}\mathbb{B}_f\mathbb{J} = \frac{i}{2\pi}\int_L f(\varphi(-t))R(\varphi(-t),\mathbb{A})\varphi'(-t)dt = \mathbb{B}_{\tilde{f}}$, где $\tilde{f} \in C(\Delta), \tilde{f}(\lambda) = \overline{f(\overline{\lambda})}, \lambda \in \Delta$. Отсюда получаем, что верна

**Лемма 4.2.** *Имеет место равенство*

$$\mathbb{J}\mathbb{B}_f\mathbb{J} = \mathbb{B}_{\tilde{f}}. \tag{4.4}$$

*Если $\tilde{f} = f$, то оператор $\mathbb{B}_f$ является комплексификацией некоторого оператора $B_f \in \operatorname{End} X$.*

Для вычисления оператора $B_f$ введем понятие комплексной резольвенты линейного отношения $A \in LR(X)$.

**Определение 4.1.** *Отображение $R_{\mathbb{C}}(\cdot,\cdot,A) : \mathbb{C} \times \rho(A,\mathbb{C}) \to \operatorname{End} X$, где $R_{\mathbb{C}}(\mu,\lambda,A)$*

*— оператор из* $\operatorname{End} X$, *комплексификацией которого является оператор из* $\operatorname{End}\mathbb{X}$ *вида*

$$\frac{1}{2}(\mu R(\lambda,\mathbb{A})+\overline{\mu}R(\overline{\lambda},\mathbb{A})),\ \lambda\in\rho(A,\mathbb{C}),\ \mu\in\mathbb{C}, \quad (4.5)$$

*будем называть* ***комплексной резольвентой*** *отношения* $A\in LR(X)$.

Корректность определения 4.1 следует из лемм 3.5 и 4.1. Отметим, что сужение комплексной резольвенты на множество $\{1\}\times\mathbb{R}$ отождествляемое с $\mathbb{R}$ совпадает с резольвентой $R(\cdot,A):\rho(A)\subset\mathbb{R}\to\operatorname{End}X$ отношения $A\in LR(X)$, а сама комплексная резольвента является функцией первого аргумента при декомплексификации $\mathbb{C}$.

Наряду с комплексной резольвентой важную роль в исследовании спектральных свойств отношения $A\in LR(X)$ играет функция $\Phi:\rho(A,\mathbb{C})\to\operatorname{End}X, \Phi(\lambda)=((A-\lambda_1 I)^2+\lambda_2^2 I)^{-1}$, $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2\in\rho(A,\mathbb{C})$. Корректность ее определения объясняется следующим образом. Из равенства (3.2) следует, что линейное отношение $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})(\mathbb{A}-\overline{\lambda}\mathbb{I})$ является комплексификацией линейного отношения $(A-\alpha I)^2+\beta^2 I$, где $\alpha+i\beta=\lambda$. Из леммы 3.5 и ее следствия 3.2 получаем, что оператор $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{-1}(\mathbb{A}-\overline{\lambda}\mathbb{I})^{-1}$ является комплексификацией оператора $\Phi(\lambda)$, $\lambda\in\rho(A,\mathbb{C})$.

**Лемма 4.3.** *Если $A$ — линейный оператор из $LO(X)$, то его комплексная резольвента представима в виде* $R_{\mathbb{C}}(\mu,\lambda,A)=((\operatorname{Re}\mu)A-(\operatorname{Re}\mu\overline{\lambda})I)\Phi(\lambda)=((\operatorname{Re}\mu)A-(\operatorname{Re}\mu\overline{\lambda})I)((A-(\operatorname{Re}\lambda)I)^2+(\operatorname{Im}\lambda)^2 I)^{-1},\ \lambda\in\rho(A,\mathbb{C}),\mu\in\mathbb{C}.$

Отметим, что если область определения отношения $A$ плотна в $X$, то его комплексная резольвента $R(\mu,\lambda,A)$ является замыканием оператора $\Phi(\lambda)((\operatorname{Re}\mu)A-(\operatorname{Re}\mu\overline{\lambda})I)):D(A)\subset X\to X,\ \mu\in\mathbb{C},\lambda\in\rho(A,\mathbb{C})$.

