УДК:517.988.6

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ С СЮРЪЕКТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ*

Б. Д. Гельман

Воронежский государственный университет

Настоящая работа посвящена изучению включений вида $a(x) \in F(x)$, где a — замкнутый линейный сюръективный оператор, F — многозначное отображение. Включения такого вида непосредственно возникают при изучении дифференциальных уравнений и управляемых систем. В статье выясняются условия разрешимости и изучаются свойства множества решений таких включений (топологическая размерность и неограниченность этого множества). В заключение статьи, доказанные теоремы применяются для изучения разрешимости одной абстрактной управляемой системы с обратной связью.

Настоящая работа посвящена изучению включений вида

$$a(x) \in F(x), \qquad (1)$$

где a — замкнутый линейный сюръективный оператор, F — многозначное отображение. Включения такого вида непосредственно возникают при изучении дифференциальных уравнений и управляемых систем.

Ранее, в работах [17], [6] изучались уравнения вида $a(x) = f(x)$, где a — линейный непрерывный оператор, f — однозначное вполне непрерывное отображение. В статье [5] изучались включения (1) в случае, когда F являлся непрерывным многозначным отображением. Настоящая статья естественно содержит в себе и обобщает результаты этих работ.

В статье выясняются условия разрешимости и изучаются свойства множества решений таких включений (топологическая размерность и неограниченность этого множества). В заключение статьи, доказанные теоремы применяются для изучения разрешимости одной абстрактной управляемой системы с обратной связью.

1. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ МНОЖЕСТВА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть Y — подмножество банахова пространства E, обозначим:

$K(Y)$ — множество всех непустых компактных подмножеств в Y;

$Kv(Y)$ $(Cv(Y))$ — множество всех непустых компактных (замкнутых) выпуклых подмножеств в Y.

Необходимые сведения из теории многозначных отображений содержатся, например, [2], [3]. Всюду в дальнейшем многозначные отображения обозначаются прописными, а однозначные — строчными буквами.

Первой работой, посвященной вычислению топологической размерности множества неподвижных точек многозначных отображений, была статья [16]. Некоторые другие результаты в этом направлении были доказаны в [4]—[6], [11], [12], [14], [15], [17].

Пусть E — банахово пространство, U — ограниченное открытое множество в E, $F : \bar{U} \to Kv(E)$ — вполне непрерывное многозначное отображение, не имеющее неподвижных точек на границе ∂U. Тогда многозначное вполне непрерывное векторное поле $\Phi = i - F$, $\Phi(x) = x - F(x)$, не имеет особых точек на ∂U. В этом случае определена топологическая степень $\gamma(\Phi, \bar{U})$ многозначного поля Φ, (см., например, [3]).

Обозначим $N(\Phi, \bar{U})$ множество неподвижных точек F, т.е.

$$N(\Phi, \bar{U}) = \{x \in \bar{U} \mid x \in F(x)\} = \{x \in \bar{U} \mid 0 \in \Phi(x)\}.$$

Изучим размерность $\dim$ этого множества. Основные свойства размерности $\dim$ содержатся, например, в [1], [7].

Имеет место следующее утверждение.

1.1. Лемма. *Пусть X — метрическое компактное пространство, $\dim(X) \le n-1$. Если E — банахово пространство и $T : X \to Kv(E)$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение, удовлетворяющее условиям:*

1) $T(x) \ni 0$ для любого $x \in X$;

2) $\dim(T(x)) \ge n$ для любого $x \in X$;

тогда существует однозначное непрерывное отображение $f : X \to E$ такое,что $f(x) \ne 0$, $f(x) \in F(x)$ для любого $x \in X$.

* Это исследование поддержано РФФИ грант № 02-01-00189.

Доказательство этой леммы содержится в [16].

В работе [4] было доказано следующее утверждение.

1.2. Теорема. *Пусть* $F:\bar{U}\to Kv(E)$ *— непрерывное компактное многозначное отображение. Если* $\gamma(i-F,\bar{U})\neq 0$ *и* $\dim(F(x))\geq n$ *для любого* $x\in U$*, то* $\dim(N(\Phi,\bar{U}))\geq n$.

Рассмотрим обобщение этой теоремы на случай, когда многозначное отображение F является непрерывным только "частично". Дадим точные определения.

Пусть банахово пространство E представляется в ввиде прямого произведения банаховых пространств E_1 и E_2. т.е. $E=E_1\times E_2$. Пусть $U\subset E$ — ограниченное открытое множество, пусть $F=F_1\times F_2:\bar{U}\to Kv(E_1)\times Kv(E_2)$ — компактное многозначное отображение. Пусть $\Phi=i-F$ — многозначное векторное поле, порожденное отображением F.

1.3. Теорема. *Если:*

(a) *многозначное отображение* F_1 *— полунепрерывно сверху;*

(b) *многозначное отображение* F_2 *— непрерывно и для любой точки* $(x_1,x_2)\in U$ *выполнено неравенство* $\dim(F_2(x_1,x_2))\geq n$;

(c) $\gamma(\Phi,\bar{U})\neq 0$.

Тогда $\dim(N(\Phi,\bar{U}))\geq n$.

Доказательство. В силу свойств топологической степени, множество неподвижных точек $N=N(\Phi,\bar{U})$ отображения F непусто, компактно и принадлежит множеству U. Рассмотрим на N многозначное непрерывное отображение Φ_2, определенное соотношением, $\Phi_2(x_1,x_2)=x_2-F_2(x_1,x_2)$.

