УДК 517.9;514.8

ОБ ОДНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА ЛОРЕНЦЕВОМ МНОГООБРАЗИИ, СВЯЗАННОЙ С СИСТЕМАМИ ОТСЧЕТА ПО А. ПОЛТОРАКУ*

Ю. Е. Гликлих, П. С. Зыков

Воронежский государственный университет
Курский государственный университет

В концепции, предложенной А. Полтораком, система отсчета в общей теории относительности представляет собой некоторое многообразие, снабженное связностью. Рассматривается вопрос о возможности соединить времениподобной геодезической два события в пространстве-времени при условии, что они соединены геодезической связности системы отсчета с времениподобным начальным касательным вектором. Этот вопрос интерпретируется следующим образом: принадлежит ли одно событие собственному будущему другого в пространстве-времени, если это выполняется в системе отсчета? Для систем отсчета двух типов найдены геометрические условия, при которых указанная геодезическая существует.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть M — лоренцево многообразие размерности 4 (пространство-время общей теории относительности, см. основные понятия ОТО в [4, 8]). Для определенности везде в статье мы используем лоренцеву метрику с сигнатурой $(-,+,+,+)$.

В [5, 6] А. Полтораком была выдвинута концепция, в которой система отсчета определяется как некоторое гладкое многообразие с заданной на нем связностью. В простейших случаях — это пространство Минковского с плоской связностью, однако в более сложных случаях возможны другие многообразия и связности.

Гравитационное поле в системе отсчета описывается $(1,2)$-тензором G, который на любых двух векторных полях X и Y принимает значение $G(X,Y)=\nabla_X Y-\bar{\nabla}_X Y$, где $\bar{\nabla}$ — ковариантная производная связности Леви—Чивита лоренцевой метрики, ∇ — ковариантная производная связности системы отсчета. Обозначим через $\frac{D}{d\tau}$ ковариантную производную связности системы отсчета вдоль мировой линии по параметру τ. Тогда геодезическая $m(\tau)$ связности Леви—Чивита на M (мировая линия в отсутствие других сил, кроме гравитации) описывается в системе отсчета уравнением

$$\frac{D}{d\tau}m'(\tau)=G_{m(\tau)}(m'(\tau),m'(\tau)). \qquad (1)$$

Отметим, что правая часть (1) квадратична по скоростям $m'(\tau)$.

Более подробно с самой концепцией и возникающей в ее рамках физической интерпретацией ковариантной производной связности системы отсчета, тензора G и других объектов можно ознакомиться в [5, 6], с дальнейшим развитием этой идеи — в [7].

Мы предлагаем вариант концепции, в котором в качестве многообразия выбрано касательное пространство T_mM в событии $m\in M$ с фиксированным в нем ортонормированным базисом (времениподбный вектор базиса — это 4-скорость наблюдателя). Мы считаем, что такая система отсчета применима в окрестности $\mathcal{O}$ нуля в T_mM, которая посредством экспоненциального отображения связности Леви—Чивита лоренцевой метрики отождествляется с окрестностью $\mathcal{U}$ данного события m в M (нормальная карта).

Используются два варианта выбора связности в системе отсчета. В первом варианте в T_mM (т.е. на $\mathcal{O}$) используется плоская связность пространства Минковского (основной случай, рассмотренный А. Полтораком), во втором — риманова связность некоторой (положительно определенной) римановой метрики на T_mM. Использование последней связности мотивируется естественным обобщением идеи, приводящей к евклидовым моделям в квантовой теории поля. Подчеркнем, что в качестве римановой связности можно использовать, как связность Леви—Чивита указанной метрики, так и согласованную с метрикой связность с ненулевым кручением,

* Исследование частично поддержано грантами РФФИ 03-01-00112 и 04-01-00081

что, в принципе, позволяет включить в рассмотрение электромагнитные взаимодействия.

