УДК 517.946

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. В. Глушко

Воронежский государственный университет

В работе изучается задача Коши для линейной системы уравнений с частыми производными, описывающей малые колебания вязкой сжимаемой жидкости во вращающейся системе координат под действием стационарной или периодической возмущающей силы. Построены нулевой и первый члены асимптотических разложений компонент решения при $t \to \infty$. Особо рассмотрен резонансный случай. Выделены классы единственности предельных амплитуд, то есть стационарных состояний, к которым стабилизируются решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются свойства решения линейной системы уравнений

$$\frac{\partial \bar V}{\partial t} - [\bar V, \bar\omega] - \nu\Delta V + \operatorname{grad} p - \nu\beta\nabla \operatorname{div} \bar V = \bar f(x,t);$$
$$\alpha^2 \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \bar V = 0, \tag{1.1}$$

которая описывает малые колебания вязкой сжимаемой жидкости во вращающейся системе координат в области $\{x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0\}$ с учетом кориолисовых сил, при начальных данных

$$\overline{V}(x,0) = \overline{W}(x),\ p(x,0) = q(x). \tag{1.2}$$

Вектор-функция $\overline{V}(x,t)$ имеет вид $\overline{V}(x,t) = \{v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t)\}$; $\bar\omega$ — заданный постоянный вектор угловой скорости вращения системы координат, который будем считать, не ограничивая общности, равным $\bar\omega = (0,0,\omega), \omega > 0; [\cdot,\cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Коэффициенты вязкости $\nu > 0$ и сжимаемости $\alpha^2 > 0$ — постоянны, $\beta = \text{const} \geq 0$.

В главе 1 монографии [1] построены точные асимптотические представления при $t \to \infty$ решения задачи Коши для однородной системы (1.1) с условиями (1.2). Основное утверждение упомянутой главы будет сформулировано ниже без доказательства. Отметим также, что для нескольких начально-краевых задач для однородной системы (1.1) в полупространстве $\mathbb{R}^3_+$ асимптотика при $t \to \infty$ компонент решения также построена в [1]. В настоящей работе изучается система (1.1) с правыми частями $\bar f(x,t)$, имеющими специальный вид. Первым рассмотрен случай стационарной правой системы уравнений (1.1). Доказано, что решение задачи (1.1)—(1.2) в этом случае при $t \to \infty$ «стабилизируется» к решению соответствующего стационарного уравнения и выписан главный член асимптотики. Аналогичный результат получен и в случае периодической правой части вида $\bar f(x,t) = e^{i\chi t}\bar f(x)$. Отметим, что в этом случае при исследовании асимптотики существенно различаются нерезонансный $(\omega \neq \pm\chi)$ и резонансный $(\omega = \pm\chi)$ случаи.

С проблемой построения асимптотических оценок решений задачи (1.1)—(1.2) тесно связан вопрос о единственности решения соответствующей стационарной (или периодической) задачи, к которому стабилизируется решение задачи (1.1)—(1.2). В связи с этим в последнем разделе работы исследуются вопросы единственности решения стационарной системы (1.1), а также единственности периодического решения (с частотой $\chi \neq \pm\omega$) системы (1.1).

Теперь сформулируем без доказательства основные результаты по построению асимптотики «затухания» решения при $t \to \infty$ задачи (1.1)—(1.2) в случае нулевых правых частей в системе (1.1). Вначале сформулируем

Условие 1. Функции $\overline{W}(x) = \{W_1(x), W_2(x), W_3(x)\}, q(x)$ из (1.2) имеют обобщенные (по С. Л. Соболеву) производные до четвертого порядка в $\mathbb{R}^3$ и существует интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left\{ (1+|x|)\left(\left|\overline{W}(x)\right| + |q(x)|\right) + \left|\left(1+\Delta_x^2\right)\overline{W}\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\left(1+\Delta_x^2\right)q\right| \right\} dx < \infty.$$

Обозначим через $\begin{bmatrix} \overline{V}^1(x,t) \\ p^1(x,t) \end{bmatrix}$ решение задачи (1.1)—(1.2) при $\bar f(x,t) \equiv 0$. Справедлива

Теорема 1. Если правые части в (1.2) удовлетворяют условию (1), то для $\begin{bmatrix} \overline{V}^1(x,t) \\ p^1(x,t) \end{bmatrix}$ справедливо асимптотическое представление при $t \to \infty$

$$\begin{bmatrix} \overline{V}^1(x,t) \\ p^1(x,t) \end{bmatrix} = \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}} \left(G(A,B)\cos\omega t + G(B,-A)\sin\omega t \right) +$$

$$+ t^{-\frac{7}{4}} G_3 + t^{-\frac{5}{4}} G_4 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \begin{bmatrix} \overline{W}(y) \\ q(y) \end{bmatrix} dy + \int\limits_{\mathbb{R}^3} G'(x-y,t) \begin{bmatrix} \overline{W}(y) \\ q(y) \end{bmatrix} dy +$$

$$+ e^{-\frac{t}{2\alpha^2\nu(1+\beta)}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} G''\left(x-y, t, \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{bmatrix} \overline{W}(y) \\ q(y) \end{bmatrix} dy, \quad (1.3)$$

где

$$G(A,B) = \begin{bmatrix} A & -B & 0 & 0 \\ -B & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$G_3 = a_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$G_4 = a_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_0^\pi \left(a^3(\theta) - 3a(\theta) b^2(\theta) \right) \sin\theta d\theta; \\ B &= \int\limits_0^\pi \left(b^3(\theta) - 3a^2(\theta) b(\theta) \right) \sin\theta d\theta; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$a_3 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\omega^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{3}{2}}}{16\cdot\sqrt{2}\cdot\nu^{\frac{3}{4}}}; a_4 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\omega^{\frac{3}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}}{8\cdot\sqrt{2}\cdot\nu^{\frac{1}{4}}};$$

$$a(\theta) = \frac{p(\theta) + p^2(\theta) + q^4(\theta)}{2\left(p^2(\theta) + q^4(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}};$$

$$b(\theta) = \frac{q^2(\theta)}{\left(2(p(\theta) + p^2(\theta) + q^4(\theta))(p^2(\theta) + q^4(\theta))\right)^{\frac{1}{2}}}; \quad (1.5)$$

$$q^2(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{2\omega\alpha^2}; \; p(\theta) = \nu\left(1 + \beta\frac{\sin^2\theta}{2}\right), \quad (1.6)$$

числа A и B отличны от нуля при всех рассматриваемых значениях $\alpha, \beta, \omega, \nu$; элементы матрицы $G''(x,t) = \{g'_{k,m}(x,t)\}, 1 \le k, m \le 4$ — непрерывные в $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty]$ функции (x,t), причем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g'_{k,m}(x,t)}{1+|x|} t^{\frac{3}{2}} = 0, 1 \le k, m \le 2;$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g'_{3,3}(x,t)}{1+|x|} t^{\frac{7}{4}} = \lim_{t\to\infty} \frac{g'_{4,4}(x,t)}{1+|x|} t^{\frac{5}{4}} = 0;$$

$$\left| g'_{k,m}(x,t) \right| \le \left(1+|x|\right) t^{-\frac{7}{4}} \cdot C_{k,m};$$

$$(k,m) = (1,4), (2,4), (4,1), (4,2);$$

$$g'_{k,m}(x,t) \le (1+x) t^{-2} \cdot C_{k,m};$$

$$(k,m) = (1,3), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,3)$$

равномерно по всем $x \in \mathbb{R}^3$. Элементы матрицы $G''\left(x, t, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \left\{ g''_{k,m}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial y}\right) \right\}, 1 \le k, \; m \le 4$, есть дифференциальные операторы вида

$$g'_{k,m}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial y}\right) = g^0_{k,m}(x,t)(1+\Delta_y^2) \text{ при } 1 \le k,m \le 4.$$

Здесь коэффициенты $g^0_{k,m}(x,t)$, $(1 \le k,m \le 4)$ непрерывные и равномерно по $t \in [0,\infty), x \in \mathbb{R}^3$ ограниченные функции.

