УДК 514

О КОЭФФИЦИЕНТНОМ ПОДХОДЕ К АФФИННОЙ ОДНОРОДНОСТИ*

О. А. Болдырева, А. В. Лобода

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
Воронежский государственный университет

В статье устанавливаются соответствия между двумя способами описания (посредством явных и канонических уравнений) аффинно-однородных поверхностей 3-мерного вещественного пространства. Множество канонических параметров, описывающих семейство строго выпуклых поверхностей, разбивается на подмножества. Каждому такому подмножеству сопоставлен свой тип явного уравнения однородной поверхности. Промежуточным звеном в установленных соответствиях является описание однородных поверхностей в терминах матричных алгебр Ли. Интегрирование этих алгебр связано с большим количеством случаев и является ключевым моментом в получении результатов статьи.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе устанавливаются полные соответствия между двумя способами описания аффинно-однородных строго выпуклых поверхностей пространства $\mathbb{R}^3$. Имеются в виду задание их явными (см. [1]) и каноническими (нормальными) уравнениями (см. [2]).

Отметим, что процедура нормализации явного уравнения отдельной поверхности (см., например, [2] или [3]) вполне прозрачна. Но проследить за изменением уравнений большого семейства поверхностей, зависящего от нескольких параметров, оказывается чрезвычайно сложно. По этой причине в работе [2] соответствия явных и канонических уравнений иллюстрируются лишь на отдельных примерах однородных поверхностей.

При установлении полных соответствий между двумя названными способами естественно использовать еще один подход, связанный с алгебрами Ли. Именно интегрирование таких алгебр, распадающееся на большое количество случаев, является связующим звеном между явными и каноническими уравнениями однородных поверхностей. Основным результатом данной работы можно считать в связи со сказанным построение «трехстороннего словаря» аффинно-однородных строго выпуклых поверхностей пространства $\mathbb{R}^3$.

Укажем еще, что решаемая авторами задача тесно связана с изучением однородности в многомерных комплексных пространствах ([4], [5]).

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 03-01-96493(р) и 05-01-00630).

1. НОРМАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Мы рассматриваем только *строго выпуклые аналитические* поверхности пространства $\mathbb{R}^3$. Заметим, что с точностью до аффинной эквивалентности имеется три строго выпуклых однородных поверхности второго порядка: эллипсоид, эллиптический параболоид, двухполостный гиперболоид.

Все остальные строго выпуклые аффинно-однородные поверхности имеют ненулевой инвариант Пика ([6]), и, согласно [2], уравнение любой из них можно привести (локально) к виду:

$$z = x^2 + y^2 + (x^3 - 3xy^2) + \\ +(h_{40}x^4 + h_{31}x^3y + h_{22}x^2y^2 + h_{13}xy^3 + h_{04}y^4) + \dots \quad (1)$$

На каждой из поверхностей вида (1) имеется двумерная алгебра Ли линейных векторных полей. В силу результатов работ [2], [3] каждая однородная поверхность вида (1) (так же, как и соответствующая ей алгебра) однозначно определяется набором коэффициентов 4-го порядка

$$(h_{40}, h_{31}, h_{22}, h_{13}, h_{04}) \quad (2)$$

уравнения (1). При этом допустимы лишь 4 типа наборов. Это:

$$(p, 8q, 6p, 0, -3p), (p,q) \in \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

$$\left(-\frac{1}{36}(4b+9)(4b+27), 0, -\frac{1}{18}(16b^2+144b+81), 0, -\frac{1}{36}(4b+9)(4b-9)\right), \quad (4)$$
$$b \in \mathbb{R};$$

$$\left(\frac{1}{4}(16b-27), 0, -\frac{9}{2}, 0, \frac{9}{4}\right), b \in \mathbb{R}; \quad (5)$$

$$\left(\frac{9}{8}(1+\cos\theta), -\frac{9}{2}\sin\theta, \frac{9}{4}(1-3\cos\theta), \right. \quad (6)$$
$$\left. \frac{9}{2}\sin\theta, \frac{9}{8}(1+\cos\theta), \right) \theta \in [0, 2\pi),$$

обозначенные в [2] соответственно через E1, E2, E3, E4.

2. МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ

Различные наборы параметров (3)—(6) могут порождать аффинно эквивалентные однородные поверхности. Например, в случае E4 множеством единственности является промежуток $0 \le \theta \le \pi/3$. Аналогично можно сузить семейство поверхностей, связанных с наборами вида E1.

Обозначим через D_0 угол (открытый) раствора $\pi/3$ с центром в начале координат, примыкающий сверху к «полярной» оси $\{q = 0\ (p > 0)\}$ плоскости $\mathbb{R}^2_{(p,q)}$. Из [2] следует, что *множеством единственности* в плоскости $\mathbb{R}^2_{(p,q)}$ можно считать объединение $D = D_0 \cup \{q = 0\}$.