Предположим противное, тогда $\dim(N)\leq$ $\leq n-1$. Очевидно, что отображение Φ_2 непрерывно и удовлетворяет условиям леммы 1.1. Следовательно, существует сечение $\hat{\varphi}=i-\hat{f}:N\to$ $\to E_2$, $0\neq\hat{\varphi}(x_1,x_2)\in\Phi_2(x_1,x_2)$ для любой точки $(x_1,x_2)\in N$. В силу теоремы Майкла (см. [18]), существует непрерывное сечение $f:\bar{U}\to E_2$, $f(x_1,x_2)\in F_2(x_1,x_2)$, такое, что $f|_N=f$. Рассмотрим многозначное отображение $G=F_1\times f:\bar{U}\to$ $\to Kv(E_1)\times E_2$. Очевидно, что для любой точки $(x_1,x_2)\in\bar{U}$ выполнено включение, $G(x_1,x_2)\subset$ $\subset F(x_1,x_2)$, причем многозначное отображение G является полунепрерывным сверху и компактным. В силу свойств топологической степени имеем:

$$\gamma(i-G,\bar{U})=\gamma(\Phi,\bar{U})\neq 0.$$

Следовательно, отображение G должно иметь неподвижную точку в области U, однако, это не так. Действительно, если бы точка (x_1^0,x_2^0) была неподвижной точкой отображения G, то она принадлежала бы множеству N. Однако, $f(x_1^0,x_2^0)=$ $=f(x_1^0,x_2^0)\neq x_2^0$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

2. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СЮРЪЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть E_1,E_2 — два банаховых пространства, $a:D(a)\subset E_1\to E_2$ — линейный замкнутый сюръективный оператор. Пусть $L=Ker(a)$ — ядро оператора a. Рассмотрим фактор-пространство $E=E_1/Ker(a)$ пространства E_1 по ядру $Ker(a)$. Пусть p — проекция пространства E_1 на E. Известно, что норма в пространстве E определяется следующим образом: если $[x]=x+Ker(a)\in E$, то $\|[x]\|=\inf\limits_{u\in Ker(a)}\|x+u\|$. В этом случае естественно определено отображение $a_1:D(a_1)\subset E\to E_2$, где $D(a_1)=p(D(a))$ и $a_1([x])=a(x)$. Хорошо известно (см., например, [10]), что отображение a_1 является замкнутым, имеет нулевое ядро и сюръективно. Тогда, отображение a_1 является обратимым. По определению нормы линейного оператора имеем:

$$\|a_1^{-1}\|=\sup_{y\in E_2}\frac{\|a_1^{-1}(y)\|}{\|y\|}=$$

$$=\sup_{y\in E_2}\left(\frac{\inf\{\|x\|\,|\,x\in E_1,a(x)=y\}}{\|y\|}\right).$$

Обозначим $\|a_1^{-1}\|=\beta(a)$.

Изучим многозначное отображение $a^{-1}:E_2\to$ $\to Cv(E_1)$, где $a^{-1}(y)=\{x\in E_1\,|\,a(x)=y\}$.

2.1. Лемма. *Отображение* a^{-1} *является липшицевым многозначным отображением с константой Липшица* $\beta(a)$*, т.е.*

$$h(a^{-1}(x_1),a^{-1}(x_2))\leq\beta(a)\|x_1-x_2\|,$$

где h — метрика Хаусдорфа в пространстве замкнутых подмножеств.

Доказательство. Пусть $x_1,x_2\in E_2$, вычислим $h(a^{-1}(x_1),a^{-1}(x_2))$. Очевидно, что:

$$h(a^{-1}(x_1),a^{-1}(x_2))=$$
$$=\inf\left\{\|z_1-z_2\|\,|\,z_1\in a^{-1}(x_1),z_2\in a^{-1}(x_2)\right\}=$$
$$=\inf\left\{\|z_1-z_2\|\,|\,z_1-z_2\in a^{-1}(x_1-x_2)\right\}\leq$$
$$\leq\beta(a)\|x_1-x_2\|.$$

2.2. Лемма. *Для любого числа* k, $\beta(a)<k$, *существует непрерывное отображение* $q:E_2\to E_1$*, такое, что выполнены следующие условия:*

1) $a(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $\|q(y)\| \le k\|y\|$.

Доказательство. Если $\dim(Ker(a)) = 0$, то искомое отображение это отображение a^{-1}. Рассмотрим случай $\dim(Ker(a)) \ge 0$. Пусть $a^{-1}: E_2 \to E_1$ — отображение обратное к a. Очевидно, что оно имеет выпуклые замкнутые образы. Так как a^{-1} — липшицево, то оно является полунепрерывным снизу многозначным отображением. Пусть k — произвольное число, большее $\beta(a)$. Рассмотрим другое многозначное отображение $\Phi: E_2 \to Cv(E_1)$, $\Phi(y) = U_{r(y)}(0)$, где $U_{r(y)}(0) \subset E_1$ — открытый шар радиуса $r(y) = k\|y\|$ с центром в нуле. Пусть $F(y) = a^{-1}(y) \cap \Phi(y)$. Нетрудно видеть, что F имеет непустые выпуклые образы, и у многозначного отображения F существует непрерывное сечение $q: E_2 \to E_1$, $q(x) \in F(x)$ для любого $x \in E_2$. Очевидно, что это отображение и будет искомым. Лемма доказана.