2. СТАЦИОНАРНАЯ ПРАВАЯ ЧАСТЬ

Пусть $\overline{f}(x,t) \equiv \overline{f}(x)$ и выполняется

Условие 2. Функция $\overline{f}(x)$ имеет обобщенные (по С. Л. Соболеву) производные до четвертого порядка в $\mathbb{R}^3$ и существует интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\left| \left(1+\Delta_x^2\right) \overline{f}(x) \right| + \left(1+|x|\right) \left| \overline{f}(x) \right| + \right.$$

$$\left. + \left(x_1^2 + x_2^2\right) \left(|f_1(x)| + |f_2(x)| \right) \right) dx < \infty.$$

Справедлива

Теорема 2. Пусть $\overline{f}(x,t) \equiv \overline{f}(x)$ и выполнены условия 1 и 2. Обозначим через $\begin{bmatrix} \overline{V}^0(x) \\ p^0(x) \end{bmatrix}$ решение стационарной системы

$$-[\overline{V}^0, \overline{\omega}] - \nu\Delta\overline{V}^0 + \operatorname{grad} p^0 = \overline{f}(x); \operatorname{div}\overline{V}^0 = 0 \quad (2.1)$$

и через $\begin{bmatrix} \overline{V}^2 \\ p^2 \end{bmatrix}$ задачи (1.1)—(1.2) в случае $\overline{f}(x,t) \equiv \overline{f}(x)$. Тогда решение $\begin{bmatrix} \overline{V}^2 \\ p^2 \end{bmatrix}$ задачи (1.1)—(1.2) стабилизируется при $t \to \infty$ к решению системы (2.1) и справедливо представление

$$\begin{bmatrix} \overline{V}^2(x,t) \\ p^2(x,t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overline{V}^0(x) \\ p^0(x) \end{bmatrix} =$$

$$= (\nu t)^{-\frac{3}{4}} \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2\nu^2 a_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f}(y)dy + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \right\} + \int_{\mathbb{R}^3} F'(x-y,t)\,\overline{f}(y)dy + \qquad (2.2)$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^3} F''\left(x-y, t, \frac{\partial}{\partial y}\right) \overline{f}(y)dy \cdot e^{-\frac{t}{2\alpha^2\nu(1+\beta)}} + \begin{bmatrix} \overline{V}^1 \\ p^1 \end{bmatrix},$$

где элементы матрицы $F'(x,t) = \{f'_{k,m}(x,t)\}$, $1 \le k \le 4$, $1 \le m \le 3$ — непрерывные в $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ функции (x,t), причем

$$\left|f'_{k,m}(x,t)\right| \le C_{k,m} t^{-1}(1+|x|), 1 \le k \le 4; 1 \le m \le 3;$$
$$(m,k) \ne (3,1),(4,1),(4,2),(1,1),(2,2),(3,3);$$
$$\left|f'_{1,1}(x,t)\right| \le C_{1,1} t^{-1+\varepsilon}(1+|x|);$$
$$\left|f'_{2,2}(x,t)\right| \le C_{2,2} t^{-1+\varepsilon}(1+|x|);$$
$$\left|f'_{3,3}(x,t)\right| \le C_{3,3} t^{-1+\varepsilon}(1+|x|);$$
$$\left|f'_{4,m}(x,t)\right| \le C_{4,m} t^{-1+\varepsilon}(1+x_1^2+x_2^2), m = 1,2;$$

$\varepsilon > 0$ — произвольное число; элементы $f''_{m,j}$ матрицы F имеют вид $f''_{m,j}\left(x-y, t, \frac{\partial}{\partial y}\right) = f^0_{m,j}(x-y,t)(1-\Delta_y)^2, 1 \le m,j \le 4$; функции $f^0_{m,j}$ $(1 \le m \le 4; 1 \le j \le 3)$ равномерно по $t \in [0,\infty)$, $x \in \mathbb{R}^3$ ограничены, $a_1 = -\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)(4\sqrt{2})^{-1}\alpha^{\frac{3}{2}}\omega^{-\frac{1}{2}}$;

$$a_2(x_1,x_2) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)(4\sqrt{2})^{-1}\left[\int_{\mathbb{R}^3}(x_2-y_2)f_1(y) + \right.$$
$$\left. + (x_1-y_1)f_2(y)dy\right]\alpha^{\frac{3}{2}}\omega^{-\frac{1}{2}}.$$

Сравнивая представление (2.2) для $\begin{bmatrix} \overline{V}^2 \\ p^2 \end{bmatrix}$ и асимптотику (1.3) для $\begin{bmatrix} \overline{V}^1 \\ p^1 \end{bmatrix}$, замечаем, что при $\overline{f}(x,t) \equiv \overline{f}(x)$ главный член асимптотики для $p^2(x,t) - p^0(x)$ оказывается, вообще говоря, зависящим от x_1 и x_2.

После преобразования Фурье—Лапласа $L_{t\to\gamma}F_{x\to s}$ задача (1.1)—(1.2) (при $\overline{f}(x,t) \equiv \overline{f}(x)$) переходит в алгебраическую систему уравнений

$$A(s,\gamma)\begin{bmatrix} \tilde{\overline{V}}(s,y) \\ \tilde{p}(s,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma}\hat{\overline{f}}(s) + \hat{\overline{\overline{W}}}(s) \\ \hat{q}(s) \end{bmatrix}, \qquad (2.3)$$

где через $\tilde{\varphi}(s,\gamma)(\hat{\psi}(s))$ обозначаем преобразование Фурье—Лапласа (Фурье) функции $\psi(x,t)(\psi(x))$. Матрица $A(s,y)$ — образ дифференциальной оператор-матрицы системы (1.1) имеет вид

$$A(s,y) = \begin{bmatrix} \gamma+\nu|s|^2+\nu\beta s_1^2 & -\omega+\nu\beta s_1 s_2 & \nu\beta s_1 s_3 & is_1 \\ \omega+\nu\beta s_1 s_2 & \gamma+\nu|s|^2+\nu\beta s_2^2 & \nu\beta s_2 s_3 & is_2 \\ \nu\beta s_1 s_3 & \nu\beta s_2 s_3 & \gamma+\nu|s|^2+\nu\beta s_3^2 & is_3 \\ is_1 & is_2 & is_3 & \alpha^2\gamma \end{bmatrix}. \qquad (2.4)$$

Если обозначить $P(s,\gamma) = \det A(s,\gamma)$, то при $P(s,\gamma) \ne 0$ решение системы (2.3) представимо в виде

$$\begin{bmatrix} \tilde{\overline{V}}(s,\gamma) \\ \tilde{p}(s,\gamma) \end{bmatrix} = \frac{\check{A}(s,y)}{P(s,\gamma)}\begin{bmatrix} \hat{\overline{\overline{W}}}(s) \\ \hat{q}(s) \end{bmatrix}, \qquad (2.5)$$

где $\check{A}(s,\gamma)$ — матрица, ассоциированная с матрицей $A(s,\gamma)$. Введем обозначения

$$\tilde{W}'(s,\gamma) = \frac{\check{A}(s,\gamma)}{P(s,\gamma)}\begin{bmatrix} \hat{\overline{\overline{W}}}(s) \\ \hat{q}(s) \end{bmatrix};$$
$$\tilde{U}(s,\gamma) = \frac{\check{A}(s,\gamma)}{\gamma P(s,\gamma)}\begin{bmatrix} \hat{\overline{f}}(s) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

и заметим, что

$$\tilde{W}(x,t) = F^{-1}_{s\to t}\left[L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\frac{\check{A}(s,\gamma)}{P(s,\gamma)}\begin{bmatrix} \hat{\overline{\overline{W}}}(s) \\ \hat{q}(s) \end{bmatrix}\right]\right] \qquad (2.7)$$

есть решение задачи Коши (1.1)—(1.2) при $\overline{f}(x,t) \equiv 0$, асимптотика которого приведена в теореме 1. Таким образом, задача сводится к построению асимптотики при $t \to \infty$ функции

$$W'(x,t) = F^{-1}_{s\to x}\left[L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\frac{\check{A}(s,y)}{P(s,\gamma)\gamma}\right] * \begin{bmatrix} \overline{f}(x) \\ 0 \end{bmatrix}\right] \qquad (2.8)$$

(свертка по $x \in \mathbb{R}^3$ и преобразование $F^{-1}_{s\to x}L^{-1}_{\gamma\to t}$ записаны пока формально).