Для указанных двух связностей исследуется следующий вопрос: возможно ли соединить два события m_0 и m_1 в M времениподобной геодезической при условии, что эти события соединимы в системе отсчета геодезической соответствующей связности, у которой начальный вектор времениподобен, т.е. лежит внутри светового конуса пространства $T_{m_0}M$? Этот вопрос может быть интерпретирован следующим образом: принадлежит ли событие m_1 собственному будущему события m_0 в M , если это выполняется в системе отсчета? Найдены геометрические условия, при выполнении которых ответ на поставленный вопрос положителен.

В дальнейших конструкциях всей этой статьи будет использоваться следующее техническое утверждение.

Лемма 1.1. *Зададим произвольные положительные числа ε , T , C . Пусть число b таково, что $0 < b < \dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon + C)^2}$. Тогда существует достаточно малое положительное число φ такое, что выполняется неравенство:*

$$b((\varepsilon T^{-1} - \varphi) + CT^{-1})^2 < \varepsilon T^{-2} - \varphi T^{-1}.$$

Доказательство. При b, удовлетворяющем условию леммы, будет верно неравенство $b(\varepsilon T^{-1} + CT^{-1})^2 < \varepsilon T^{-2}$. Из соображений непрерывности очевидно, что существует достаточно малое число $\varphi > 0$ такое, что $(\varepsilon T^{-1} - \varphi) > 0$ и выполняется $b((\varepsilon T^{-1} - \varphi) + CT^{-1})^2 < < \varepsilon T^{-2} - \varphi T^{-1}$. □

2. СЛУЧАЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА С ПЛОСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

В этом параграфе мы исследуем систему отсчета в событии $m \in M$, в которой многообразие — касательное пространство T_mM с выделенным ортонормированным репером, а в качестве связности выбрана плоская связность пространства Минковского.

В этом случае удобно рассматривать $\mathcal{O}$ как область в линейном пространстве, на которой задана лоренцева метрика (перенесенная с M) и задан тензор G , описанный во введении. Удобно также использовать систему обозначений, принятую при исследовании задач в линейных пространствах. Тогда, в частности, для $\bar{m} \in \mathcal{O}$ касательное пространство $T_{\bar{m}}M$ может быть посредством сдвига отождествлено с T_mM. При этом в заданный в каждом $T_{\bar{m}}M$ световой конус, порожденный лоренцевым метрическим тензором в данной точке, удобно считать приложенным в нуле пространства T_mM .

Геодезические в T_mM относительно плоской связности пространства Минковского являются прямыми линиями. Поэтому в данной системе отсчета изучаемый вопрос приобретает следующую форму: соединимы ли события m_0 и m_1 на M времениподобной геодезической, если они соединимы прямой $a(\tau)$: $a(0) = m_0$, $a(T) = m_1$ в $\mathcal{O}$, которая лежит внутри светового конуса пространства $T_{m_0}M$? Здесь τ — некоторый параметр, в качестве которого может выступать, например, собственное время на M или натуральный параметр в системе отсчета. Отметим, что в данном случае принадлежность прямой $a(\tau)$ световому конусу в $T_{m_0}M$ эквивалентна тому факту, что вектор производной $a'(0) = \dfrac{d}{d\tau} a(\tau)_{|\tau=0}$ лежит внутри этого же светового конуса, как требуется в задаче.

Поскольку ковариантная производная плоской связности в данном случае совпадает с обычной производной, уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d}{d\tau} m'(\tau) = G_m(m', m'), \qquad (2)$$

где $G_m(\cdot,\cdot)$ — введенный выше тензор, описывающий в данной системе отсчета гравитационное поле, и основная задача сводится к двухточечной краевой задаче в системе отсчета для (2). Так как правая часть (2) имеет квадратичный рост по скоростям, для некоторых пар точек двухточечная краевая задача может не иметь решений.