3. ВКЛЮЧЕНИЯ С СЮРЪЕКТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Пусть E_1, E_2 — два банаховых пространства, $a: D(a) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, $F: E_1 \to Cv(E_2)$ — многозначный вполне непрерывный оператор. Рассмотрим следующее включение:

$$a(x) \in F(x). \qquad (1)$$

Обозначим $N(a,F)$ множество решений включения (1).

В настоящем разделе изучаются вопросы существование решений включения (1) и топологическая размерность $\dim$ этого множества. Нам будут необходимы следующие леммы.

Пусть q — отображение, удовлетворяющее условиям леммы 2.2. Рассмотрим многозначное отображение $F_1: E_2 \times Ker(a) \to Cv(E_2)$ определенное условием: $F_1(y,u) = F(q(y)+u)$.

Тогда можно рассмотреть включение:

$$F_1(y,u) \ni y. \qquad (2)$$

3.1. Лемма. *Включения (1) и (2) эквивалентны.*

Доказательство. Покажем, что каждому решению включения (1) однозначно сопоставляется решение включения (2), и наоборот, каждому решению включения (2) однозначно сопоставляется решение включения (1). Действительно, пусть x_0 — решение включения (1), т.е. $y_0 = a(x_0) \in F(x_0)$. Тогда $u_0 = x_0 - q(y_0) \in Ker(a)$. Следовательно, $F_1(y_0,u_0) = F(x_0) \ni y_0$, т.е. пара (y_0,u_0) является решением включения (2).

Обратно, пусть теперь пара (y_0,u_0) является решением включения (2), обозначим $x_0 = q(y_0) + u_0$. Тогда $F(x_0) \ni y_0$, и $a(x_0) = a(q(y_0) + a(u_0) = y_0$ $a(x_0) = a(q(y_0) + a(u_0) = y_0$, т.е. точка x_0 является решением включения (2).

Докажем еще одну лемму.

Пусть E — банахово пространство, E_0 равно $E \times R^1$. Норму в E_0 определим по правилу:

$$\|(x,t)\| = \sqrt{\|x\|^2 + t^2}.$$

Пусть S_r — сфера радиуса r с центром в нуле банахова пространства E_0, а $F: S_r \to Kv(E)$ — вполне непрерывное многозначное отображение. Рассмотрим включение

$$F(x,t) \ni x. \qquad (3)$$

3.2. Лемма. *Если* $\min\limits_{u \in F(x,t)} \|u\| \le r$ *для любой точки* $(x,t) \in S_r$, *то включение (3) имеет решение на* S_r.

Доказательство. Пусть B — замкнутый шар радиуса r в пространстве $E, \tilde{S}_r$ — граница этого шара. Рассмотрим многозначное отображение $G: B \to Kv(E)$ определенное условием:

$$G(x) = F(x, \sqrt{r^2 - \|x\|^2}).$$

Это отображение является вполне непрерывным, т.к. отображение F было вполне непрерывным и для любой точки $x \in B$ пересечение $G(x) \cap B \ne \varnothing$. Следовательно, по теореме Какутани (см., например, [9], [3]) отображение G имеет неподвижную точку. Пусть точка x_0 является неподвижной точкой отображения G, тогда точка $(x_0,t_0) \in S_r$ является решением включения (3), где $t_0 = \sqrt{r^2 - \|x_0\|^2}$. Лемма доказана.

Докажем еще одну лемму.

Пусть E — банахово пространство, $\tilde{E} = E \times R^n$. Норму в $\tilde{E}$ определим по правилу:

$$\|(x,l)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|l\|^2}.$$

Пусть U — ограниченное открытое множество в банаховом пространстве $\tilde{E}$, а $F: \overline{U} \to Kv(E)$ — многозначное вполне непрерывное отображение. Рассмотрим включение

$$F(x,l) \ni x. \qquad (4)$$

Обозначим множество решений этого уравнения $M(F,\overline{U})$.

Пусть $U_0 = U \cap (E \times 0)$, отображение $F_0(x) = F(x,0)$ определено на этом множестве. Будем отождествлять множество U_0 с соответствующим множеством в E.

3.3. Лемма. *Если* $\gamma(i - F_0, \bar{U}_0) \neq 0$, *то множество* $M(F, \bar{U})$ *не пусто и*

$$\dim(M(F, \bar{U}) \geq n.$$

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение

$$Q : \bar{U} \to Kv(E_1) \times Kv(R^n),$$

определенное условием: $Q(x,l) = F(x,l) \times B_r[0]$, где $B_r[0] \subset R^n$ — замкнутый шар радиуса r с центром в нуле.

Покажем, что существует такое положительное число r, что многозначное отображение Q не имеет неподвижных точек на ∂U. Предположим противное, тогда для любого натурального k отображение Q_k, $Q_k(x,l) = F(x,l) \times B_{1/k}[0]$ имеет неподвижную точку $(x_k, l_k) \in \partial U$. Очевидно, что последовательность $\{l_k\} \subset R^n$ стремится к нулю. В силу полной непрерывности отображения F, без ограничения общности можно считать, что последовательность $x_k \to x_0$. Так как множество ∂U является замкнутым, то $x_0 \in \partial U_0$. Это противоречит предположению, т.к. на множестве ∂U_0 отображение $F_0 = F(\cdot, 0)$ не имеет неподвижных точек по условию.