Обозначим $\gamma_j(s)$, $j = 1,2,3,4$ корни уравнения $P(s,\gamma) = 0$, где многочлен $P(s,\gamma) = \det A(s,\gamma)$ имеет вид

$$P(s,\gamma) = \alpha^2\gamma\left(\gamma+\nu|s|^2\right)^3 +$$
$$+|s|^2\left(1+\alpha^2\nu\beta\gamma\right)\left(\gamma+\nu|s|^2\right)^2 + \qquad (2.9)$$
$$+\alpha^2\omega^2\gamma\left(\gamma+\nu|s|^2\right) + \omega^2 + s_3^2\left(1+\alpha^2\nu\beta\gamma\right).$$

Как и в главе 1 работы [1], устанавливаем, что при $|s| \neq 0$: $\operatorname{Re}\gamma_j(s) < 0$, $j = 1,2,3,4$.

Поэтому функцию $U(x,t)$ (см.(2.8)) можно представить в виде $U(x,t) = W^1(x,t) + W^0(x)$, где

$$W'(x,t) = F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l(s)} \frac{e^{\gamma t}\check{A}(s,y)d\gamma}{P(s,\gamma)\gamma}\right] * \begin{bmatrix}\bar{f}(x)\\ 0\end{bmatrix};$$

$$W^0(x) = F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{\check{A}(s,0)}{P(s,0)}\right] * \begin{bmatrix}\bar{f}(x)\\ 0\end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

причем в качестве контура интегрирования $l(s)$ взята прямая $\operatorname{Re}\gamma = -\delta(s)$, где $\delta(s)$ удовлетворяет условиям: $\operatorname{Re}\gamma_j(s) < -\delta(s) < 0$, $j = 1,2,3,4$, (в (2.10) преобразование Фурье $F^{-1}_{s\to x}$ записано пока формально). Заметим также, что $W^0(x)$ — формальное решение уравнение (2.1).

Для упрощения записи (2.10) введем в рассмотрение матрицу $A'(s,\gamma)$, полученную из матрицы $\check{A}(s,\gamma)$ отбрасыванием четвертого столбца. Тогда $W'(x,t)$ можно записать в виде

$$W'(x,t) = K(x,t) * \bar{f}(x), \tag{2.11}$$

где

$$K(x,t) = F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l(s)} \frac{e^{\gamma t}A'(s,y)}{P(s,\gamma)\gamma}\right]d\gamma. \tag{2.12}$$

С помощью разложения единицы в $\mathbb{R}^3$ выражение, стоящее под знаком обратного преобразования Фурье в (2.12), можно представить в виде суммы трех слагаемых с носителями в областях: $|s| < \delta; \frac{1}{2}\delta < |s| < 2N; |s| > N$. Числа δ и N $(0 < \delta < N)$ будут выбраны ниже. Соответственно, $K(x,t))$ распадается на сумму

$$K(x,t) = P(x,t) + Q(x,t) + R(x,t). \tag{2.13}$$

Отметим, что операции свертки и обратного преобразования Фурье в (2.11)—(2.13) выписаны пока формально, так как не установлено их существование (хотя бы в смысле теории обобщенных функций), В приводимых ниже оценках содержится одновременно обоснование возможности их применения при всех $t > 0$.

Рассмотрим вначале матрицу-функцию $P(x,t)$. Можно показать, что существуют непересекающиеся замкнутые контуры $\Gamma_j(s), j = 1,2,3,4$, окружающие соответственно корни $\gamma_j(s)$ $(0 < |s| < \delta)$ и лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re}\gamma < 0$. Тогда с помощью леммы Жордана и теоремы о вычетах можно записать представление

$$P(x,t) = \sum_{j=1}^{4} P_j(x,t), \tag{2.14}$$

где

$$P_j(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\delta} \check{P}_j(x,\lambda,\theta,\varphi)e^{t\gamma_j(\lambda,\theta)}\lambda^2\sin\theta d\lambda d\theta d\varphi, \tag{2.15}$$

$$\check{P}_j(x,\lambda,\theta,\varphi) = \frac{A'(\lambda,\theta,\varphi,\gamma_j(\lambda,\theta))e^{i\rho(x,\theta,\varphi)\lambda}}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{y}(\gamma_j(\lambda,\theta) - \gamma_k(\lambda,\theta))\gamma_j(\lambda,\theta)}, \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered}\rho = \rho(x,\theta,\varphi) = \\ = x_1\sin\theta\cos\varphi + x_2\sin\theta\sin\varphi + x_3\cos\theta,\end{gathered} \tag{2.17}$$

$$\begin{gathered}\lambda = |s|; s_1 = \lambda_1\sin\theta\cos\varphi;\\ s_2 = \lambda\sin\theta\sin\varphi; s_3 = \lambda\cos\theta;\\ 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi.\end{gathered} \tag{2.18}$$

Здесь и в дальнейшем заменим «срезающую» функцию, стоящую под знаком $F^{-1}_{s\to x}$, на единицу, поскольку наличие этой функции не отражается на методе доказательства и окончательном результате, а лишь ускоряет запись соответствующих интегралов.

При $0 < \lambda < \delta$ два корня (обозначим их γ_1 и γ_2) уравнения $P(\lambda,\theta,\gamma) = 0$ асимптотически представляются в виде (см. [1])

$$\begin{gathered}\gamma_j = (-1)^{j+1} i\left(\omega + \frac{\sin^2\theta}{2\alpha^2\omega}\lambda^2\right) - \\ -\left(1 + \frac{\sin^2\theta}{2}\beta\right)\nu\lambda^2 + \lambda^4\psi_j(\lambda^2,\cos^2\theta),\end{gathered} \tag{2.19}$$

где $j = 1,2; \psi(q,p)$ — гладкие функции q и p при $0 \le q \le \delta^2$, $0 \le p \le 1$. Для других корней γ_3 и γ_4 уравнения $P(\lambda,\theta,\gamma) = 0$ при $0 < \lambda < \delta$ справедлива оценка (см. [1])

$$|\gamma_j(\lambda,\theta)| \le c\lambda,\ j = 3,4. \tag{2.20}$$

Из (2.16), (2.19), (2.20) немедленно получаем, что

$$|\check{P}_j(x,\lambda,\theta,\varphi)| \le c,\ j = 1,2 \tag{2.21}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^3; 0 \le \theta \le \pi; 0 \le \varphi \le 2\pi;$ $0 < \lambda < \delta$. Если учесть также, что из (2.19) вытекает неравенство $\operatorname{Re}\gamma_j(\lambda,\theta) \le -\frac{\nu}{2}\lambda^2$ при $j = 1,2$ и $0 < \lambda < \delta$, то в рассматриваемом случае легко установить оценку

$$|P_j(x,t)| \le ct^{-\frac{3}{2}},\ \ j = 1,2. \tag{2.22}$$

Для изучения интегралов $P_j(x,t), j=3,4$ запишем их в виде сумм $P_j = P_j^{(1)} + P_j^{(2)}$

$$P_j^{(k)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \int_{N_k} \int_0^{\delta} \check{P}_j(x,\lambda,\theta,\varphi) e^{t\gamma_j(\lambda,\theta)} \lambda^2 \sin\theta d\lambda d\theta d\varphi; \tag{2.23}$$

$$N_1 = \{\theta | \theta \in [0,\pi]; |\cos\theta| > \delta_1\};$$

$$N_2 = \{\theta | \theta \in [0,\pi]; |\cos\theta| < \delta_1\}.$$

Так как при $|\cos\theta| \geq \delta_1, |\lambda| < \delta$ для корней γ_3 и γ_4 уравнения $P(\lambda,\theta,\varphi) = 0$ справедливо представление (см. [1])

$$\gamma_j = (-1)^{j+1} \frac{i\cos\theta}{\alpha}\lambda - \frac{\nu}{2}\left(1+\beta\cos^2\theta\right)\lambda^2 + O\left(\lambda^3\right), \quad j=3,4, \tag{2.24}$$