Напомним, что на касательном пространстве T_mM к лоренцеву многообразию M имеется естественная структура пространства Минковского, в котором скалярное произведение задано метрическим тензором на M в событии m . Введем в системе отсчета евклидово скалярное произведение, обратив в формуле скалярного произведения пространства Минковского знак отрицательного квадрата времениподобного вектора выделенного базиса в системе отсчета. Ниже в этом параграфе все нормы и расстояния определяются относительной этого евклидова скалярного произведения.

С помощью линейной замены времени зададим на $a(\cdot)$ параметр s таким образом, что для полученной прямой $\tilde{a}(s)$ выполняется $\tilde{a}(0) = m_0$

и $\tilde{a}(1) = m_1$. Рассмотрим банахово пространство $C^0([0,1],T_mM)$ непрерывных кривых в T_mM с равномерной нормой.

Лемма 2.1. *Существует достаточно малое число* $\varepsilon > 0$, *такое, что для любой кривой* $\tilde{v}(s)$ *из шара* $U_\varepsilon \subset C^0([0,1],T_mM)$ *радиуса* ε *с центром в нуле существует вектор* $\tilde{C}_{\tilde{v}} \in T_mM$ *из ограниченной окрестности вектора* $\tilde{a}'(0) = \frac{d}{ds}\tilde{a}(s)_{|s=0}$, *такой что вектор* $\tilde{C}_{\tilde{v}}$ *лежит внутри светового конуса пространства* $T_{m_0}M$, *а кривая* $m_0 + \int_0^s (\tilde{v}(t) + \tilde{C}_{\tilde{v}})dt$ *при* $s = 1$ *попадает в точку* m_1. *При этом вектор* $\tilde{C}_{\tilde{v}}$ *непрерывно зависит от* $\tilde{v}(\cdot)$ *и* $\|\tilde{C}_{\tilde{v}}\| < C$ *для любой кривой* $\tilde{v} \in U_\varepsilon$ *при некотором* $C > 0$.

Лемма 2.1 доказывается непосредственными выкладками из которых сразу следует существование $C_{\tilde{v}}$ такого, что $m_0 + \int_0^1 (\tilde{v}(t) + \tilde{C}_{\tilde{v}})dt = m_1$, а также непрерывная зависимость $C_{\tilde{v}}$ от $\tilde{v}$. Далее, по соображениям непрерывности из того, что вектор $\tilde{a}'(0)$ лежит внутри светового конуса пространства $T_{m_0}M$, следует, что при достаточно малом по норме возмущении $\tilde{v}(\cdot)$ вектор $\tilde{C}_{\tilde{v}}$ также лежит внутри того же светового конуса. В качестве C выберем число, ограничивающее сверху нормы векторов $\tilde{C}_{\tilde{v}}$ из указанной ограниченной окрестности вектора $\frac{d}{ds}\tilde{a}(s)_{|s=0}$.

Отметим, что число C оценивает евклидово расстояние между m_0 и m_1.

Вернемся к параметризации прямой $a(\cdot)$ параметром τ. Рассмотрим банахово пространство $C^0([0,T],T_mM)$ непрерывных кривых в T_mM с равномерной нормой.

Лемма 2.2. *Пусть число* $k > 0$ *таково, что* $T^{-1}\varepsilon > k$, *где* ε *из леммы 2.1. Тогда для любой кривой* $v(t)$ *из шара* $U_k \subset C^0([0,T],T_mM)$ *радиуса* k *с центром в нуле существует вектор* $C_v \in T_mM$ *из ограниченной окрестности вектора* $a'(0) = \frac{d}{d\tau}a(\tau)_{|\tau=0}$, *такой что вектор* C_v *лежит внутри светового конуса пространства* $T_{m_0}M$, *а кривая* $m_0 + \int_0^\tau (v(t) + C_v)dt$ *при* $\tau = T$ *попадает в точку* m_1. *При этом вектор* C_v *непрерывно зависит от* $v(\cdot)$.