В плоскости $\mathbb{R}^2_{(p,q)}$ выделим еще две замкнутые линии: кривую Штейнера γ и вписанную в нее окружность S:

$$\gamma = \{(16(q^2 + p^2 + 9p) + 81)^2 = 12(8p + 9)^3\}, \quad (7)$$

$$S = \{16(p^2 + q^2) = 9\}. \quad (8)$$

Внутренность и внешность кривой γ обозначим через V и W соответственно. Пересечения множеств V, W, γ, S с областью единственности D_0 обозначим через V_0, W_0, γ_0, S_0 соответственно.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ИЗ СЕМЕЙСТВ E1—E4

ТЕОРЕМА 1. *Однородные выпуклые поверхности семейства E1, соответствующие точкам множества единственности D, задаются (с точностью до аффинных преобразований) следующими уравнениями (α и β — некоторые вещественные параметры):*

$$V_0 \setminus S : z = x^\alpha y^\beta; \quad (9)$$

$$W_0 : z = (x^2 + y^2)^\alpha e^{\beta \operatorname{arctg}(y/x)}; \quad (10)$$

$$S_0 : z = \alpha \ln x + \ln y; \quad (11)$$

$$\gamma_0 : z = x(\alpha \ln x + \ln y); \quad (12)$$

точкам оси $q = 0$ соответствуют поверхности:

$$\{p < -3/4\} \cup \{p > 9/4\} : z = (x^2 + y^2)^\alpha,$$
$$\alpha = (4p - 3)/(4p + 3);$$
$$\{-3/4 < p < 3/4\} \cup \{3/4 < p < 9/4\} :$$
$$z = x^\alpha y^\alpha, \alpha = (4p - 3)/(4p + 3);$$
$$p = -3/4 : z = y^2 - \ln x; \quad (13)$$
$$p = 3/4 : z = \ln x + \ln y;$$
$$p = 9/4 : zx = y^2 + x^2 \ln x. \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 2. *Однородные выпуклые поверхности из семейств E2, E3, E4 задаются (с точностью до аффинных преобразований) следующими уравнениями :*

I. поверхности семейства E2 $(-\infty < b < \infty)$:

$$b = 0 : z = y^2 + e^x; \quad (15)$$

$$b = -9 : xz = y^2 - x \ln x; \quad (16)$$

$$b = -9/2 : xz = y^2 + x^2 \ln x;$$

$$b \in (-9, -9/2) : xz = y^2 - x^\mu, (\mu = -9/b); \quad (17)$$

$$b \in (\infty, -9) \cup (-9/2, 0) \cup (0, \infty) : xz = y^2 + x^\mu, \quad (18)$$
$$(\mu = -9/b);$$

II. поверхности семейства E3 $(-\infty < b < \infty)$:

$$b = 0 : z = y^2 + e^x;$$
$$b = 3/2 : z = y^2 - \ln x;$$
$$b = 3 : z = y^2 + x \ln x; \quad (19)$$

$$b \in (-\infty, 0) \cup (0, 3/2) \cup (3, \infty) : z = y^2 + x^\mu, \quad (20)$$
$$(\mu = (2b - 3)/b);$$

$$b \in (3/2, 3) : z = y^2 - x^\mu, (\mu = (2b - 3)/b); \quad (21)$$

III. поверхности семейства E4 $(0 \le \theta \le \pi/3)$:

$$\theta = 0 : z = y^2 - x^{2/3};$$

$$\theta = \pi/3 : xz = y^2 + x^4; \quad (22)$$

$$0 < \theta < \pi/3 : \left(z - xy + \frac{x^3}{3}\right)^2 = \alpha\left(y - \frac{x^2}{2}\right)^3, \quad (23)$$

$$\alpha = \frac{16}{9(\cos\theta - 1)(1 + 2\cos\theta)^2}.$$

Замечание. Точные значения параметров, входящих в уравнения (9)—(23), определяются через параметры канонических уравнений вида (1) посредством достаточно сложных формул (см. примеры и обсуждения в [2]). По этой причине точные области изменения параметров указываются не для всех уравнений (9)—(23). Описание областей изменения параметров (и переменных x, y) можно получить (см. [1],[2]) из требований определенности функций, входящих в уравнения и строгой выпуклости рассматриваемых поверхностей.

4. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Пусть M — произвольная аффинно-однородная поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная каноническим уравнением вида (1). В [2] выписаны явным образом алгебры линейных векторных полей на однородных поверхностях. Любая из таких алгебр g имеют вещественную размерность 2, а базисом ее являются, например, поля

$$Z_1=\left(\frac{4p-3}{2}x-2qy+\frac{9-12p}{4}z+1\right)\frac{\partial}{\partial x}+$$
$$+\left(2qx+\frac{3+4p}{2}y-3qz\right)\frac{\partial}{\partial y}+(2x+4pz)\frac{\partial}{\partial z}$$

и

$$Z_2=\left(-2qx+\frac{3-4p}{2}y-3qz\right)\frac{\partial}{\partial x}+$$
$$+\left(\frac{3+4p}{2}x-2qy+\frac{9+12p}{2}z+1\right)\frac{\partial}{\partial y}+$$
$$+(2y-4qz)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Однородность поверхности $M=\{z=f(x,y)\}$ означает, что для ее определяющей функции $\Phi=-z+f(x,y)$ выполняется система уравнений

$$Z_1(\Phi)=0, Z_2(\Phi)=0. \qquad (24)$$

Пользуясь аффинными преобразованиями координат в пространстве $\mathbb{R}^3$, можно упрощать вид базисных полей Z_1, Z_2 и, соответственно, системы (24), позволяющей описать M явным уравнением. По существу перед интегрированием всех интересующих нас алгебр g мы приводим каждую из них к каноническому виду.

Отметим следующий момент, помогающий реализовать намеченную программу. Упрощать предлагается не всю алгебру g сразу, а лишь один из ее базисных элементов. При этом вид остальных векторных полей семейства g, вообще говоря, существенно изменяется.

В то же время наличие алгебраической структуры в этом семействе позволяет найти в нем второе базисное поле, имеющее также весьма простой вид.

Семейство E1. (Описание получено первым автором статьи, см. [7]).

Для всех точек плоскости $\mathbb{R}^2_{(p,q)}$, за исключением окружности (8), сдвиговые части всех полей из обсуждаемой алгебры Ли уничтожаются. Достигается это простым переносом начала координат и означает линейную однородность обсуждаемых аффинно-однородных поверхностей.

В итоге для поверхностей, отвечающих точкам из $V\setminus S$, можно считать обсуждаемые алгебры векторных полей подалгебрами матричной алгебры $M(3,\mathbb{R})$.

При этом любая алгебра из семейства E1 коммутативна, а ее базис имеет вид

$$P=\begin{pmatrix}(4p-3)/2 & -2q & (9-12p)/4\\ 2q & (3+4p)/2 & -3q\\ 2 & 0 & 4p\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix}-2q & (3-4p)/2 & -3q\\ (3+4p)/2 & -2q & (9+12p)/2\\ 0 & 2 & -4q\end{pmatrix},$$

где (p,q) — параметры аффинно-нормального уравнения из набора (3).

Переход к каноническому виду изучаемых алгебр свяжем с жордановой формой одной из ее базисных матриц. Например, первая из них, т.е. P, имеет простой вещественный спектр внутри кривой γ. В точках множества W_0 у P имеются одно вещественное и два комплексно-сопряженных собственных значения. Кратные собственные значения матрица P допускает лишь в точках плоскости $\mathbb{R}^2_{(p,q)}$, лежащих на оси $q=0$ и на кривой (7).

Тогда за счет перехода к жордановым базисам получаем в качестве основных случаев матрицу $P^*=CPC^{-1}$ одного из следующих видов:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ -1 & a & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

В каждом из упомянутых случаев справедливо свое утверждение о нормальной форме соответствующей алгебры. Например, несложно доказываются два следующих факта.

Предложение 1. *Коммутативная 2-мерная алгебра Ли $g\subset M(3,\mathbb{R})$, содержащая диагональную матрицу с простым спектром, сама является диагональной.*

Предложение 2. *Пусть g — коммутативная 2-мерная подалгебра Ли алгебры $M(3,R)$. Если g содержит матрицу вида* $\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ -1 & a & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$

или $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, (\lambda_1 \neq \lambda_3)$, *то в* g *найдется также ненулевая матрица вида* $\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

Решение систем (24) с более простыми базисными матрицами P^*, Q^* алгебры $g^* = CgC^{-1}$ позволяет получить все утверждения теоремы 1.

Семейства E2—E4. Здесь в алгебрах векторных полей сдвиговые компоненты существенны (так же, как и на окружности S из случая E1), а сами алгебры некоммутативны. По этим причинам при их интегрировании используется специфика каждого отдельного случая.

Изучаемые алгебры векторных полей и здесь можно представлять в матричной форме. Для этого зададим базисные поля Z_1, Z_2 расширенными матрицами $(P|\alpha), (Q|\beta)$, где P, Q — квадратные матрицы третьего порядка, описывающие «вращательные» части полей, а $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ — соответствующие полям векторы сдвиговых компонент.