то, используя явный вид матрицы A' и формулы (2.15), (2.16), оценку $\left|A'(\lambda,\theta,\varphi,\gamma_j)\right| \leq c\lambda$, $j=3,4$, верную при $|\cos\theta| > \delta_1$, можно записать неравенство

$$\left|\check{P}_j(x,\lambda,\theta,\varphi)\right| < c_j\lambda^{-1}, \; j=3,4 \tag{2.25}$$

с константой c_j, не зависящей от $x \in \mathbb{R}^3$ и λ,θ,φ, изменяющимися в рассматриваемых областях. Проводя при помощи (2.25) оценки по модулю в (2.15), получим

$$\left|P_j^{(1)}(x,t)\right| \leq ct^{-1}, \; j=3,4. \tag{2.26}$$

При выводе (2.26) учли, что при достаточно малом $\delta > 0$ и при $0 < \lambda \leq \delta$ из (2.24) вытекает оценка $\operatorname{Re}\gamma_j(\lambda,\theta) \leq -\frac{\nu}{4}\lambda^2$, $j=3,4$.

Перейдем к случаю $\cos\theta < \delta_1$. Проведя замену переменных по формулам $\lambda = \rho\sin\sigma$, $\cos\theta = \rho\cos\sigma$, $\sigma \in [0,\pi], 0 \leq \rho \leq \sqrt{\delta_1^2 + \delta^2} = \delta_2$, можно записать интегралы (2.23) $(k=2)$ в виде

$$P_j^{(2)}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\delta_2} \check{P}_j(x,\rho,\sigma,\varphi) e^{t\gamma_j(\rho,\sigma)} \rho^3 \sin\sigma d\rho d\sigma d\varphi, \tag{2.27}$$

где

$$\check{P}_j = (-1)^{j+1} \frac{A'(\rho,\sigma,\varphi,\gamma_j)\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\sin\sigma e^{i\chi\rho}}{\alpha^2\left(\gamma_j - \gamma_1^2\right)\left(\gamma_j-\gamma_2^2\right)\left(\gamma_3-\gamma_4\right)\gamma_j}, \quad j=3,4; \tag{2.28}$$

$$\begin{gathered} \chi = \tilde{\chi} + x_3\cos\sigma \cdot \sin\sigma \cdot \rho; \\ \tilde{\chi} = \sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\left(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi\right)\sin\sigma. \end{gathered} \tag{2.29}$$

Интеграл (2.27), в свою очередь, разобьем на сумму трех интегралов

$$P_j^{(2)} = E_j^0 + E_j^1 + E_j^2, \quad j=3,4, \tag{2.30}$$

где

$$E_j^{(k)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \int_{D_k} \int_0^{\delta_2} \check{P}_j e^{t\gamma_j} \rho\sin\sigma d\rho d\sigma d\varphi, \quad k=0,1,2; \tag{2.31}$$

$$D_0 = \left\{\sigma \left| \left|\frac{\pi}{2} - \sigma\right| < -\varepsilon_3 + \frac{\pi}{2}\right.\right\};$$

$$D_1 = \left\{\sigma \left| -\varepsilon_4 + \frac{\pi}{2} < \left|\frac{\pi}{2} - \sigma\right| < -\varepsilon_3 + \frac{\pi}{2}\right.\right\};$$

$$D_2 = \left\{\sigma \left| \frac{\pi}{2} - \varepsilon_4 < \left|\frac{\pi}{2} - \sigma\right| < \frac{\pi}{2}\right.\right\};$$

$$\varepsilon_3 = \arccos\delta_3; \;\; \varepsilon_4 = \arcsin\delta_4,$$

малые числа $\delta_3 > 0$ и $\delta_4 > 0$ будут выбраны ниже.

Рассмотрим вначале интеграл E_3^0. Для изучения этого интеграла потребуется лемма, которую приведем без доказательств.

Лемма 1. Интеграл

$$I = \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \rho^{k+2} y^l e^{tS(\rho,y)} (S(\rho,y))^{-1} dy d\rho, \tag{2.32}$$

где $l \geq 0, k-l > 2; a,b > 0;$ $S(\rho,y) = \rho^2(a\rho^2 + by^2 + O(\rho^4) + O(\rho^2 y^2) + O(y^4))$, имеет при $t \to \infty$ асимптотическое представление вида

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\psi)^{\frac{k-l}{2}}(\sin\psi)^l d\psi}{\left(a\cos^2\psi + b\sin^2\psi\right)^{1+\frac{k+l}{4}}} \times \Gamma\left(\frac{k+l}{4}\right) t^{-\frac{k+l}{4}} \left(1 + O\left(t^{-\frac{k-l+2}{4}}\right)\right). \tag{2.33}$$

Корни $\gamma_j(\lambda,\theta)$, $j=3,4$ уравнения $P(\lambda,\theta,\varphi) = 0$, обращающиеся в нуль при $\lambda = 0$, в случае $|\cos\theta| < \delta_1$ в системе координат ρ,σ представляются асимптотически следующим образом:

при $|\cos\sigma| < \delta_3$:

$$\gamma_3 = -\frac{\nu}{\alpha^2\omega^2}\rho^4 - \frac{1}{\alpha^2\nu}\rho^2\cos^2\sigma + O\left(\rho^6\right) + O\left(\rho^4\cos^2\sigma\right) + O\left(\rho^2\cos^4\sigma\right), \tag{2.34}$$

$$\gamma_4 = -\nu\rho^2 + \left(\nu + \frac{1}{\alpha^2\nu}\right)\rho^2\cos^2\sigma + O\left(\rho^4\right) + O\left(\rho^2\cos^4\sigma\right); \tag{2.35}$$

при $0 \le \sin\sigma \le \delta_4$:

$$\gamma_j = (-1)^{j+1}\rho^2\sin^2\sigma - \nu\rho^2\sin^2\sigma + O\left(\rho^2\sin^3\sigma\right),\quad j = 3,4; \qquad (2.36)$$

при $\frac{\pi}{2} - \varepsilon_4 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\delta_4 \ge \left|\frac{\pi}{2} - \sigma\right| \ge$

$\ge \frac{\pi}{2} - \arccos\delta_3 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_3$:

$$\gamma_j = (-1)^{j+1}\rho^2\sin^2\sigma\sqrt{\frac{4+\alpha^2\nu^2}{\alpha^2} - \sin^2\sigma\left(\frac{4}{\alpha^2} - 0(\rho^2)\right)} - \frac{\nu}{2}\rho^2\sin^2\sigma + O\left(\rho^4\right), j = 3,4. \qquad (2.37)$$

В последнем случае справедлива также оценка

$$\operatorname{Re}\gamma_j \le -\varepsilon\rho^2\sin^2\sigma,\quad j = 3,4. \qquad (2.38)$$

Представлениям (2.34) и (2.35) соответствуют в (2.31) интегралы E_j^0. В случае $j = 3$, пользуясь леммой 1, получаем при произвольном достаточно малом $\tau > 0$:

$$E_3^0 = \begin{bmatrix} -\alpha^{1,5}\omega^{-0,5} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha^{1,5}\omega^{-0,5} & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha^{-0,5}\omega^{-0,5}\nu^{-2} \\ (\alpha\omega)^{1,5}x_2 & (\alpha\omega)^{1,5}x_1 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2}}(\nu t)^{-\frac{3}{4}} + \left(1+|x|\right)O\left(t^{-1}\right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)O(t^{-1+\tau}) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}O\left(t^{-1+\tau}\right). \qquad (2.39)$$