Теперь вернемся к формуле (4.3) и, используя комплексную резольвенту отношения $A\in LR(X)$, найдем формулу для оператора $B_f$, комплексификацией которого является оператор $\mathbb{B}_f$ при условии, что $\tilde{f}=f$ (см. лемму 4.2). Формулу (4.3) для оператора $\mathbb{B}_f\in\operatorname{End}\mathbb{X}$ перепишем в виде (при этом используются свойства контура $\gamma$ и функций $f,\varphi$)

$$\mathbb{B}_f=\frac{i}{2\pi}\int_0^{\Theta}f(\varphi(t))R(\varphi(t),\mathbb{A})\varphi'(t)dt-$$
$$-\frac{i}{2\pi}\int_0^{\Theta}\overline{f(\varphi(t))}R(\overline{\varphi(t)},\mathbb{A})\overline{\varphi'(t)}dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\Theta}(if(\varphi(t))R(\varphi(t),\mathbb{A})\varphi'(t)+\overline{if(\varphi(t))}R(\overline{\varphi(t)},\mathbb{A})\overline{\varphi'(t)}dt.$$

поэтому оператор $\mathbb{B}_f\in\operatorname{End}\mathbb{X}$ можно записать в виде

$$B_f=\frac{1}{\pi}\int_0^{\Theta}R_{\mathbb{C}}(if(\varphi(t))\varphi'(t),\varphi(t),A)dt. \quad (4.6)$$

Итак доказана

**Теорема 4.1.** *В условиях леммы 4.2 оператор $B_f$ определяется формулой (4.6). В частности, если $A\in LO(X)$, то оператор $B_f$ определяется формулой*

$$B_f=\frac{1}{\pi}\int_0^{\Theta}(-(\operatorname{Im}(\varphi(t))\varphi'(t))A+ \\ +(\operatorname{Im}(\varphi(t))\overline{\varphi(t)}\varphi'(t))I)\Phi(\varphi(t))dt. \quad (4.7)$$

Теперь приступим к построению функционального исчисления для линейного отношения $A\in LR(X)$ с отмеченными ранее ограничениями на контур $\gamma$ и функцию $\varphi:L\to\mathbb{C}$. Открытое множество $\Delta\subset\widetilde{\mathbb{C}}$ будем считать содержащим $\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})$, а множество $\Delta\cap\mathbb{C}$ симметричным. Символом $\mathfrak{F}(\Delta)$ обозначим алгебру голоморфных на $\Delta$ комплексных функций $f:\Delta\to\mathbb{C}$, обладающих свойством $f(\overline{\lambda})=\overline{f(\lambda)}$, $\lambda\in\Delta$. Предположим, что контур $\gamma$ является замкнутым (то есть $\varphi(-\Theta)=\varphi(\Theta)$) и окружающим $\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})$.

Рассмотрим функцию $f\in\mathfrak{F}(\Delta)$ такую, что интеграл $\int f(\lambda)R(\lambda,\mathbb{A})d\lambda$ абсолютно сходится, причем $f(\infty)\in\mathbb{R}$, если $\infty\in\Delta$. Тогда формула

$$f(\mathbb{A})=\delta f(\infty)\mathbb{I}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(\lambda)R(\lambda,\mathbb{A})d\lambda, \quad (4.8)$$

где $\delta=1$ или $\delta=0$ в зависимости от того находится $\lambda=\infty$ внутри $\gamma$ или вне его, определяет ограниченный оператор из алгебры $\operatorname{End}\mathbb{X}$ который назовем функцией $f$ от отношения $\mathbb{A}$. Нами используется термин контур «окружает» $\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})$ в том смысле, что он положительно ориентирован и $\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})$ содержится внутри $\gamma$. В статье [9] получено следующее утверждение

**Теорема 4.2.** *Для спектра оператора $f(\mathbb{A})$, определенного формулой (4.8) имеет место равенство* $\sigma(f(\mathbb{A}))=f(\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C}))=\{f(\lambda),\lambda\in\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})\}$.

