МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.3

ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСЫ И МАТРИЧНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРОВ*

Т. В. Азарнова, Е. Б. Грибанов

Воронежский государственный университет

В статье рассматривается матричное представление линейных ограниченных операторов относительно вейвлет-базисов. Выделяются классы операторов с разреженными матрицами. Для данных классов получены конкретные оценки элементов обратных матриц.

При изучении различных систем (физических, экономических и т.д.) одной из форм представления информации, описывающей различные аспекты функционирования системы

$$\text{вход} \rightarrow \boxed{A} \rightarrow \text{выход}$$

являются матрицы (M, K — индексные множества). Как правило, матрицы соответствуют некоторому линейному оператору $A: X \to Y$, где X — пространство входов, а Y — пространство выходов. Они представляют собой удобное средство как для теоретических исследований, так и для практической обработки информации на ЭВМ. В зависимости от постановки задачи и от выбора индексных множеств матричным элементам $a_{ij}, i \in M, j \in K$ придается определенный смысл, играющий существенную теоретическую и практическую роль. В общем случае индексные множества связаны с базисами в пространствах входов и выходов или с соответствующими семействами проекторов. Матрица, представляющая некоторую информацию, при определенном выборе индексных множеств M и K может иметь разреженную структуру.

Обратный процесс

$$\text{вход} \rightarrow \boxed{A^{-1}} \rightarrow \text{выход}$$

описывают обратные матрицы (при условии их существования). Оценка элементов обратных к матрицам с заданной структурой разреженности является одной из актуальных задач теории операторов, поскольку обратные к конечным матрицам очень большой размерности и бесконечным матрицам практически невозможно получить аналитически.

При исследовании операторов, действующих в функциональном пространстве $L_2(R)$, интерес представляют матрицы, построенные относительно вейвлет-базисов этого пространства. Существуют различные определения вейвлетов [3, 4, 6]. Мы под вейвлетом будем понимать функцию из $L_2(R)$, удовлетворяющую следующим требованиям:

1. Вейвлет должен быть «достаточно хорошо» локализован во времени. Как правило, в зависимости от поставленной задачи, в качестве вейвлета используют функции с компактным носителем или с экспоненциальным спадом на бесконечности.

2. Множество двоичных сжатий и целочисленных сдвигов функции-вейвлета $\{\psi_{jk}(t) \in L_2(R): \psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k); j,k \in Z\}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(R)$. При этом $\psi(t)$ называют материнским вейвлетом.

3. Вейвлет $\psi(t)$ должен удовлетворять так называемому условию знакопеременности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0.$$

Вейвлеты наряду с преобразованием Фурье находят применение во многих приложениях, например, в анализе сигналов. Преобразование Фурье не всегда удобно для решения практических задач. Во-первых, чтобы извлечь спектральную информацию $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}dt$ об аналоговом сигнале $f(t)$, следует использовать бесконечные интервалы времени, то есть иметь информацию о прошлом и будущем сигнала. Во-вторых, преобразование Фурье не отражает эволюцию частот со временем и не дает возможности определить интервалы времени, в которых заложена спектральная информация о любой нужной частотной области (диапазоне частот). Частота сигнала обратно пропорциональна длительности его периода, поэтому в случае

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 04-01-00141

высокочастотной спектральной информации временной интервал может быть взят относительно малым для обеспечения нужной точности, а в случае низкочастотной спектральной информации такой интервал должен быть взят относительно большим. Интегральное вейвлет-преобразование

$$W_\psi f(j,k) = 2^{j/2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\psi(2^j t - k)}dt,$$

определяющее разложение функции по вейвлет-базису, предоставляет гибкое частотно-временное окно, которое автоматически сжимается в окрестности высоких частотных центров и расширяется у низких.

Рассмотрим матричное представление операторов относительно вейвлет-базисов. Индексные множества $M = Z\times Z$ и $K = Z\times Z$ соответствуют целочисленным сдвигам и сжатиям $\{\psi_{jk}(t)\in L_2(R) : \psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k); j,k\in Z\}$ выбранного материнского вейвлета $\psi(t)$.