Для оценки асимптотики интеграла E_4^0 отметим, что для элементов $b_{k,m}$ матрицы $A' = \left\{b_{k,m}\right\}_{1\le m\le 3}^{1\le k\le 4}$ справедлива оценка $\left|b_{k,m}\right| \le c\rho^2$. Кроме того, из (2.35) следует, что $\operatorname{Re}\gamma_4(\rho,\sigma) \le -\frac{\nu}{2}\rho^2, |\gamma_4| \ge \frac{\nu}{2}\rho^2$, если δ_2 и δ_3 выбраны достаточно малыми. Поэтому из (2.38), (2.31) вытекает оценка

$$\left|E_4^0\right| \le c\int_0^{\delta_3}\int_0^{\delta_2} \frac{e^{-t\frac{\nu}{2}\rho^2}\rho^2 d\rho dy}{\alpha^2\nu\omega\rho^2(1+O(y^2)+O(\rho^2))\frac{\nu}{4}\rho^2} = O(t^{-1}). \qquad (2.40)$$

Отметим, что применяемая при выводе (2.40) оценка $\left|(\gamma_4-\gamma_1)(\gamma_4-\gamma_2)(\gamma_4-\gamma_3)\right| \ge \frac{1}{2}\nu\omega^2\rho^2$ вытекает из (2.19), (2.34), (2.35).

Перейдем к изучению интегралов $E_j^2(x,t)$, $j = 3,4$, представленных в (2.31). Из (2.19), (2.36) следует, что $\alpha^2(\gamma_j-\gamma_1)(\gamma_j-\gamma_2)\times\times(\gamma_3-\gamma_4)\gamma_j = -2\rho^4\sin^2\sigma(\omega^2 + O(\sin\sigma))$. Кроме того, из (2.36) вытекает оценка $\operatorname{Re}\gamma_j \le \frac{\nu}{2}\rho^2\sin^2\sigma$, выполненная при $0 \le \sin\sigma \le \delta_4$ и достаточно малом δ_4. Матрица $A_j' = A'\left(\rho,\sigma,\varphi,\gamma_j(\rho,\sigma)\right)$ представима в виде

$$A_j' = 0\left(\rho^3\sin\sigma\right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O\left(\rho^2\sin\sigma\right) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_j'^{1} + A_1'^{2}, \qquad (2.41)$$

что позволяет разбить интеграл E_j^2 на сумму соответствующих слагаемых $E_{j,1}^2$ и $E_{j,2}^2$, причем справедливы оценки

$$\left|E_{j,1}^2\right| \le c\int^{\delta_2}\int^{\delta_4} e^{-\frac{\nu}{2}\rho^2y^2t}\rho^2 y dy d\rho = c\int_0^{\delta_2}\int_0^{\delta_4} e^{-\frac{\nu}{2}z^2t} z dz d\rho = O\left(t^{-1}\right), j = 3,4; \qquad (2.42)$$

$$\left|E_{j,2}^2\right| \le c\int_0^{\delta_2}\int_0^{\delta_4} e^{-\frac{\nu}{2}\rho^2y^2t}\rho^2 y dy d\rho = c\int_0^{\delta_2}\int_0^{\delta_4} e^{-\frac{\nu}{2}z^2t} z^{1-2\varepsilon}\rho^{2\varepsilon-1} dz d\rho = \qquad (2.43)$$
$$= O\left(t^{-1+\varepsilon}\right), \left(y = \sin\sigma, z = \rho y\right),$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Оценки $O(t^{-1}), O(t^{-1+\varepsilon})$ равномерны по $x \in \mathbb{R}^3$.

Из представления (2.37) вытекает существование постоянных $c_1 = c_1\left(\delta_3,\delta_4\right); c = c\left(\delta_3,\delta_4\right)$ таких, что интегралы E_1, выписанные в (2.31), оцениваются следующим образом:

$$\left|E_j'\ (x,t)\right| \le c\int_0^{\delta} e^{-\varepsilon\sin^2\sigma\rho^2 t}\rho d\rho = O\left(t^{-1}\right). \qquad (2.44)$$

Здесь мы учли неравенство (2.32) и явный вид матрицы A'.

Перейдем к рассмотрению $R(x,t)$:

$$R(x,t) = F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{l(s)}\frac{A'(s,\gamma)}{\gamma P(s,\gamma)}e^{\gamma t}d\gamma\psi(s)\right], \qquad (2.45)$$

где $\operatorname{supp}\psi(s)$ содержится в области $|s| > N$.

При $s \ge N$ справедливы следующие асимптотические разложения и оценки корней $\gamma_j(s), j = 1,2,3,4$ уравнения $P(s,\gamma) = 0$:

$$\gamma_1 = -\alpha^{-2}(1+\beta)^{-1}\nu^{-1} + O(\lambda^{-2});$$
$$\gamma_2 = -\nu(1+\beta)\lambda^2 + \alpha^{-2}(1+\beta)^{-1} + O(\lambda^{-2}); \quad (2.46)$$
$$\gamma_3 = -\nu\lambda^2 + O(1); \quad \gamma_4 = -\nu\lambda^2 + O(1);$$

$$\begin{gathered} |\gamma_3 - \gamma_4| = 2\omega\cos\theta + O(\lambda^{-2}) \\ \text{при } \cos\theta \neq 0; \\ |\gamma_3 - \gamma_4| = \omega^2\nu^{-1}\beta^{-1}\lambda^{-2} + O(\lambda^{-4}) \\ \text{при } \cos\theta = 0; \lambda = |s|. \end{gathered} \quad (2.47)$$

Нумерация корней в (2.46) необязательно совпадает с нумерацией корней при $0 < |s| \leq \delta$.

Представим $R(x,t)$ в виде суммы

$$R(x,t) = R''(x,t) + R_1'(x,t) + R_2'(x,t), \quad (2.48)$$

где

$$R_k' = F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k'}\frac{A'(s,\gamma)}{\gamma P(s,\gamma)}e^{\gamma t}d\gamma\psi(s)\right], \quad (2.49)$$
$$k = 1,2;$$

$$R'' = F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{A'(s,\gamma_1(s))e^{t\gamma_1(s)}\psi(s)}{\alpha^2(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)(\gamma_1-\gamma_4)\gamma_1}\right], \quad (2.50)$$

где Γ_k' — окружность фиксированного радиуса в комплексной γ-плоскости с центром в точке $\gamma = -\nu\lambda^2$ $(k=1)$ или в точке $\gamma = -\nu(1+\beta)\lambda^2$ $(k=2)$. Внутри Γ_1' лежат корни γ_3 и γ_4 уравнения $P(s,\gamma) = 0$ (см. (2.46)), а внутри Γ_2' — корень γ_2 $(|s| \geq N)$.