Из леммы 3.5, 4.2 и теоремы 4.1 следует, что оператор $f(\mathbb{A})\in\operatorname{End}\mathbb{X}$ является комплексификацией оператора из $\operatorname{End}X$, который обозначим через $f(A)$ и назовем функцией $f$ от отношения $A$. Из формул (4.6)—(4.8) и свойства 5 леммы 3.4 следует

**Теорема 4.3.** *Оператор $f(A)\in\operatorname{End}X$ определяется формулой*

$$f(A) = \delta f(\infty)I - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\Theta} R_{\mathbb{C}}(if(\varphi(t))\varphi'(t), \varphi(t), A)dt, \quad (4.9)$$

*где правая часть не зависит от выбора функции $\varphi$ с отмеченными выше свойствами. Если $A \in LO(X)$, то формула (4.9) приобретает вид $f(A) = \delta f(\infty)I - B_f$, где оператор $B_f \in \mathrm{End}\, X$ задается формулой (4.7). Кроме того имеют место следующее равенства $\sigma(f(A), \mathbb{C}) = f(\tilde{\sigma}(A, \mathbb{C})), \sigma(f(A)) = f(\tilde{\sigma}(A, \mathbb{C})) \cap \mathbb{R}$.*

## 5. О ПОЛУГРУППАХ ОПЕРАТОРОВ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

Подход, основанный на использовании комплексной резольвенты линейного отношения $A \in LR(X)$ для построения функционального исчисления может быть использован и при построении полугрупп операторов по заданному линейному отношению на $X$.

**Определение 5.1.** *Отношение $A \in LR(X)$ назовем* ***секториальным*** *с углом $\theta \in (\pi/2, \pi)$, если для некоторого $a \in \mathbb{R}$ сектор $\Omega = \Omega_{a,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \theta, \lambda \neq a\}$ содержится в $\rho(A, \mathbb{C})$ и для каждого $\delta \in (0, \theta - \pi/2)$ выполнено условие*

$$\sup_{\lambda \in \Omega_{a,\theta-\delta}} \|R(a - \lambda, \lambda, A)\| = M_\delta < \infty. \quad (5.1)$$

В терминах резольвенты отношения $\mathbb{A}$ условие (5.1) будет записываться в виде

$$\sup_{\lambda \in \Omega_{a,\theta-\delta}} \left\|(a - \lambda)R(\lambda, A) + (a - \overline{\lambda})R(\overline{\lambda}, A)\right\| = M_\delta < \infty$$

и несколько отличаться от общепринятого определения [11].

Если необходимо рассматривая вместо отношения $A$ отношение $A - aI$, без ограничения общности можно считать $a = 0$ и соответствующий сектор обозначать $\Omega_\theta$.

Итак, пусть $A \in LR(X)$ — секториальное отношение. Построение голоморфной полугруппы $\mathbb{T} : [0, \infty) \to \mathrm{End}\, \mathbb{X}$ осуществляется стандартным образом с помощью формулы

$$\mathbb{T}(t) = \frac{i}{2\pi}\int_\gamma e^{\lambda t} R(\lambda, \mathbb{A})d\lambda, \mathbb{T}(0) = \mathbb{I}, \quad (5.2)$$

где $\gamma$ — граница сектора $\Omega_{\theta+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Функцию $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, определяющую контур $\gamma$ зададим равенствами $\varphi_\varepsilon(\tau) = -e^{-i(\theta-\varepsilon)}\tau$ для $\tau \in (-\infty, 0)$ и $\varphi_\varepsilon(\tau) = e^{i(\theta-\varepsilon)}\tau$ для $\tau \in [0, \infty)$, где $\varepsilon = (\theta - \pi/2 - \delta)/2$.

Интеграл (5.2) (при задании контура указанной функцией $\varphi$) сходится «в главном» в соответствии с формулой $\mathbb{T}(t) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{i}{2\pi}\int_{\gamma_\alpha} e^{\lambda t} R(\lambda, \mathbb{A})d\lambda$, где $\gamma_\alpha, \alpha > 0$, — контур, являющийся образом сужения $\varphi_\alpha : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{C}$ функции $\varphi$ на $[-\alpha, \alpha]$.