По вейвлет-базису вводится в рассмотрение дизъюнктная система проекторов $P = \{P_k : P_k f = \langle f,\psi_k\rangle\psi_k, k\in Z\times Z\}\subset End\ L_2(R)$. Символ $\mathrm{End}\, L_2(R)$ означает банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих из $L_2(R)$ в $L_2(R)$. Так введенная система проекторов обладает следующими тремя свойствами:

1. Ряд $\sum\limits_{k\in Z\times Z} P_k f$ безусловно сходится к f для $\forall f$ из $L_2(R)$.

2. $\sup\limits_{\alpha_k\in C, |\alpha_k|=1}\left\|\sum\limits_{k\in Z\times Z}\alpha_k P_k\right\| = 1.$

3. Для любых конечных подмножеств $\sigma_1,\sigma_2,\delta_1,\delta_2$ множества $Z\times Z$ со свойством $\sigma_1\cap\sigma_2 = \varnothing$, $\delta_1\cap\delta_2 = \varnothing$ и любого линейного ограниченного оператора A, действующего в $L_2(R)$, имеет место равенство:

$$\|P(\sigma_1)AP(\delta_1) + P(\sigma_2)AP(\delta_2)\| =$$
$$= \max\{\|P(\sigma_1)AP(\delta_1)\|, \|P(\sigma_2)AP(\delta_2)\|\}.$$

Под символом $P(\sigma)$ понимается сумма $\sum\limits_{k\in\sigma} P_k, \forall\sigma\subset Z\times Z.$

Каждому оператору $A\in\mathrm{End}\, L_2(R)$ ставится в соответствие матрица $A = (A_{ij})$, составленная из операторных блоков $A_{ij} = P_i A P_j$. В работе [1] показано, что если система проекторов обладает свойствами (1) — (3), то для любого линейного ограниченного оператора A ряд $\sum\limits_{i-j=k} A_{ij}$ сильно и безусловно сходится к некоторому оператору A_k, который соответствует k-й диагонали матрицы A. Норма оператора A_k определяется как

$$\|A_k\| = \sup_{i-j=k}\|A_{ij}\| \le \|A\|.$$

Оператор A может быть представлен в виде суммируемого по Чезаре ряда $A = \sum\limits_{k\in Z\times Z} A_k$, составленного из диагональных операторов.

Операторные блоки A_{ij} действуют следующим образом:

$$A_{ij} f(t) = \langle f,\psi_j\rangle\langle A\psi_j,\psi_i\rangle\psi_i(t),$$
$$\forall f(t)\in L_2(R), i,j\in Z\times Z.$$

Чтобы проинтерпретировать действие каждого операторного блока на функции, проведем некоторые предварительные рассуждения.

Тождественно не равную нулю функцию $\omega\in L_2(R)$ будем называть функцией-окном, если $t\omega$ также принадлежит $L_2(R)$. Центр t^* и радиус Δ_ω функции-окна определяются как

$$t^* = \frac{1}{\|\omega\|_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty} t|\omega(t)|^2\, dt,$$

$$\Delta_\omega = \frac{1}{\|\omega\|_2}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}(t - t^*)^2|\omega(t)|^2\, dt}.$$

Предположим, что $\psi(t)\in L_2(R)$ — материнский вейвлет такой, что и $\psi(t)$ и его преобразование Фурье $\hat\psi(\xi)$ являются функциями-окнами с центрами и радиусами $t^*,\xi^*,\Delta_\psi,\Delta_{\hat\psi}$ соответственно. Тогда вейвлет-коэффициенты $d_{jk} = \left\langle f,\psi_{jk}\right\rangle = 2^{j/2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\psi(2^j t - k)}dt$ локализуют сигнал на временном отрезке $[2^{-j}k + 2^{-j}t^* - 2^{-j}\Delta_\psi, 2^{-j}k + 2^{-j}t^* + 2^{-j}\Delta_\psi]$ [6]. В анализе сигналов это носит название временной локализации.