Выбрав N достаточно большим, легко получить оценки для элементов $r_{m,j,k}'$ $(1 \leq m \leq 4, 1 \leq j \leq 3, 1 \leq k \leq 2)$ матриц $R_k'(x,t)$. Действительно, учитывая (2.46), (2.47) и вид элементов матрицы A' в сферических координатах λ,θ,φ, получим оценку $\left|r_{m,j,k}'\right| \leq c\int_N^\infty \lambda^6 e^{-\frac{\nu}{2}\lambda^2 t}d\lambda$, где $c > 0$ не зависит от $x \in \mathbb{R}^3$. Следовательно, при $t \to \infty$ справедлива равномерная по $x \in \mathbb{R}^3$ оценка

$$r_{m,j,k}' = O(t^{-\infty}). \quad (2.51)$$

Свертка $R'' * \overline{f}$ в обычном смысле, вообще говоря, не существует. Поэтому, как и в работе [1], введем в рассмотрение новую матрицу $R''(x,t)$ с элементами

$$f_{m,j}''(x,t) =$$
$$= F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{b_{m,j}e^{\gamma_1 t}\psi(s)}{\alpha^2\gamma_1(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)(\gamma_1-\gamma_4)(1+s^2)^{k_m}}\right],$$

где $k_m = 1$ при $1 \leq m \leq 3, k_m = 2$ при $m = 4$ и $b_{m,j}$ — элементы матрицы A'. Если обозначить через $l_{m,j}''$ элементы матрицы R'', то справедливы равенства

$$\begin{aligned} &r_{m,j}''(x,t) * f_j(x) = \\ &= f_{m,j}(x,t) * (1-\Delta_x)^2 f_j(x) = \\ &= (1-\Delta_x)^2\left[f_{m,j}'' * f_j\right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

для $1 \leq j \leq 3, 1 \leq m \leq 4$. При этом предполагается, что свертки $f_{m,j}'' * f_j$ $(1 \leq j \leq 3, 1 \leq m \leq 4)$ существуют. Последнее легко установить, если заметить, что функция, стоящая под знаком $F_{s\to x}^{-1}$ в (2.52), абсолютно интегрируема в $\mathbb{R}^3$ и предположить, что $\overline{f}(x) \in L_1(\mathbb{R}^3)$. Одновременно будет установлено, что свертка $r_{m,j}'' * f_j$ существует (в обобщенном смысле), а при выполнении условия 2 справедлива оценка

$$\left|r_{m,j}''(x,t) * f_j(x)\right| \leq$$
$$\leq ce^{\frac{-t}{2\alpha^2\nu(1+\beta)}}\sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}\left|(1-\Delta_x)^2 f_j(x)\right|dx.$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2. Если $\overline{f}(x)$ удовлетворяет условию 2, то при $t > 0$ существует (в обобщенном смысле) свертка $R(x,t) * \overline{f}(x)$, представимая в виде

$$R(x,t) * \overline{f}(x) =$$
$$= e^{\frac{-t}{2\alpha^2\nu(1+\beta)}}\int_{\mathbb{R}^3}F''\left(x-y,t,\frac{\partial}{\partial t}\right)\overline{f}(y)dy + O(t^{-\infty}),$$

причем элементы $f_{m,j}''(x,t)$ матрицы F'' обладают свойствами, перечисленными в формулировке теоремы 2.

Нам остается исследовать матрицу-функцию $Q(x,t)$, входящую в (2.13). Справедлива

Лемма 3. Для функции $Q(x,t)$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^3$ выполняется оценка $|Q(x,t)| \leq ce^{-\varepsilon t}, t > 0$.

Доказательство леммы основывается на том факте, что при $|s| \geq \delta$ справедливо неравенство $\operatorname{Re}\gamma_j(s) < -\varepsilon_1(\delta)$, где $\gamma_j(s), j = 1,2,3,4$ - корни уравнения $P(s,\gamma) = 0$. Доказательство теоремы 2 вытекает из представлений и оценок (2.13)—(2.15), (2.22), (2.23), (2.26), (2.30), (2.39), (2.40), (2.42)—(2.44), (2.48), (2.51), а также лемм 2 и 3.

3. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ПРАВАЯ ЧАСТЬ

Пусть $\overline{f}(x,t) = f(x)e^{i\chi t}$ $(\chi \neq 0)$. Обозначим $W_\chi = \begin{bmatrix}\overline{V}^\chi(x,t) \\ p^\chi(x,t)\end{bmatrix}$ — решение системы уравнений

$$i\chi\overline{V}^{\chi}-\left[\overline{V}^{\chi},\omega\right]-\nu\Delta\overline{V}^{\chi}-\nu\beta\Delta div\overline{V}^{\chi}+$$
$$+\operatorname{grad}p^{\chi}=\overline{f}(x),\qquad(3.1)$$
$$\alpha^2 i\chi p^{\chi}+div\overline{V}^{\chi}=0,$$

через $\begin{pmatrix}\overline{V}^3(x,t)\\ p^3(x,t)\end{pmatrix}$ — решение задачи (1.1)—(1.2) в случае $\overline{f}(x,t)=e^{i\chi t}\overline{f}(x)$ при $\chi\neq\pm\omega$, а через $\begin{bmatrix}\overline{V}^4(x,t)\\ p^4(x,t)\end{bmatrix}$ — решение задачи (1.1)—(1.2) для $\chi=\pm\omega$.

Теорема 3. Пусть $\overline{f}(x,t)=f(x)e^{i\chi t}$ $(\chi\neq 0)$. Если выполнено условие (1) и условие
$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\left|\left(1-\Delta_x^2\right)\overline{f}(x)\right|+\left(1+|x|\right)\left|\overline{f}(x)\right|\right)dx<\infty,$$
то решение задачи (1.1)—(1.2) стабилизируется при $t\to\infty$ к вектор-функции $e^{i\chi t}\begin{bmatrix}\overline{V}^{\chi}(x,t)\\ p^{\chi}(x,t)\end{bmatrix}$, причем в случае $\chi\neq\pm\omega$ справедливо асимптотическое представление
$$\begin{bmatrix}\overline{V}^3(x,t)\\ p^3(x,t)\end{bmatrix}-e^{i\chi t}\begin{bmatrix}\overline{V}^{\chi}(x,t)\\ p^{\chi}(x,t)\end{bmatrix}=$$
$$=\left\{\frac{t^{--\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\left(\chi^2-\omega^2\right)}\{\omega[\cos\omega tH(A,B)+\right.$$
$$+\sin\omega tH(B,-A)]+i\chi[\cos\omega tH(B,-A)-\qquad(3.2)$$
$$\left.-\sin\omega tH(A,B)]\}+H_3\frac{i}{\chi}t^{-\frac{7}{4}}\right\}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^3}\overline{f}(y)dy+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^3}H'(x-y,t)\overline{f}(y)dy+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^3}H''\left(x-y,t,\frac{\partial}{\partial y}\right)+\begin{bmatrix}\overline{V}^1(x,t)\\ p^1(x,t)\end{bmatrix},$$
где
$$H(A,B)=\begin{bmatrix}B&A&0\\-A&B&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix};$$
$$H_3=-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\omega^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{3}{2}}}{16\sqrt{2}\nu^{3/4}}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix};\qquad(3.3)$$
числа A и B выписаны в (1.4), матрица $H''\left(x,t,\frac{\partial}{\partial y}\right)$ аналогична матрице $F''\left(x,t,\frac{\partial}{\partial y}\right)$ в теореме 2; элементы матрицы $H'(x,t)=\left\{h'_{k,m}(x,t)\right\}\begin{matrix}1\le k\le 4\\ 1\le m\le 3\end{matrix}$ — непрерывные в $\mathbb{R}^3\times[0,\infty)$ функции (x,t), причем
$$\lim_{t\to\infty}\frac{h'_{k,m}(x,t)}{1+x}t^{\frac{3}{2}}=0;\ 1\le k,\ m\le 2;$$
$$\lim\frac{h'_{3,3}(x,t)}{1+x}t^{\frac{7}{4}}=0;$$
$$\left|h'_{k,m}(x,t)\right|\le c_{k,m}t^{-\frac{7}{4}}\left(1+|x|\right),$$
$$(k,m)=(4,1),(4,2);$$
$$\left|h'_{k,m}(x,t)\right|\le c_{k,m}t^{-2}\left(1+|x|\right),$$
$$(k,m)=(1,3),(2,3),(4,3),(3,1),(3,2);$$
асимптотика вектор-функции $\begin{bmatrix}\overline{V}^1\\ p^1\end{bmatrix}$ выписана в теореме 1.