Пусть положительное число r такое, что многозначное отображение Q не имеет неподвижных точек на ∂U. Тогда определено вращение векторного поля $\Psi = i - Q$ на области U. Покажем, что $\gamma(\Psi, \bar{U}) \neq 0$.

Действительно, для любой точки $(x,l) \in \bar{U}$ выполнено включение $\tilde{F}(x,l) = (F(x,l), 0) \subset \subset Q(x,l)$, следовательно отображение $\tilde{F}$ является сечением многозначного отображения Q. Тогда, $\gamma(\Psi, \bar{U}) = \gamma(i - \tilde{F}, \bar{U})$.

С другой стороны, отображение $\tilde{F}$ действует из $\bar{U}$ в подпространство E, следовательно, по теореме о сужении для вращения векторного поля имеем равенство, $\gamma(i - \tilde{F}, \bar{U}) = \gamma(i - F_0, \bar{U}_0) \neq 0$. Откуда и следует, что $\gamma(\Psi, \bar{U}) \neq 0$.

Так как $Q = F \times S$, где $S(x,l) = B_r[0]$ — непрерывное многозначное отображение и $\dim(S(x,l)) = n$, то, в силу теоремы 1.3, $\dim(N(\Psi, \bar{U})) \geq n$.

Так как $N(\Psi, \bar{U}) \subset M(F, \bar{U})$, то, в силу монотонности размерности $\dim$, имеем неравенство:

$$\dim(M(F, \bar{U})) \geq \dim(N(\Psi, \bar{U})) \geq n.$$

Лемма доказана.

Подобное утверждение, в случае однозначного отображения F, было доказано в работе [6].

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор. Пусть многозначное отображение $F : X \subset E_1 \to Kv(E_2)$.

3.4. Определение. *Будем говорить, что отображение* F *— компактно по модулю отображения* a *(или* a*-компактно), если для любого ограниченного множества* $A \subset E_2$ *и любого ограниченного множества* $B \subset X$ *множество* $\overline{F(B \cap a^{-1}(A))}$ *является компактным. Если отображение* F *является* a*-компактным и полунепрерывным сверху, то будем говорить, что оно* a*-вполне непрерывно.*

Справедливо следующее необходимое и достаточное условие a-полной непрерывности многозначного отображения F.

Известно, что множество $D(a)$ можно превратить в банахово пространство, наделив его нормой графика: $\|x\|_{D(a)} = \|x\|_{E_1} + \|a(x)\|_{E_2}$. Пусть банахово пространство E — это множество $D(a)$, снабженное этой нормой. Очевидно, что отображение вложения $j : E \to E_1$ является непрерывным. Пусть $X \subset D(a)$. Обозначим $\tilde{X} = j^{-1}(X)$ и рассмотрим отображение $\tilde{F} : \tilde{X} \to Kv(E_2)$, $\tilde{F}(x) = F(j(x))$.

3.5. Предложение. *Полунепрерывное сверху отображение* F *является* a*-вполне непрерывным, тогда и только тогда, когда отображение* $\tilde{F}$ *является вполне непрерывным.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $C \subset \tilde{X}$ — ограниченное множество в E, тогда множество $B = j(C)$ ограничено в E_1, а множество $A = a(j(C)) = a(B)$ ограничено в E_2. Тогда множество $\tilde{F}(C) = F(j(C)) = F(B \cap a^{-1}(A))$ является относительно компактным, что и доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть отображение $\tilde{F}$ вполне непрерывно. Рассмотрим ограниченные множества $A \subset E_2$ и $B \subset X$. Пусть $C = j^{-1}(B \cap a^{-1}(A)) \subset E$. Очевидно, что множество $C \subset \tilde{X}$ и ограничено. Тогда $F(B \cap a^{-1}(A)) = = \tilde{F}(C)$ и является относительно компактным множеством, что и доказывает достаточность.

3.6. Теорема. *Пусть многозначное отображение* $F : E_1 \to Kv(E_2)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) F — a-вполне непрерывно;

2) существуют неотрицательные числа c и d такие, что для любого $x \in E_1$ справедливо неравенство: $\min\limits_{y \in F(x)} \|y\| \leq c\|x\| + d$.

Если $c < 1/\beta(a)$, то $N(a, F)$ является непустым множеством и

$$\dim(N(a, F) \geq \dim(Ker(a)).$$

Доказательство. Докажем непустоту множества $N(a,F)$.

Если $\dim(Ker(a))=0$, то оператор a^{-1} является линейным непрерывным оператором и $\|a^{-1}\|=\beta(a)$. Тогда, в силу условий теоремы, нетрудно построить шар $B_R[0]\subset E_2$ такой, что для любой точки $y\in B_R[0]$ пересечение $\hat{F}(y)=F(a^{-1}(y))\cap B_R[0]\neq\varnothing$. Так как отображение $\hat{F}$ является вполне непрерывным, то у него существует неподвижная точка y_*. Очевидно, что точка $x_*=a^{-1}(y_*)$ является решением включения (1).

Рассмотрим случай, когда $\dim(Ker(a))>0$. Пусть k произвольное число удовлетворяющее неравенствам, $\beta(a)<k<1/c$, $q:E_2\to E_1$ — отображение, удовлетворяющее лемме 2.3, построенное по этому числу k.