С другой стороны, воспользовавшись равенством Парсеваля $\left\langle f,g\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle f,g\right\rangle$, получим, что те же самые величины d_{jk} дают локализованную информацию о спектре $\hat f(\xi)$ сигнала $f(t)$ с частотным окном $[2^j\xi^* - 2^j\Delta_{\hat\psi}, 2^j\xi^* + 2^j\Delta_{\hat\psi}]$. Это называется частотной локализацией сигнала. В результате приходим к понятию частотно-временного окна

$$[2^{-j}k + 2^{-j}t^* - 2^{-j}\Delta_\psi, 2^{-j}k + 2^{-j}t^* + 2^{-j}\Delta_\psi]\times$$
$$\times[2^j\xi^* - 2^j\Delta_{\hat\psi}, 2^j\xi^* + 2^j\Delta_{\hat\psi}]$$

для частотно-временного анализа сигналов, в котором используются вейвлет-коэффициенты относительно материнского вейвлета $\psi(t)$ с описанными выше свойствами функций-окон. Если величины $\xi^*, \Delta_\psi, \Delta_{\hat\psi}$ удовлетворяют соотношениям

$$\xi^* = 3\Delta_{\hat\psi},$$

$$\xi^* > 0,$$

$$\Delta_\psi = \frac{1}{2},$$

то рассматриваемые частотно-временные окна образуют несвязное разбиение частотно-временной области $D=\{(t,\xi): t\in R, \xi\in R_+\}$ описанными выше прямоугольниками.

В терминах частотно-временного анализа операторный блок $A_{(j_1,k_1)(j_2,k_2)}$ отражает вклад из частотно-временного окна входного сигнала $f(t)$ с параметрами (j_1,k_1) в частотно-временное окно (j_2,k_2) выхода $Af(t)$.

В данной работе будет исследоваться структура обратных матриц для нескольких классов линейных ограниченных операторов, матрицы которых имеют специальную структуру разреженности в вейвлет-базисе.

Введем функцию $d_A: Z\times Z\to R$,

$$d_A(k) = \|A_k\| = \sup_{i-j=k}\|A_{ij}\|.$$

Используя эту функцию, выделим следующие классы операторов:

1. $\mathrm{End}_1 L_2(R) = \left\{A\in \mathrm{End}\, L_2(R): \sum_{k\in Z\times Z} d_A(k) < \infty\right\}.$

2. $\mathrm{End}_\gamma\, L_2(R) = \{A\in\mathrm{End}\, L_2(R): d_A(k)\le$ $\le M_A\gamma_1^{|k_1|}\gamma_2^{|k_2|}$ для некоторых $M_A = M(A)$, $\gamma_i=\gamma_i(A), \gamma_i\in(0,1)\}$.

3. $\mathrm{End}_0\, L_2(R) = \{A\in\mathrm{End}\, L_2(R): d_A(k)=0$ для $k\ne -e, k\le -e, k\ne e, k\ge e\}$, где $e=(1,1)$, а запись $k\ge e$ эквивалентна системе неравенств

$$\begin{cases} k_1\ge 1\\ k_2\ge 1.\end{cases}$$

Аналогично определяется отношение $\le$.

В подпространстве $\mathrm{End}_1 L_2(R)$ вводится норма: $\|A\|_1 = \sum_{k\in Z\times Z} d_A(k)$.

Известно, что пространства $\mathrm{End}_1 L_2(R)$ и $\mathrm{End}_\gamma\, L_2(R)$ замкнуты относительно операции умножения операторов, то есть являются подалгебрами алгебры $\mathrm{End}\, L_2(R)$.

Утверждение 1. Если оператор А принадлежит $\mathrm{End}_0 L_2(R)$ и обратим, то обратный оператор A^{-1} принадлежит подалгебре $\mathrm{End}_\gamma L_2(R)$ при некотором $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in(0,1)\times(0,1)$ с $\gamma_i = \sqrt{1-\frac{1}{1+8K_A}}$ и имеет место оценка

$$\|A^{-1}\|_1 \le 2\|A^{-1}\|\left(\sqrt{8K_A}+\sqrt{1+8K_A}\right)^4,$$

где $K_A = \|A\|\|A^{-1}\|$ — число обусловленности оператора A.

Доказательство

Рассмотрим построенную по оператору A операторозначную функцию $\Phi_A:\Pi^2\to$ $\to \mathrm{End}\, L_2(R)$

$$\Phi_A(\Theta) = P(\Theta)AP(\Theta^{-1}),$$

где $\Pi^2=\{z=(z_1,z_2)\in C^2: |z_1|=|z_2|=1\}$ и $P(\Theta)=$ $=\sum_{j\in Z\times Z} P_j\Theta^j$. Так как оператор $A\in\mathrm{End}_0 L_2(R)$, то функция $\Phi_A(\Theta)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, коэффициенты которого удовлетворяют соотношению $\|A_k\| = d_A(k) = 0$ для $k\le -e, k\ne -e$ и $k\ge e, k\ne e$. Данная функция допускает аналитическое расширение на множество $M=\{(z_1,z_2)\in C^2: z_1z_2\ne 0\}$.