Согласно [2] базисные поля из случаев E2—E4, можно записать в предлагаемых обозначениях следующим образом (параметры b и θ в приводимых формулах удовлетворяют ограничениям, обсуждавшимся выше):

1) сдвиговые компоненты $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ одинаковы для всех алгебр;

2) пары матриц P, Q имеют специфическую структуру:

$$E2: P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & (9+4b)(27+4b)/18 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & (9+4b)/3 & 0 \\ -4b/3 & 0 & 2b(9+4b)/9 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E3: P = \begin{pmatrix} 3-4b & 0 & (27-12b)/2 \\ 0 & 6-4b & 0 \\ 2 & 0 & 9-8b \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$E4: P = \begin{pmatrix} -3(1+3\cos\theta)/2 & (3\sin\theta)/2 & 0 \\ -(3\sin\theta)/2 & 3(1-3\cos\theta)/2 & 0 \\ 2 & 0 & -9\cos\theta \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} (9\sin\theta)/2 & 3(1+3\cos\theta)/2 & 0 \\ 3(1-3\cos\theta)/2 & (9\sin\theta)/2 & 0 \\ 0 & 2 & 9\sin\theta \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Во всех случаях E2—E4 приведения к каноническому виду соответствующих алгебр опираются на следующее известное (см., например, [1]) утверждение

Предложение 3. *При замене координат*

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

с матрицей $M \in GL(3,\mathbb{R})$ *для матрицы* $(P|\alpha)$ *коэфициентов линейного векторного поля справедливы формулы*

$$P^* = MPM^{-1}, \alpha^* = M\alpha.$$

Используя в качестве M матрицу, приводящую P (или Q) к жордановой нормальной форме, можно значительно упростить одно из двух дифференциальных уравнений (24), определяющих однородную поверхность.

Кратко прокомментируем детали подобных упрощений лишь в случае E4. Здесь параметр θ удовлетворяет ограничению $\theta \in [0, \pi/3]$. При этом алгебра, отвечающая случаю $\theta = 0$, совпадает со случаем $b = 9/4$ семейства E3.

Для остальных θ наборы собственных значений матриц P и Q оказываются пропорциональными друг другу. Используя это наблюдение, систему уравнений в частных производных, задающую однородную поверхность из семейства E4, удается свести (см. [8]) к виду

$$\nu \frac{\partial z}{\partial x} + 3x \frac{\partial z}{\partial y} = Ay, \quad (28)$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 3z$$

с некоторыми константами A, ν.

Решение второго уравнения этой системы можно выразить через первые интегралы соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Подстановка полученных формул в первое уравнение системы (25) приводит к требуемым пунктам теоремы 2.

Замечание. Укажем на относящееся к случаю E4 интересное семейство (23) аффинно-однородных поверхностей, задаваемых *алгебраическими* уравнениями 6-й степени. Из описания параметра α, входящего в формулу (23), вытекает ограничение $\alpha < -8/9$, тогда как в работе [1] никаких ограничений на этот параметр нет. Дело в том, что при «малых» α поверхности, заданные такими уравнениями, содержат как строго выпуклые, так и седловидные компоненты. При значениях же α, больших, чем $-8/9$, точки выпуклости исчезают, хотя сохраняется свойство однородности поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M.* Homogeneous surfaces in the 3-dimensional affine geometry // Prepr. Ser. Pure Math./Inst. Math. Univ. Oslo. 1995. № 4. P. 1—26.

2. *Eastwood M., Ezhov V.V.* On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space // Geom Dedicata, 1999, V. 77, P. 11—69.

3. *Гузеев Р.Н., Лобода А.В.* О нормальных уравнениях аффинно-однородных выпуклых поверхностей пространства $\mathbb{R}^3$ // Известия ВУЗ-ов, Серия Математика. 2001, № 3, С. 25—32.

4. *Лобода А.В.* Локальное описание однородных вещественных гиперповерхностей двумерного комплексного пространства в терминах их нормальных уравнений // Функц. анализ, 2000, Т. 34. В.2, С. 33—42.

5. *Лобода А.В., Ходарев А.С.* Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства // Известия ВУЗов, Серия Математика. 2003, № 10. С. 38—50.

6. *Широков А.П., Широков П.А.* Аффинная дифференциальная геометрия. М. Физматгиз, 1959, 319 с.

7. *Болдырева О.А.* О коэффициентном подходе к описанию однородных гиперповерхностей 3-мерного пространства // Труды 1-го Международного форума молодых ученых (Математика). Самара, 12—15 сентября 2005. С. 23—25.

8. *Бражникова И.Н., Петров С.Ю., Шелиспанский К.С., Лобода А.В.* Решение одной системы уравнений с частными производными // Труды 1-го Международного форума молодых ученых (Математика). Самара, 12—15 сентября 2005. С. 25—28.