Доказательство. Заменив на $a(\tau)$ время, построим прямую $\tilde{a}(s) = a(Ts)$, которая обладает свойством $\tilde{a}(0) = m_0$ и $\tilde{a}(1) = m_1$, как в лемме 2.1. Для любой кривой $v(\cdot) \in U_k \subset C^0([0,T],T_mM)$ построим кривую $\tilde{v}(s) = Tv(Ts)$, которая лежит в $U_\varepsilon \subset C^0([0,1],T_mM)$, т.е. для нее выполняется лемма 2.1, в частности, для нее существует вектор $\tilde{C}_{\tilde{v}}$ с $\|\tilde{C}_{\tilde{v}}\| < C$ из леммы 2.1. С помощью непосредственных выкладок легко показать, что $m_0 + \int_0^1 (\tilde{v}(s) + \tilde{C}_{\tilde{v}})ds = m_0 \int_0^T (v(t) + C_v)dt = m_1$, где $C_v = T^{-1}\tilde{C}_{\tilde{v}}$. □

Отметим, что по построению $\|C_v\| < T^{-1}C$ для $v \in U_k$.

Для введенного выше тензора G определим $\|G_m\|$ стандартной формулой $\|G_m\| = \sup_{X \in T_mM, \|X\| \le 1} \|G_m(X,X)\|$. Непосредственно из этого определения следует, что для любого $X \in T_mM$ выполняется оценка

$$\|G_m(X,X)\| \le \|G_m\| \|X\|^2. \tag{3}$$

Теорема 2.3. *Пусть* m_0 *и* m_1 *соединены в* $\mathcal{O}$ *прямой* $a(\tau)$ *такой, что* $a(0) = m_0$, $a(T) = m_1$, *которая лежит внутри светового конуса пространства* $T_{m_0}M$. *Пусть* m_0 *и* m_1 *лежат в шаре* $V \subset T_mM$ *таком, что для любого* $\hat{m} \in V$ *выполняется неравенство* $\|G_{\hat{m}}\| < \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + C)^2}$, *где* ε *и* C *введены в лемме 2.1. Тогда на* M *существует времениподобная геодезическая* $m_0(\tau)$ *связности Леви—Чивита лоренцевой метрики такая, что* $m_0(0) = m_0$ *и* $m_0(T) = m_1$.

Доказательство. Рассмотрим шар $U_K \subset C^0([0,T],T_mM)$ радиуса $K = T^{-1}\varepsilon - \varphi$ с центром в нуле, где φ — число из Леммы 1.1. Так как $K < T^{-1}\varepsilon$, для этого шара верно утверждение леммы 2.2 и на нем корректно определено действие следующего вполне непрерывного оператора:

$$Bv = \int_0^\tau G_{m_0 + \int_0^t (v(s)+C_v)ds}(v(t) + C_v, v(t) + C_v)dt.$$

Покажем, что этот оператор имеет неподвижную точку в шаре U_K. Так как для кривой $v \in U_K$ ее C^0-норма не превосходит $K = T^{-1}\varepsilon - \varphi$ и по лемме 2.2 $\|C_v\| < T^{-1}C$, то из условия теоремы, формулы (3) и по леммам 1.1, 2.1 и 2.2 получаем, что:

$$\left\|G_{m_0 + \int_0^t (v(s)+C_v)ds}\left((v(t) + C_v),(v(t) + C_v)\right)\right\| \le$$
$$\le \left\|G_{m_0 + \int_0^t (v(s)+C_v)ds}\right\| ((\varepsilon T^{-1} - \varphi) + CT^{-1})^2 <$$
$$< (T^{-2}\varepsilon - T^{-1}\varphi).$$

Из последнего неравенства получаем:

$$\left\|\int_0^\tau G_{m_0 + \int_0^t (v(s)+C_v)ds}((v(t) + C_v),(v(t) + C_v))dt\right\| < (T^{-1}\varepsilon - \varphi).$$