Обычным образом проверяется (см., например, [9]), что получаемая таким образом полугруппа $\mathbb{T} : [0, \infty) \to \mathrm{End}\, \mathbb{X}$ допускает голоморфное расширение в некоторый сектор из $\mathbb{C}$. Поскольку функции $\varphi, \varphi_\alpha, f_t(\lambda) = e^{\lambda t}, f_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ удовлетворяют условиям теоремы 4.1, то каждый из операторов $\mathbb{T}(t), t > 0$ является комплексификацией некоторого оператора $T(t), t > 0$. Если $A \in LO(X)$, то из формулы (4.7) получаем представление операторов $T(t)$ вида

$$T(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{t\tau\cos\omega}(\tau \sin(\sin\omega)I - \\ - \sin(\omega + \sin\omega)A)\Phi(\tau e^{i\omega})d\tau, \quad (5.3)$$

где $\omega -$ любое число из $(\pi/2, \theta)$.

**Теорема 5.1.** *Пусть $A \in LR(X)$ — секториальное отношение с углом $\theta \in (\pi/2, \pi)$. Предположим, что векторы из подпространства $A0$ разделяют функционалы из подпространства $A^*0 \subseteq X^*$. Тогда*

*1. Банахово пространство $X$ представимо в виде прямой суммы*

$$X = X_0 \oplus X_\infty, \quad (5.4)$$

*где $X_\infty = A0$, а $X_0$ — замыкание подпространства $D(A)$ в $X$; кроме того подпространства $X_0$ и $X_\infty$ замкнуты и инвариантны относительно $A$ (по любому из двух определений);*

*2. Сужение $A_0 = A \mid X_0$ является секториальным оператором из $LO(X_0)$ причем $A_0$ — генератор голоморфной полугруппы операторов $T_0 : [0, \infty) \to \mathrm{End}\, X_0$, определенной формулой (5.3), в которой роль $A$ играет оператор $A_0$;*

*3. Голоморфная полугруппа $T : [0, \infty) \to \mathrm{End}\, X$, с помощью формулы (4.6) определенная как $T(t) = B_{f_t}$ с $f_t(\lambda) = e^{\lambda t}$, $\Theta = \infty$ и определенными выше $A$ и $\varphi$ допускает разложение $T(t) = T_0(t) \oplus 0, t \geqslant 0$, относительно разложения (5.4) пространства $X$.*

**Следствие 5.1.** *Для комплексного спектра операторов $T(t), t > 0$ имеет место равенство $\sigma(T(t), \mathbb{C}) \setminus \{0\} = \{e^{\lambda t}, \lambda \in \sigma(A, \mathbb{C})\}$.*

В основе приводимых далее результатов находится полученная в статье [9]

**Теорема 5.2.** *Пусть $Z$ — комплексное банахово пространство и расширенный спектр* *отношения* $A \in LR(Z)$ *представим в виде* $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, *где* $\sigma_0$ *— компакт из* $\mathbb{C}$ *и* $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$ *(*$\sigma_0$ *называют спектральной компонентой из* $\widetilde{\sigma}(A)$*).*

*Тогда существует разложение пространства* $Z$ *в прямую сумму* $Z = Z_0 \oplus Z_1$ *инвариантных (в смысле определения 2.6) относительно* $A$ *замкнутых подпространств* $Z_0$ *и* $Z_1$*, а сужения* $A_0 = A \mid Z_0$ *и* $A_1 = A \mid Z_1$ *обладают следующими свойствами:*

*1.* $A_0 \in End\ Z_0, \widetilde{\sigma}(A_0) = \sigma(A_0) = \sigma_0$*;*

*2.* $A_1 0 = A0,\ D(A) = Z_0 \oplus D(A_1), \widetilde{\sigma}(A_1) = \sigma_1$.

*Разложение* $Z = Z_0 \oplus Z_1$ *осуществляет проектор Рисса* $P$ *(то есть* $Z_0 = \operatorname{Im} P, Z_1 = \operatorname{Im}(I - P)$*), определенный формулой*

$$P = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\gamma} R(\lambda, A) d\lambda, \qquad (5.5)$$

*где* $\gamma$ *— замкнутая жорданова положительно ориентированная кривая, расположенная в* $\rho(A)$ *так, что внутри нее лежит* $\sigma_0$ *(то есть положительно ориентированная), а* $\sigma_1$ *— вне. В дальнейшем про такой проектор будем говорить, что он построен по* $\sigma_0$.