Выберем в подпространстве $Ker(a)=$ $=\{x\in E_1\,|\,a(x)=0\}$ ненулевой вектор e,

$$\|e\|<\frac{1-ck}{c},$$

и рассмотрим пространство $E_0=E_2\times R^1$, с нормой $\|(y,t)\|=\sqrt{\|y\|^2+t^2}$. Пусть отображение $F_1:E_0\to Kv(E_2)$ определено условием:

$$F_1(y,t)=F(q(y)+te).$$

Покажем, что это отображение является вполне непрерывным. Пусть $A\subset E_0$ — произвольное ограниченное множество, тогда найдется число $R>0$ такое, что для любой точки $(y,t)\in A$ справедливо неравенство $\|(y,t)\|\le R$. Пусть отображение $\hat{q}:A\to E_1$ определено соотношением $\hat{q}(y,t)=q(y)+te$. Обозначим $B=\hat{q}(A)$, тогда для любой точки $x\in B$ справедливо неравенство,

$$\|x\|=\|q(y)+te\|\le\left(k+\frac{1-ck}{c}\right)R,$$

т.е. B также является ограниченным множеством. Заметим, что $B\subset a^{-1}(A)$. Тогда, в силу a-полной непрерывности отображения F, множество $F_1(A)=F(B\cap a^{-1}(A))$ является относительно компактным. Это и доказывает полную непрерывность отображения F_1.

Рассмотрим сферу $S_r\subset E_0$. Покажем, что для достаточно большого r справедливо неравенство $\min\limits_{u\in F_1(y,t)}\|u\|\le r$ любых $(y,t)\in S_r$.

Действительно,

$$\min_{u\in F_1(y,t)}\|u\|\le c\left(\|q(y)+te\|\right)+d\le$$

$$\le ck\|y\|+c|t|\|e\|+d.$$

Если число $r\ge\dfrac{d}{1-ck-c\|e\|}$, то

$$\min_{u\in F_1(y,t)}\|u\|<ckr+cr\|e\|+d\le r.$$

Это и доказывает требуемое неравенство.

Мы находимся в условиях леммы 3.2, следовательно, включение $F_2(y,t)\ni y$ имеет решение на сфере S_r. Пусть $(y_0,t_0)\in S_r$ — решение нашего включения. Очевидно тогда, что $x_0=q(y_0)+t_0e\in N(a,f)$.

Оценим теперь топологическую размерность множества решений включения (1). Пусть, как и раньше, k произвольное число удовлетворяющее неравенствам, $\beta(a)<k<1/c$, $q:E_2\to E_1$ — отображение, построенное по этому числу k. Пусть число n такое, что $0\le n\le\dim(Ker(a))$. Тогда в подпространстве $Ker(a)$ существуют n линейно независимых векторов $e_1,e_2,\ldots,e_n$,

$$\|e_i\|<\frac{1-ck}{c}.$$

Рассмотрим пространство $E_3=E_2\times R^n$, с нормой $\|(x,u)\|=\sqrt{\|x\|^2+\|u\|^2}$, и многозначное отображение $G:E_3\to Kv(E_2)$, $G(y,u)=F\left(q(y)+\sum\limits_{i=1}^{n}u_ie_i\right)$, где $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$.

Нетрудно заметить, что это многозначное отображение является вполне непрерывным.

Легко проверить также, что точка (y_0,u_0) является решением включения

$$y\in G(y,u),\tag{5}$$

тогда и только тогда, когда точка $x_0=\tilde{q}(y_0,u_0)$, $\tilde{q}(y_0,u_0)=q(y_0)+\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^0e_i$, является решением нашего включения (1), здесь $u_0=(u_1^0,u_2^0,\ldots,u_n^0)$.

Заметим, что отображение $\tilde{q}:E_3\to E_1$, $\tilde{q}(y,u)=q(y)+\sum\limits_{i=1}^{n}u_ie_i$, является биекцией. Следовательно, разным решениям включения (5), с помощью отображения $\tilde{q}$, отвечают разные решения включения (1). Это позволяет, для изучения размерности множества решений включения (1), применить теоремы о размерности множества неподвижных точек многозначных отображений.

Рассмотрим числа

$$R_1>\frac{d}{1-ck-c\sum\limits_{i=0}^{n}\|e_i\|}$$

и

$$R = ckR_1 + cR_1\sum_{i=0}^{n}\|e_i\| + d.$$

Нетрудно заметить, что $R < R_1$.

Рассмотрим теперь ограниченное выпуклое замкнутое множество

$$T = B_{R_1}[0,E_2]\times B_1[0,R^n]\subset E_3,$$

где $B_{R_1}[0,E_2]$ — замкнутый шар радиуса R_1 с центром в нуле пространства E_2, а $B_1[0,R^n]$ — замкнутый шар радиуса 1 с центром в нуле пространства R^n.

Покажем, что множество

$$G(y,u)\cap B_R[0,E_2]\neq\varnothing$$

любых $(y,u)\in T$.

Пусть $(y,u)\in T$, тогда в силу условий теоремы, существует точка $z\in F\left(q(y)+\sum_{i=1}^{n}u_ie_i\right)$ такая, что

$$\|z\|\le c\left(\left\|q(y)+\sum_{i=1}^{n}u_ie_i\right\|\right)+d\le$$

$$\le c\left(\|q(y)\|+\sum_{i=0}^{n}|u_i|\|e_i\|\right)+d\le$$

$$\le ckR_1 + cR_1\sum_{i=0}^{n}\|e_i\|+d = R.$$

Это и доказывает непустоту этого пересечения.