В случае $\chi=\omega(-1)^{l+1},l=1,2$ асимптотическое представление при $t\to\infty$ для $\begin{bmatrix}\overline{V}^4(x,t)\\ p^4(x,t)\end{bmatrix}$ имеет вид
$$\begin{bmatrix}\overline{V}^4(x,t)\\ p^4(x,t)\end{bmatrix}-e^{i\chi t}\begin{bmatrix}\overline{V}^{\chi}(x,t)\\ p^{\chi}(x,t)\end{bmatrix}=\exp(i\omega t(-1)^{l+1})\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\pi}\frac{\left(\alpha(\theta)+(-1)^{l+1}ib(\theta)\right)}{\nu+\frac{\sin^2\theta}{2}\left(\nu\beta+(-1)^{l+1}\frac{i}{2\alpha^2\omega}\right)}\begin{bmatrix}1&(-1)^l i&0\\(-1)^l i&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\times$$
$$\times\sin\theta d\theta+H_3\frac{i}{\chi}t^{-\frac{7}{4}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\overline{f}(y)dy+\int\limits_{\mathbb{R}^3}H''(x,-y,t)\overline{f}(y)dy+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^3}H''\left(x,-y,t,\frac{\partial}{\partial y}\right)\overline{f}(y)dy++\begin{bmatrix}\overline{V}^1(x,t)\\ p^1(x,t)\end{bmatrix},$$
где функции $\alpha(\theta)$ и $b(\theta)$ определены в (1.5), матрица H_3 выписана в (3.3), элементы матрицы $H'''(x,t)=\left\{h'''_{k,m}(x,t)\right\}$, $1\le k\le 4,1\le m\le 3$ - непрерывные в $\mathbb{R}^3\times[0,\infty)$ функции (x,t), причем
$$\lim_{t\to\infty}\frac{h'''_{k,m}(x,t)}{1+x}t^{\frac{1}{2}}=0;1\le k,m\le 2;$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{h'''_{3,3}(x,t)}{1+x}t^{\frac{7}{4}}=0;$$
$$\left|h'''_{k,3}(x,t)\right|\le c_{k,3}\left(1+|x|\right)t^{-1},k=1,2;$$

$$\left|h'''_{3,m}\left(x,t\right)\right| \le c_{3,m}\left(1+|x|\right)t^{-2}, m=1,2,3;$$

$$\left|h'''_{4,m}\left(x,t\right)\right| \le c_{4,m}\left(1+|x|\right)t^{-\frac{3}{2}}, m=1,2,3,$$

асимптотика вектор-функции $\begin{bmatrix}\overline{V}^1(x,t)\\ p^1(x,t)\end{bmatrix}$ представлена в (1.3).

После преобразования Фурье—Лапласа задача (1.1)—(1.2) с $\overline{f}(x,t)=e^{i\chi t}\overline{f}(x)$ сводится к алгебраической системе уравнений, после обращения которой находим

$$\begin{bmatrix}\tilde{\overline{V}}(s,\gamma)\\ \tilde{p}(s,\gamma)\end{bmatrix} = \frac{A'(s,\gamma)}{P(s,\gamma)(\gamma-i\chi)}\hat{\overline{f}} + \widetilde{W'}(s,\gamma) \equiv \tag{3.4}$$

$$\equiv \widetilde{U}_\chi(s,\gamma)+\widetilde{W'}(s,\gamma).$$

Применив к функции $\widetilde{U}_\chi(s,\gamma)$ обратное преобразование Фурье—Лапласа, получим

$$U_\chi = K_\chi * \overline{f}(x) + e^{i\chi t}W_\chi(x); \tag{3.5}$$

$$K_\chi(x,t) = F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{1}{2\pi i}\int e^{\gamma t}\frac{A'(s,\gamma)\,d\gamma}{P(s,\gamma)(\gamma-i\chi)}\right]. \tag{3.6}$$

С помощью разложения единицы в $\mathbb{R}^3$ представим $K_\chi(x,t)$ в виде (2.13), где интегралы $Q(x,t)$ и $R(x,t)$ могут быть оценены аналогично соответствующим интегралам п.2. Для того чтобы построить асимптотическое представление при $t\to\infty$ для матрицы функции $P(x,t)$, запишем ее представление в виде (2.14) и (2.15), где величины (2.16) следует заменить на

$$\check{P}_j(x,t) = \frac{A'\left(\lambda,\theta,\varphi,\gamma_j(\lambda,\theta)\right)e^{i\rho(x,\theta,\varphi)\lambda}}{\prod\limits_{k=1,k\ne j}^{4}\gamma_j(\lambda,\theta)-\gamma_k(\lambda,\theta)(\gamma_j(\lambda,\theta)-i\chi)}. \tag{3.7}$$

Справедлива следующая

Лемма 4. Пусть функция $f(x,p,\theta)$ непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Re}x\ge 0$ и аналитична при $0<\operatorname{Re}x\le\delta$ для всех $p\in\mathbb{R}^3$ и $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$, пусть также при всех $p\in\mathbb{R}^3$ и $x:\ \operatorname{Re}x\ge 0$ функция $f(x,p,\theta)$ непрерывна по $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$. Кроме того, предположим, что при $0<\operatorname{Re}x<\delta$ и $p\in\mathbb{R}^3$ равномерно по параметру $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$ выполнены оценки $f(x,p,\theta)\le c$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,p,\theta)\le$ $\le c(1+p)$ с постоянной c, не зависящей от x и p. Пусть $S_\pm(x,\theta)=\pm(\omega+q^2(\theta)x^2)i - -p(\theta)x^2$, где ω — вещественное число, а $q(\theta)$ и $p(\theta)$ непрерывно зависят от $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$, причем $q^2(\theta)\ge 0$, $p(\theta)>0$ при $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$, число $l\ge 0$, функция $\mu(x,\theta)$ принадлежит $c(0,\delta)\times C([\theta_0,\theta_1])$ и $|\mu(x,\theta)|\le\dfrac{1}{2}\delta$ для $x\in[0,\delta],\theta\in[\theta_0,\theta_1]$ функции $a(\theta)$ и $b(\theta)$ определены формулами (1.5).

Тогда интеграл

$$I_\pm(t,p,\theta) = \int_0^\delta f(x,p,\theta)\,x^l e^{t\left(S_\pm(x,\theta)+x^3\mu(x,\theta)\right)}dx \tag{3.8}$$

имеет при $t\to\infty$ равномерную при $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$ и $p\in\mathbb{R}^3$ асимптотику

$$I_\pm(t,p,\theta) =$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)(a\pm ib)^l\left(f(0,p,\theta)+O(1)(1+p)\right)e^{\pm i\omega t}t^{-\frac{t+1}{2}}.$$

Доказательство совпадает с доказательством аналогичной леммы главы 1 работы [1].

Пользуясь асимптотическими представлениями (2.19), оценками (2.20) и явным видом матрицы $A'\left(\lambda,\theta,\varphi,\gamma_j(\lambda,\theta)\right), j=1,2$, находим представление

$$\check{P}_j(x,\lambda,\theta,\varphi) =$$

$$= -\frac{i}{2}\frac{P_2^0}{(-1)^{j+1}\omega-\chi}+\lambda\check{P}'_j(x,\lambda,\theta,\varphi), \tag{3.9}$$

$$j=1,2,$$

где

$$P_1^0 = \overline{P}_2^0 = \begin{bmatrix}1 & -i & 0\\ i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \chi\ne\pm\omega. \tag{3.10}$$

Пусть функции $a(\theta)$ и $b(\theta)$, ($p(\theta)$ и $q(\theta)$) определяются формулами (1.5). Тогда из леммы 2 и представлений (2.19), (3.9), (3.10) устанавливаем, что

$$\check{P}_j(x,t) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)(2\pi t)^{-\frac{3}{2}}}{2i\left((-1)^{j+1}\omega-x\right)}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(a(\theta)+(-1)^{j+1}ib(\theta))^3\times$$

$$\times P_j^0(1+O(1))(1+x)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$$j=1,2.$$

Отсюда находим

$$P_1(x,t)+P_2(x,t) = \frac{t^{-\frac{3}{2}}\Gamma(1,5)}{\left(\chi^2-\omega^2\right)\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\left\{\omega\left[\cos\omega t H(A,B)+\sin\omega t H(B,-A)\right]+\right.$$
$$\left.+i\chi\left[\cos\omega t H(-B,A)-\sin\omega t H(A,B)\right]\right\}\times$$
$$\times\left(1+O(1)(1+|x|)\right),$$

где $H(A,B)$ — матрица, определенная в (3.3).