Это означает, что оператор $\mathcal{B}$ переводит шар U_K в себя и, следовательно, по принципу Шаудера, имеет неподвижную точку $v_0(t)$ в этом шаре. Тогда легко видеть, что $m_0(\tau) = m_0 + \int_0^\tau (v_0(t) + C_{v_0})dt$ является решением дифференциального уравнения (2) таким, что $m_0(0) = m_0$ и $m_0(T) = m_1$. При этом по построению $m_0(\tau)$ является геодезической связности Леви—Чивита лоренцевой метрики на M. Из равенства $\mathcal{B}v_0 = v_0$ и из определения $\mathcal{B}$ следует, что $v_0(0) = 0$, и таким образом, что $\frac{d}{d\tau} m_0(\tau)_{|\tau=0} = C_{v_0}$, где вектор C_{v_0} по лемме 2.2 принадлежит световому конусу пространства $T_{m_0}M$, т.е. его скалярный квадрат относительно лоренцевой метрики отрицателен. Так как вдоль гоедезической связности Леви—Чивита указанный скалярный квадрат вектора производной имеет постоянное значение, эта геодезическая является времениподобной. □

3. СЛУЧАЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА С РИМАНОВОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

В этом параграфе мы исследуем вариант системы отсчета по А. Полтораку в событии $m \in M$, в котором многообразие — по-прежнему T_mM с выделенным ортонормированным репером, но в качестве связности выбрана риманова связность некоторой (положительно определенной) римановой метрики на T_mM (см. Введение). Равенство нулю кручения этой связности не предполагается. Здесь мы будем использовать язык, принятый в теории многообразий, что в данном случае более удобно.

Вопрос о существовании искомой геодезической для связности Леви—Чивита на M сводится к решению двухточечной краевой задачи для уравнения (1) в системе отсчета.

Важным отличием этого выбора связности в T_mM от случая предыдущего параграфа является возможное существование сопряженных точек. Имеются примеры (см. [1. 2]), показывающие, что если две точки сопряжены вдоль всех геодезических, их соединяющих, то двухточечная краевая задача для (1) может не иметь ни одного решения. Кроме того, как отмечено в предыдущем параграфе, из-за того, что правая часть (1) имеет квадратичный рост по скоростям, двухточечная краевая задача для некоторых пар точек также может не иметь решений. Мы заранее предполагаем, что в системе отсчета точки соединены геодезической, вдоль которой они не сопряжены, и находим геометрические условия, при выполнении которых задача разрешима.

Решение данной задачи потребует применения более сложного математического аппарата, чем предыдущая задача. Наши конструкции здесь основаны на замене обычных интегральных операторов, использованных в предыдущем параграфе, интегральными операторами с параллельным переносом, введенными Ю. Е. Гликлихом (см., например, [1. 2]).

Всюду в этом параграфе используются нормы в касательных пространствах и расстояния на многообразии, порожденные указанной выше (положительно определенной) римановой метрикой.

Пусть $\mathcal{M}$ — полное риманово многообразие, на котором зафиксирована некоторая риманова связность. Рассмотрим $p_0 \in \mathcal{M}$, $I = [0,l] \subset R$ и пусть $v : I \mapsto T_{p_0}\mathcal{M}$ непрерывная кривая. Используя конструкцию типа развертки Картана, можно показать (см., например, [1. 2]), что существует и единственна такая C^1-кривая $p : I \to \mathcal{M}$, что $p(0) = p_0$ и вектор $p'(t)$ параллелен вдоль $p(\cdot)$ вектору $v(t) \in T_{p_0}\mathcal{M}$ при любом $t \in I$.

Обозначим кривую $p(t)$, построенную выше по кривой $v(t)$, символом $Sv(t)$. Таким образом корректно определен непрерывный оператор $S : C^0(I, T_{p_0}\mathcal{M}) \to C^1(I, \mathcal{M})$, действующий из банахова пространства $C^0(I, T_{p_0}\mathcal{M})$ непрерывных отображений (кривых) из I в $T_{p_0}\mathcal{M}$ в банахово многообразие $C^1(I, \mathcal{M})$ C^1 — отображений из I в $\mathcal{M}$.