Рассмотрим многозначное отображение $\tilde G(y,u)=G(y,u)\cap B_R[0,E_2]$. Тогда многозначное отображение $\tilde G: T\to Kv(B_R[0,E_2])\subset \subset Kv(B_{R_1}[0,E_2]$ вполне непрерывно, имеет выпуклые компактные образы. Заметим также, что сужение этого отображение на множество $B_{R_1}[0,E_2])\times 0$ не имеет неподвижных точек на границе $B_{R_1}[0,E_2])$ и переводит это множество в себя. Следовательно, $\gamma(i-\tilde G, B_{R_1}[0,E_2]))=1$.

Таким образом выполнены все условия леммы 3.3. Тогда, $\dim(N(i-\tilde G,T))\ge n$.

Так как множество $N(i-\tilde G,T)$ является компактом, а отображение $\tilde q: N(i-\tilde G,T)\to E_1$ является биекцией, то $\tilde q$ — гомеоморфизм на область значений. В силу сделанных построений, $\tilde q(N(i-\tilde G,T))\subset N(a,F)$. В силу монотонности топологической размерности имеем следующие неравенства:

$$\dim(N(a,F)\ge \dim(\tilde q(N(i-\tilde G,T))=$$

$$=\dim(N(i-\tilde G,T))\ge n.$$

Так как число $n\le\dim(Ker(a))$ выбиралось произвольно, то $\dim(N(a,F)\ge\dim(Ker(a))$. Это и доказывает теорему.

3.7. Следствие. *Пусть отображения a и F удовлетворяют условиям теоремы 3.6, тогда многозначное отображение $\Psi = a + F$ является сюрьективным и для любой точки $y\in E_2$ множество $\Psi^{-1}(y)=\{x\in E_1\mid \Psi(x)\ni y\}$ непусто и* $\dim(\Psi^{-1}(y))\ge\dim(Ker(a))$.

Доказательство. Рассмотрим включение

$$a(x)\in y - F(x),$$

где y — произвольный вектор из E_2. Очевидно, что отображение $F_1 = y - F$ удовлетворяет условиям теоремы 3.6. Следовательно, множество $N(a,F_1)=\Psi^{-1}(y)$ является непустым и $\dim(N(a,F_1))\ge\dim(Ker(a))$.

В некоторых случаях результаты теоремы 3.6 могут быть уточнены.

3.8. Теорема. *Пусть выполнены условия теоремы 3.6 и* $\dim(Ker(a))>0$. *Если многозначное отображение F переводит ограниченные подмножества пространства E_1 в ограниченные подмножества пространства E_2, то множество $N(a,F)$ будет неограниченным.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует такое число $\alpha>0$, что для любой точки $x\in N(a,F)$ справедливо неравенство $\|x\|\le\alpha$. Тогда и множество $F(N(a,F))$ также является ограниченным, т.е. существует такое число $\beta>0$, что для любой точки $y\in F(N(a,F))$ справедливо неравенство $\|y\|\le\beta$.

Рассмотрим стремящуюся к бесконечности последовательность чисел $\{r_n\}$ такую, что $r_n > \dfrac{d}{1-ck-c\|e\|}$, где число k и вектор e определены в теореме 3.6. Тогда на сферах $S_{r_n}\subset E_0$ существуют точки (y_n,t_n) такие, что точки $x_n = q(y_n)+t_ne$ принадлежат множеству $N(a,F)$. Тогда $\|x_n\|\le\alpha$ для любого n. С другой стороны, так как $F(x_n)\ni a(x_n)=y_n$, то $y_n\in F(N(a,F))$. Следовательно, $\|y_n\|\le\beta$ для любого n. Тогда

$$|t_n|\le\frac{\|x_n\|+\|q(y_n)\|}{\|e\|}\le\frac{\alpha+k\beta}{\|e\|}.$$

Следовательно, последовательность $\{t_n\}$ также ограничена. Тогда точка (y_n,t_n) не может лежать на сфере S_{r_n} при достаточно большом n. Полученное противоречие и доказывает теорему.

В случае, если отображение F является непрерывным многозначным отображением, то в теореме 3.6 можно уточнить оценку размерности множества $N(a,F)$.

3.9. Теорема. *Пусть многозначное отображение $F: E_1\to Kv(E_2)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) F — непрерывно и a-компактно;

2) $\dim(F(x)) \geq m$ для любого $x \in E_1$;

3) существуют неотрицательные числа c и d такие, что для любого $x \in E_1$ справедливо неравенство: $\min\limits_{y \in F(x)} \|y\| \leq c\|x\| + d$.

Если $c < 1/\beta(a)$, то множество $N(a,F)$ непусто и

$$\dim(N(a,F)) \geq \dim(Ker(a)) + m.$$

Доказательство. Непустота $N(a,F)$ вытекает из теоремы 3.6.

Оценим размерность множества $N(a,F)$. Как и в теореме 3.6 рассмотрим пространство $E_3 = E_2 \times R^n$ и многозначное отображение $G = G_1 \times G_2 : E_3 \to Kv(E_2) \times Kv(R^n)$. Многозначное отображение G_1 определено соотношением:

$$G_1(y,u) = F\left(q(y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right),$$

если $u = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Нетрудно заметить, что это многозначное отображение является непрерывным и вполне непрерывным.