В резонансном случае $\chi=(-1)^{l+1}\omega$, $l=1,2$, аналогичные выкладки приводят к следующему результату:

$$P_1^B(x,t)+P_2^B(x,t)=\frac{e^{i\omega(-1)^{l+1}}t^{-\frac{1}{2}}\Gamma(0,5)}{2\sqrt{2\pi}}\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}\frac{\left(a(\theta)+(-1)^{l+1}ib(\theta)\right)}{-\nu-0,5\sin^2\theta\left(\nu\beta-(-1)^{l+1}i\alpha^{-2}\omega^{-1}\right)}\times \quad (3.12)$$
$$\times P_j^{0,B}\sin\theta d\theta\times\left(1+O(1)(1+|x|)\right),$$

где $P_j^B\left(P_j^{0,B}\right), j=1,2$ — матрицы 2×3, составленные из первых двух строк матриц $P_j\left(P_j^0\right)$.

Третья строка $P_j^{(3)}, j=1,2$ матрицы P_j оценивается следующим образом:

$$\left|P_j^{(3)}(x,t)\right|\le c\left(1+|x|\right)t^{-2}, \quad (3.13)$$

а четвертая $P_j^{(4)}$ —

$$\left|P_j^{(4)}(x,t)\right|\le c\left(1+|x|\right)t^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.14)$$

Перейдем к изучению интегралов $P_j(x,t), j=3,4$. Как в резонансном, так и нерезонансном случаях $(\chi\ne 0)$, воспользовавшись представлениями (2.19), (2.24), получаем

$$P_3(x,t)+P_4(x,t)=$$
$$=\frac{i}{2}\begin{bmatrix} O\left(t^{-1,75}\right) & O\left(t^{-2}\right) & 0\\ O\left(t^{-2}\right) & O\left(t^{-1,75}\right) & 0\\ 0 & 0 & q(t)\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+ \quad (3.15)$$
$$+\left(1+|x|\right)\begin{bmatrix} O\left(t^{-1,75}\right) & O\left(t^{-2}\right) & O\left(t^{-2}\right)\\ O\left(t^{-2}\right) & O\left(t^{-1,75}\right) & O\left(t^{-2}\right)\\ O\left(t^{-2}\right) & O\left(t^{-2}\right) & O\left(t^{-2+\varepsilon}\right)\\ O\left(t^{-1,75}\right) & O\left(t^{-1,75}\right) & O\left(t^{-2}\right)\end{bmatrix}.$$

Заметим, что оценки $O(\cdot)$ в (3.15) равномерны по $x\in\mathbb{R}^3, \varepsilon>0$ — произвольное число, $q(t)=-\frac{\Gamma(0,25)\Gamma(0,5)}{8\sqrt{2\pi}}\omega^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{3}{2}}\nu^{-\frac{3}{4}}(1+0(1)(1+|x|))t^{-\frac{7}{4}}$.

4. О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Здесь изучается вопрос о единственности решения системы (3.1) как в случае $\chi\ne 0$ $(\chi\ne\pm\omega)$, так и в случае $\chi=0$. В последнем случае система (3.1) переходит в систему (2.1).

Замечание 1. При выполнении условия 2 (случай $\chi=0$) обобщенное решение системы (2.1)

$$V^0(x)=\begin{Bmatrix}\overline{V}^0(x)\\ p^0(x)\end{Bmatrix}=F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{A'(s,0)}{P(s,0)}\hat{\overline{f}}(s)\right], \quad (4.1)$$

как легко следует из результатов пункта 2, является, как преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции (лемма Римана—Лебега) непрерывной, убывающей при $|x|\to\infty$ функцией.

Аналогично, при выполнении условий теоремы 3 (случай $\chi\ne 0$) обобщенное решение

$$V^\chi(x)=\begin{Bmatrix}\overline{V}^\chi(x)\\ p^\chi(x)\end{Bmatrix}=F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{A'(s,i\chi)}{P(s,i\chi)}\overline{f}(s)\right] \quad (4.2)$$

системы (3.1) является непрерывной, убывающей при $|x|\to\infty$ функцией.

Для выделения класса единственности решений систем (3.1) и (3.2) сформулируем в виде следующей леммы результат, доказанный в [1].

Лемма 5. Для любого $\delta>0$ найдется $\varepsilon=\varepsilon(\delta)>0$ такое, что при всех $|s|\ge\delta$ для любого корня $\gamma=\gamma(s)$ многочлена (2.9) справедливо неравенство $\operatorname{Re}\gamma(\lambda,\theta)\le-\varepsilon$.

Теорема 4. Решение системы уравнений (3.1) (при $\chi\ne 0$) или системы (2.1) (при $\chi=0$) единственно в классе функций $V(x)\in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3)$, которые

1) В случае $\chi\ne 0,\chi\ne\pm\omega$: ограничены при $|x|\to\infty$.

2) В случае $\chi=0$ или $\chi=\pm\omega$: удовлетворяют условию $|V(x)|\to 0$ при $|x|\to\infty$.

Доказательство. Каждая компонента $V_j(x), j=1,2,3,4$ решения однородной системы (3.1) при $\chi\ne 0$ (которая переходит в систему (2.1) при $\chi=0$) является обобщенным решением в пространстве $S'(\mathbb{R}^3)$ уравнения

$$P(-iD_x,i\chi)V_j(x)=0, j=1,2,3,4, \quad (4.3)$$

где многочлен $P(s,\gamma)$ определен в (2.9). После применения преобразования Фурье $F_{x\to s}$ уравнение (4.14) запишется в виде

$$P(s,i\chi)F_{x\to s}[V_j](s)=0, j=1,2,3,4. \quad (4.4)$$

Поскольку $\mathrm{Re}(i\chi) = 0$, то из леммы 2.1 и уравнения (4.4) следует, что носитель функции $F_{x\to s}[V_j](s)$ сосредоточен в точке $s = 0$. Поэтому (см. [3]) существует такое $p = 0$, что

$$V_j(x) = \sum_{|k|=0}^{p} c_k x^k. \qquad (4.5)$$

Если же $\left|V_j(x)\right|$ ограничены при $|x| \to \infty$, то из (4.5) вытекает, что $c_k = 0$ для $|k| = 1, 2, \dots, p$. Нетрудно видеть, что c_0 не может быть решением уравнения $P(-iD_x, i\chi)c_0 = 0$, если $a^2\chi^4 - \alpha^2\omega^2\chi^2 \neq 0$ (т.е. для $\chi \neq \pm\omega, \chi \neq 0$). Поэтому при $\chi \neq \pm\omega, \chi \neq 0$ из (4.5) вытекает, что $V_j(x), j = 1, 2, 3, 4$. Если же $\chi = 0$ или $\chi = \pm\omega$, то из условия $\left|V_j(x)\right| \to 0$ при $|x| \to \infty$, и из (4.5) аналогично выводим, что $V_j(x) = 0, j = 1, 2, 3, 4$.

Замечание 2. Из теоремы 4 и замечания 1 следует, что решения (4.1) и (4.2) принадлежат выделенным классам единственности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушко А.В.* Асимптотические методы в задачах гидродинамики/А. В. Глушко. — Воронеж: ВГУ, 2003. — 300 с.

2. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М.: Наука, 1970. — 288 с.

3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики/В. С. Владимиров — М.: Наука, 1976. — 527 с.