Отметим, что в случае постоянной кривой $v(t) \equiv X \in T_{p_0}\mathcal{M}$ по построению $Sv(t) = \exp X$, где exp — экспоненциальное отображение выбранной связности.

Через $U_k \subset C^0(I, T_{p_0}\mathcal{M})$ будем обозначать шар радиуса k с центром в нуле.

Рассмотрим в качестве $\mathcal{M}$ окрестность $\mathcal{O}$ в $T_m\mathcal{M}$, описанную во Введении. Пусть точки $m_0, m_1 \in \mathcal{O}$ соединены в $\mathcal{O}$ геодезической $\gamma(t)$ римановой связности ($\gamma(0) = m_0$, $\gamma(1) = m_1$), не сопряжены вдоль нее, и при этом вектор $\frac{d}{dt}\gamma(t)_{|t=0}$ лежит внутри светового конуса пространства $T_{m_0}M$. В частности, отсюда следует, что $m_1 = \exp\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)_{|t=0}\right) = S\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)_{|t=0}\right)$, где exp — экспоненциальное отображение римановой связности. Без ограничения общности можно считать, что (положительно определенная) риманова метрика на $\mathcal{O}$ является сужением некоторой полной римановой метрики на $T_m M$. Выберем относительно компактную область $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ с гладкой границей такую, что $\mathcal{O}_1$ содержит точки m_0 и m_1 вместе с соединяющей их геодезической $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$, и точку $0 \in T_{m_0} M$ (если $\mathcal{O}$ обладает указанными свойствами, то в качестве $\mathcal{O}_1$ можно использовать ее саму). Риманову метрику можно изменить вне $\mathcal{O}_1$ так, чтобы она стала полной на $T_m M$ и вместо $\mathcal{O}$ использовать $\mathcal{O}_1$.

Лемма 3.1. *Пусть m_0 и m_1 не сопряжены вдоль геодезической $\gamma(t)$ связности системы отсчета такой, что $\gamma(0) = m_0$ и $\gamma(1) = m_1$. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой кривой $\tilde{u}(t) \in U_\varepsilon \subset C^0([0,1], T_{m_0}\mathcal{O})$ в некоторой ограниченной окрестности V вектора $\frac{d}{dt}\gamma(t)_{|t=0}$ в $T_{m_0}\mathcal{O}$ существует единственный вектор $\tilde{C}_{\tilde{u}}$, непрерывно зависящий от $\tilde{u}$ и такой, что $S(\tilde{u} + \tilde{C}_{\hat{u}})(1) = m_1$.*

Обозначим через C число, ограничивающее сверху норму векторов $\hat{C}_{\tilde{u}}$ из Леммы 3.1.

Лемма 3.2. *В условиях и обозначениях леммы 3.1 пусть числа $k > 0$ и $T > 0$ таковы что $T^{-1}\varepsilon > k$. Тогда для любой кривой $u(t) \in U_k \subset C^0([0,T], T_{m_0}\mathcal{O})$ в некоторой ограниченной окрестности вектора $T^{-1}\frac{d}{dt}\gamma(t)_{|t=0}$ в $T_{m_0}\mathcal{O}$ существует единственный вектор C_u, непрерывно зависящий от u и такой, что $S(u + C_u)(T) = m_1$.*

Леммы 3.1 и 3.2 доказываются в точности аналогично теореме 3.3 в [1] (см. также леммы 1 и 2 в [3]). Отметим, что как и в лемме 2.2 $C_v = T^{-1}C_{\tilde{v}}$, где $\tilde{v}(s) = Tv(Ts) \in U_\varepsilon \subset C^0([0,1], T_{m_0}\mathcal{O})$. Таким образом, для $u \in U_k$ из леммы 3.2 выполняется $\|C_u\| < T^{-1}C$, где C — число из леммы 3.1.