Многозначное отображение G_2 определено соотношением:

$$G_2(y,u) = \{v \in R^n \mid \|v\| \leq 1/2\}.$$

Это многозначное отображение является непрерывным.

Как и в теореме 3.6 рассмотрим ограниченное выпуклое замкнутое множество

$$T = B_{R_1}[0,E_2] \times B_1[0,R^n] \subset E_3.$$

В теореме 3.6 показано, что множество

$$G_1(x,u) \cap B_R[0,E_2] \neq \varnothing$$

любых $(x,u) \in T$ и содержит внутреннюю точку шара $B_R[0,E_2]$.

Рассмотрим многозначное отображение $\tilde{G}_1(x,u) = G_1(x,u) \cap B_R[0,E_2]$. Можно доказать, что это отображение непрерывно, область значений $\tilde{G}_1(T)$ является относительно компатным множеством и для любой точки $(x,u) \in T$ справедливо равенство:

$$\dim(\tilde{G}_1(x,u)) = \dim(G_1(x,u)) \geq m.$$

Тогда многозначное отображение $\tilde{G} = \tilde{G}_1 \times$ $\times G_2 : T \to Kv(B_{2R}[0,E_2]) \times Kv(B_2[0,R^n]$ вполне непрерывно, имеет выпуклые образы, не имеет неподвижных точек на границе ∂T и переводит множество T в себя. Следовательно, $\gamma(i - \tilde{G}, T) = 1$.

Так как отображения $\tilde{G}_1$ и G_2 — непрерывны и $\dim(\tilde{G}_1(x,u) \times G_2(x,u)) \geq m + n$ для любой точки $(x,u) \in T$, то выполнены все условия теоремы 1.2. Тогда, $\dim(N(i - \tilde{G}, T)) \geq m + n$.

Откуда, как и в теореме 3.6, получаем, что $\dim(N(a,F) \geq \dim(Ker(a)) + m$. Это и доказывает теорему.

4. УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Применим результаты раздела 3 к изучению одного класса управляемых систем.

Пусть E_1, E_2, E_3 — банаховы пространства, $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, $f : E_1 \times E_3 \to E_2$ — нелинейное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(f_1) f *является непрерывным отображением;*

(f_2) существуют положительные числа c_1 и d_1 такие, что для любой точки $(x,u) \in E_1 \times E_3$ справедливо неравенство:

$$\|f(x,u)\| \leq c_1(\|x\| + \|u\|) + d_1;$$

(f_3) при каждом фиксированном $x \in E_1$ отображение $f_x = f(x,\cdot) : E_3 \to E_2$ является аффиным отображением.

Пусть $U : E_1 \to Kv(E_3)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение, удовлетворяющее следующему условию:

$(U1)$ *существуют положительные числа c_2 и d_2 такие, что*

$$\min_{u \in U(x)} \|u\| \leq c_2 \|x\| + d_2$$

для любого $x \in E_1$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$a(x) = f(x,u), \tag{6}$$

$$u \in U(x). \tag{7}$$

Будем называть задачу (6), (7) — задачей управления с обратной связью, а множество $U(x)$ — множеством допустимых управлений для точки $x \in E_1$.

Решением управляемой системы (6), (7) будем называть пару (x_*, u_*) такую, что

$$a(x_*) = f(x_*, u_*),$$

$$u_* \in U(x_*).$$

Точку $x_* \in E_1$ будем называть траекторией управляемой системы, а $u_* \in E_3$ — соответствующим управлением.

Рассмотрим многозначное отображение $F : E_1 \to Kv(E_2)$, определенное соотношением, $F(x) = f(x, U(x))$. В силу сделанных предположений множество $F(x)$ является выпуклым компактом для любого $x \in E_1$ и отображение F

является полунепрерывным сверху. Рассмотрим включение

$$a(x) \in F(x). \qquad (8)$$

Очевидно, что каждому решению включения (8) отвечает некоторое решение задачи управления (6), (7), т.е. если M — множество решений управляемой системы, N — множество решений включения (8), то $N = p(M)$, где p — проекция $E_1 \times E_3$ на пространство E_1.

Из теоремы 3.6. естественно вытекает следующая теорема.

4.1. Теорема. *Пусть многозначное отображение F является a — вполне непрерывным. Если $c_1(1+c_2) < 1/\beta(a)$, то множество решений управляемой системы (6), (7) непусто и топологическая размерность множества траекторий управляемой системы больше или равна размерности ядра оператора a.*

В заключение, рассмотрим следующий пример.

Пусть $f:[0,1]\times R^n \times R^p \to R^n$ — отображение, удовлетворяющее условиям Каратеодори, т.е.:

(I_1) для любых $x \in R^n, u \in R^p$ отображение $f_{x,u} = f(\cdot,x,u):[0,1] \to R^n$ является измеримым;

(I_2) для почти всех $t \in [0,1]$ отображение $f_t = f(t,\cdot,\cdot): R^n \times R^p \to R^n$ является непрерывным;

(I_3) существуют такие суммируемые функции $\alpha, \beta:[0,1] \to R^1$, что для любых $x \in R^n, u \in R^p$ и почти всех $t \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$\|f(t,x,u)\| \le \alpha(t)(\|x\| + \|u\|) + \beta(t);$$

(I_4) отображение $f_{t,x} = f(t,x,\cdot): R^p \to R^n$ аффино.