Важным является вопрос получения аналога теоремы 5.2 для линейного отношения $A$ на вещественном банаховом пространстве $X$ по некоторой спектральной компоненте $\sigma_0$ из ее расширенного комплексного спектра. Основная проблема состоит в том, что не всякий проектор Рисса, построенный по спектральной компоненте из $\widetilde{\sigma}(\mathbb{A})$ комплексификации $\mathbb{A}$ отношения $A$, является комплексификацией некоторого проектора из $\operatorname{End} X$.

**Теорема 5.3.** *Пусть расширенный комплексный спектр* $\widetilde{\sigma}(A, \mathbb{C})$ *допускает представление вида* $\widetilde{\sigma}(A, \mathbb{C}) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, *где* $\sigma_0$ *— компакт из* $\mathbb{C}$, $\sigma_1$ *— замкнутое множество из* $\widetilde{\mathbb{C}}$ *и* $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$. *Тогда проектор Рисса* $\mathbb{P} \in \operatorname{End} \mathbb{X}$, *построенный по спектральной компоненте* $\sigma_0$, *является комплексификацией некоторого проектора из* $P \in \operatorname{End} X$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{\sigma_0} = \sigma_0$ *(то есть множество* $\sigma_0$ *симметрично в* $\mathbb{C}$ *относительно* $\mathbb{R}$*).*

*Если* $\overline{\sigma_0} = \sigma_0$, *то банахово пространство* $X$ *допускает разложение вида (2.1) в прямую сумму инвариантных относительно* $A$ *замкнутых подпространств* $X_0 = \operatorname{Im} P, X_1 = \operatorname{Ker} P$. *Для частей* $A_k = A \mid X_k, k = 0,1$ *отношения* $A$ *верны следующие свойства:*

*1.* $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0 \oplus \mathbb{X}_1$, *то есть комплексификация* $\mathbb{X}$ *банахова пространства* $X$ *есть прямая сумма комплексификаций* $\mathbb{X}_0$ *и* $\mathbb{X}_1$ *подпространств* $X_0$ *и* $X_1$ *соответственно, причем* $\mathbb{X}_0$ *и* $\mathbb{X}_1$ *— инвариантные относительно* $\mathbb{A}$ *пространства;*

*2.* $\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \oplus \mathbb{A}_1$, *где* $\mathbb{A}_0 \in \operatorname{End} \mathbb{X}_0$ *комплексификация оператора* $A_0$ *и* $\mathbb{A}_1 \in LR(\mathbb{X}_1)$ *комплексификаций отношения* $A_1 \in LR(X_1)$. *Кроме того,* $A = A_0 \oplus A_1$*;*

*3.* $A_0 \in End\ X_0, \widetilde{\sigma}(A_0, \mathbb{C}) = \sigma(A_0, \mathbb{C}) = \sigma_0$*;*

*4.* $A_1 0 = A0, D(A) = X_0 \oplus D(A_1), \widetilde{\sigma}(A_1, \mathbb{C}) = \widetilde{\sigma}(\mathbb{A}_1) = \sigma_1$;

*5. подпространства* $X_0$ *и* $X_1$ *являются* симметричными подпространствами из $X$.

**Теорема 5.4.** *Пусть* $\sigma_0$ *— симметричная спектральная компонента из* $\sigma(A, \mathbb{C})$. *Тогда проектор Рисса* $P \in \operatorname{End} X$, *построенный по* $\sigma_0$, *определяется формулой* $P = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 R_{\mathbb{C}}(i\varphi'(t), \varphi(t), A) dt$, *где* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ *— любая непрерывно дифференцируемая функция с контуром* $\gamma = \varphi([0,1])$, *окружающим* $\sigma_0$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, Т. I. 1962.

2. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. — М.: Мир, 1972.

3. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы операторов. — М.: ИЛ, 1962

4. *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter semigroups for linear evolution equations. New-York: Springer-Verlag, 2000.

5. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.

6. Функциональный анализ.Справочная математическая библиотека / под ред. С. Г. Крейна. — М.: Наука, 1972.

7. *Cross R.* Multivalued linear operators. New York: M. Dekker, 1998.

8. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. Pure and Applied Mathematics// A Series of Monographs and Textbooks. — New York: M. Dekker, 1998

9. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Матем. сб., 2002. Т. 193, № 11.

10. *Баскаков А.Г.* Теория представлений банаховых алгебр, групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов. Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: МАИ, 2004.

11. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.