Лемма 3.3. *В условиях и обозначениях лемм 3.1 и 3.2 число ε можно выбрать таким образом, что для кривой $\tilde{u}(\cdot) \in U_\varepsilon \subset C^0([0,1], T_{m_0}\mathcal{O})$ вектор $C_{\tilde{u}}$ лежит внутри светового конуса пространства $T_{m_0}M$ и для кривой $u \in U_k \subset C^0([0,T], T_{m_0}\mathcal{O})$ вектор C_u также лежит внутри светового конуса пространства $T_{m_0}M$.*

Доказательство. Принадлежность вектора $C_{\tilde{u}}$ внутренности светового конуса при достаточно малом $\varepsilon > 0$ доказывается из соображений непрерывности, как в лемме 2.1. Для C_u это утверждение следует из того факта, что $C_v = T^{-1}C_{\tilde{v}}$, где $\tilde{v}(s) = Tv(Ts) \in U_\varepsilon \subset C^0([0,1], T_{m_0}\mathcal{O})$ (см. выше). □

Далее будем полагать, что число ε выбрано таким образом, что выполнены утверждения лемм 3.1 и 3.3.

Для любой C^1-кривой $\gamma(t)$, заданной при $t \in [0,T]$, и векторного поля $X(t,m)$ на $\mathcal{O}$ обозначим через $\Gamma X(t, \gamma(t))$ кривую в $T_{\gamma(0)}\mathcal{O}$, полученную параллельным переносом векторов $X(t, \gamma(t))$ вдоль $\gamma(\cdot)$ в точку $\gamma(0)$ относительно связности системы отсчета.

Так же, как в предыдущем параграфе, введем норму $\|G_m\|$ с использованием норм векторов относительно выбранной (положительно определенной) римановой метрики. Для $\|G_m\|$ выполняется формула (2).

В дальнейшем нам понадобится интегральный оператор $B: U_k \to C^0([0,T], T_{m_0}M)$ следующего вида:

$$Bv = \int_0^\tau \Gamma G_{S(v(t)+C_v)}\left(\frac{d}{dt}S(v(t)+C_v), \frac{d}{dt}S(v(t)+C_v)\right)dt, \quad (4)$$

построенный с использованием введенных выше операторов, где k и T удовлетворяют условиям леммы 3.2. Этот оператор вполне непрерывен.

Теорема 3.4. *Пусть m_0 и m_1 в системе отсчета не сопряжены вдоль геодезической $\gamma(\tau)$ связности системы отсчета такой, что $\gamma(0) = m_0$, $\gamma(T) = m_1$ и вектор $\frac{d}{dt}\gamma(t)_{|t=0}$ лежит внутри светового конуса пространства $T_{m_0}M$. Пусть также эти точки лежат в шаре $V \subset \mathcal{O}$, в котором для любого $m \in V$ выполняется неравенство $\|G_m\| < \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + C)^2}$, где для $\varepsilon > 0$ выполнены утверждения лемм 3.1 и 3.3 и $C > 0$ — число из леммы 3.1. Тогда на M существует времениподобная геодезическая $m_0(\tau)$ связности Леви—Чивита лоренцевой метрики такая, что $m_0(0) = m_0$ и $m_0(T) = m_1$.*

Доказательство. Обозначим через k число $T^{-1}\varepsilon - \varphi$, где φ — число из леммы 1.1. Для этого k выполнено условие леммы 3.2. Следовательно, на шаре $U_k \subset C^0([0,t_1], T_{m_0}M)$ корректно определен оператор (4). Так как для кривой $v(\cdot) \in U_k$ ее C^0-норма не превышает k, $\|C_v\| < T^{-1}C$ и параллельный перенос относительно римановой связности не изменяет норму вектора, то учитывая определение оператора S, получаем, что $\left\|\frac{d}{d\tau}S(v(\tau) + C_v)\right\| < (T^{-1}\varepsilon - \varphi) + T^{-1}C.$