Пусть заданы линейные непрерывные функционалы $l_i : C_{[0,1]} \to R^1$, $i = 1,...,k$, причем $0 \le k < n$. Рассмотрим линейный оператор $l : C_{[0,1]} \to R^k$ определенный соотношением, $l(x) = (l_1(x),...,l_k(x))$.

Будем считать пространство R^n вложенным в пространство $C_{[0,1]}$, т.е. точке $x_0 \in R^n$ сопоставим постоянное отображение $x^0(t) = x_0$. Будем предполагать, что отображение l удовлетворяет следующему условию:

(I_5) отображение $l|_{R^n} : R^n \subset C_{[0,1]} \to R^k$ является сюръективным оператором.

Пусть $U : C_{[0,1]} \to Kv(L^\infty_{[0,1]})$ — вполне непрерывное многозначное отображение (например многозначный интегральный оператор).

Рассмотрим следующую задачу:

$$x' = f(t,x,u), \qquad (*)$$

$$u(t) \in U(x)(t),\ t \in [0,1], \qquad (**)$$

$$l_i(x(\cdot)) = 0,\ i = 1,...,k; \qquad (***)$$

Таким образом, нас интересуют решения уравнения (*), имеющих множество допустимых управлений (**) и удовлетворяющие фазовым ограничениям (***).

Пусть $D \subset L^1_{[0,1]}$ — множество абсолютно непрерывных функций определенных на отрезке $[a,b]$. Пусть $d : D \to L^1_{[0,1]}$ — оператор дифференцирования. Тогда определен линейный оператор $\hat{d} = d \times l : D \subset L^1_{[0,1]} \to L^1_{[0,1]} \times R^k$, $\hat{d}(x)(t) = (x'(t), l(x))$.

Нетрудно доказать следующую лемму.

4.2. Лемма. *Если выполнено условие (I_5), то линейный оператор $\hat{d}$ является замкнутым сюръективным оператором и* $\dim(Ker(d)) = n - k$.

В силу условий (I_1)—(I_3), определен оператор суперпозиции $f_0 : C_{[0,1]} \times L^\infty_{[0,1]} \to L^1_{[0,1]}$, действующий по правилу, $f_0(x,u)(t) = f(t,x(t),u(t))$.

Рассмотрим отображение $\hat{f} : C_{[0,1]} \times L^\infty_{[0,1]} \to L^1_{[0,1]} \times R^k$ определенное условием, $\hat{f}(x,u) = (f_0(x,u), 0)$.

Очевидно, что задача (*)—(***) эквивалентна следующей задаче:

$$\hat{d}(x) = \hat{f}(x,u), \qquad (a)$$

$$u \in U(x), \qquad (b)$$

причем отображение $F(x) = f(x, U(x))$ является $\hat{d}$-вполне непрерывным многозначным отображением. Следовательно, к задаче (a)—(b) может быть применена теорема 4.1. и получены результаты о существовании и размерности решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров П.С.,Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. М: Наука, 1973.

2. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 1. С. 59—126.

3. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986.

4. *Гельман Б.Д.* Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений // Математ. сборник, т. 188, № 12, 1997, С. 33—56.

5. *Гельман Б.Д.* О топологической размерности множества решений операторных включений, содер-

жащих сюръективные операторы // Вестник ВГУ, серия физика, математика, 2001, № 1, С. 75—80.

6. *Гельман Б.Д.* Об одном классе операторных уравнений // Матем. заметки, 2001, Т.70, В.4, С. 544—552.

7. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. М: Иностранная литература, 1948.

8. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М: Наука, 1974.

9. *Кантарович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М: Наука, 1977.

10. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М: Наука, 1971.

11. *Augustynovicz A., Dzedzej Z., Gelman B.D.* The solutions set to BVP for some functional differential inclusions // Set-Valued Analisis, № 6, 1998, P. 257—263.

12. *Bader R., Gel'man B.D., Kamenskii M., Obukhovskii V.* On the topological dimension of the solutions sets for some classes of operator and differential inclusions // Discusiones Math. Differential Inclusions, Control and Optimization, 2002, M. 22, P. 17—32.

13. *Dzedzej Z., Gelman B.D.* Dimension of solution set for differential inclusions // Demonstratio Math. 1993. M. 26, № 1. P. 149—158.

14. *Fitzpatrick P.M., Massabo I., Pejsachowicz I.* On the covering dimension of the set of solutions of some nonlinear equations // Trans. of the American Math. Society, 1986, M. 296, № 2, . 777—798.

15. *Gel'man B.D.* On topological dimension of a set of solutions of functional inclusions // Differential Inclusions and Optimal Control, Lecture Notes in Nonlinear Analysis, M.2 , 1998, P. 163—178.

16. *Saint Raymond J.* Points fixes des multiapplications a valeurs convexes // C. R. Acad. Sci., Paris. 1984. M. 298. P. 71—74.

17. *Ricceri B.* On the topological dimension of the solution set of a class of nonlinear equations // C.R. Acad. Sci., Paris, 1997. M.325, P. 65—70.

18. *Michael E.* Continuous selections, 1 // Ann. of Math., 1956, V. 63, № 2, P. 361—382.