Тогда из формулы (2), условия теоремы и леммы 1.1 следует, что:

$$\left\| G_{S(v(\tau)+C_v)}\left(\frac{d}{d\tau}S(v(\tau)+C_v),\frac{d}{d\tau}S(v(\tau)+C_v)\right)\right\| \le$$
$$\le \left\| G_{S(v(\tau)+C_v)}\right\| ((T^{-1}\varepsilon-\varphi)+T^{-1}C)^2 <$$
$$< (T^{-2}\varepsilon - T^{-1}\varphi).$$

Так как оператор Γ параллельного переноса не изменяет нормы векторов, получаем из последнего неравенства:

$$\left\| \int_0^\tau \Gamma G_{S(v(t)+C_v)}\left(\frac{d}{dt}S(v(t)+C_v),\frac{d}{dt}S(v(t)+C_v)\right)dt\right\| \le$$
$$\le \int_0^\tau \left\| G_{S(v(t)+C_v)}\left(\frac{d}{dt}S(v(t)+C_v),\frac{d}{dt}S(v(t)+C_v)\right)\right\| dt <$$
$$< (T^{-1}\varepsilon - \varphi) = k.$$

Это означает, что вполне непрерывный оператор B переводит шар U_k в себя и, следовательно, по принципу Шаудера имеет неподвижную точку $v_0(\tau)$ в этом шаре. Тогда из определения оператора S и свойств ковариантной производной следует, что $m_0(\tau)=S(v(\tau)+C_v)$ является решением дифференциального уравнения (1) (см. [1, 2]). По построению кривая $m_0(\tau)$ является геодезической связности Леви—Чивита лоренцевой метрики на M и для нее выполняется свойство $m_0(0)=m_0$, $m_0(T)=m_1$.

Из равенства $Bv_0=v_0$ и из формулы (4) следует, что $v_0(0)=0$. Тогда из определения оператора S следует, что $\frac{d}{d\tau}m_0(\tau)_{|\tau=0}=C_{v_0}$, где вектор C_{v_0} по лемме 3.3 принадлежит световому конусу пространства $T_{m_0}M$, т.е. его скалярный квадрат относительно лоренцевой метрики отрицателен. Так как вдоль гоедезической связности Леви—Чивита лоренцевой метрики указанный скалярный квадрат вектора производной имеет постоянное значение, эта геодезическая является времениподобной. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гликлих Ю.Е.* Анализ на римановых многообразиях и задачи математической физики. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1989. — 189 с.

2. *Гликлих Ю.Е.* Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики. — М.: КомКнига (УРСС), 2005. — 416 с.

3. *Зыков П.С.* О разрешимости двухточечной краевой задачи для уравнений типа пульверизаций на римановых многообразиях.// Известия РАЕН, серия МММИУ. — 2004.- Т. 8, № 1—2. — С. 5—13.

4. *Мизнер Ч., Торн Л., Уилер Дж.* Гравитация. — М.: Мир, 1977. — Т. 1. — 474 с.; Т. 2. — 525 с.; Т. 3. — 510 с.

5. *Poltorak A.* On the covariant theory of gravitation // 9th International Conference on General Relativity and Gravitation, Abstracts. — Jena, 1980. — Vol. 2. — P. 516. (Available on http://arXiv.org/abs/gr-qc/0403050)

6. *Poltorak A.* On the Energy Problem in General Relativity // 10th International Conference on General Relativity and Gravitation, Pa-dova, Contributed Papers, Ed. B. Bertotti, F. de Felice, A. Pascolini. — 1983, Vol. 1. — P. 609 (Available on http://arXiv.org/abs/gr-qc/0403107)

7. *Poltorak A.* Gravity as nonmetricity. General relativity in metric-afine space (L_n, g) // http: arXiv: gr-qc/0407060 v2 30 Jul 2004.- 15 p.

8. *Sachs R.K., Wu H.* General Relativity for Mathematicans. — N.Y.: Springer-Verlag, 1977. — 291 p.