Для каждого $\Theta\in\Pi^2$ оператор $\Phi_A(\Theta)$ обратим, причем обратный имеет вид $P(\Theta)A^{-1}P(\Theta^{-1}) =$ $=\Phi_{A^{-1}}(\Theta)$. Аналитичность функции $\Phi_A: M\to$ $\to\mathrm{End}\, L_2(R)$ и свойство обратимости операторов при малых возмущениях позволяют найти некоторую окрестность Π^2 в виде произведения колец $K=\{z\in C^2: \rho_i<|z_i|<\frac{1}{\rho_i}, \rho_i<1, i=1,2\}$, в точках которого операторы $\Phi_A(z)$ обратимы. Для нахождения такой области воспользуемся известным из функционального анализа фактом, что оператор $\Phi_A(z)$ будет обратим при $z\in C^2$, для которых существует $\Theta\in\Pi^2$ такое, что имеет место оценка $\|[\Phi_A(z)-\Phi_A(\Theta)][\Phi_A(\Theta)]^{-1}\|<1$. Совокупность $z\in C^2$, удовлетворяющие такой оценке определяется из неравенств

$$\|\Phi_A(z)-\Phi_A(\Theta)\| < \frac{1}{\|\Phi_A^{-1}(\Theta)\|},$$

$$\|\Phi_A(z)-\Phi_A(\Theta)\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

$$\|\Phi_A(z)-\Phi_A(\Theta)\| = \left\|\sum_{k\in Z\times Z} A_k z^k - \sum_{k\in Z\times Z} A_k\Theta^k\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{k\in Z\times Z} A_k(z^k-\Theta^k)\right\| \le\le \sum_{k\in Z\times Z}\|A_k\||(z^k-\Theta^k)|,$$

$$z^k = z_1^{k_1}z_2^{k_2}, \Theta^k = \Theta_1^{k_1}\Theta_2^{k_2}.$$

Мы ищем окрестность в виде произведения колец, а значит z_i можно представить в виде $z_i = |z_i|\Theta_i$ $(i = 1,2)$.

$$\sum_{k\in Z\times Z}\|A_k\|\,|(z^k-\Theta^k)| = \sum_{k\in Z\times Z}\|A_k\|\left||z_1^{k_1}||z_2^{k_2}|-1\right| \le$$

$$\le \|A\|\left(\left||z_1||z_2|-\frac{1}{|z_1||z_2|}\right|+\left||z_1|-\frac{1}{|z_1|}\right|+\right.$$

$$\left.+\left||z_2|-\frac{1}{|z_2|}\right|+\left|\frac{|z_1|}{|z_2|}-\frac{|z_2|}{|z_1|}\right|\right)\le 4\|A\|\left(Z^2-\frac{1}{Z^2}\right)<\frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

$$Z<\sqrt{\frac{1+\sqrt{64K_A^2+1}}{8K_A}}.$$

где $Z=\max\left\{|z_1|,|z_2|,\frac{1}{|z_1|},\frac{1}{|z_2|}\right\}\ge 1$. В частности, это неравенство будет выполнено, если

$$\sqrt{1-\frac{1}{8K_A+1}}\le z_i\le\sqrt{1+\frac{1}{8K_A}}.$$

Таким образом, искомая область K принимает вид

$$K=\left\{z=(z_1,z_2)\in C^2:\rho_i<|z_i|<\right.$$

$$\left.<\frac{1}{\rho_i},\frac{1}{\rho_i}\le\sqrt{1+\frac{1}{8K_A}},i=1,2\right\}.$$

В области K функция $\Phi_{A^{-1}}(z)=\Phi_A^{-1}(z)$ аналитична, а значит, может быть представлена в K в виде ряда Лорана $\Phi_{A^{-1}}(z)=\sum\limits_{k\in Z\times Z}B_kz^k$, где коэффициенты B_k вычисляются по формуле

$$B_k=-\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\Gamma}\frac{\|\Phi_{A^{-1}}(\xi)\|}{\xi^{k+1}}d\xi,$$

интегрирование ведется по произведению окружностей $\Gamma=\{z=(z_1,z_2)\in C^2:|z_i|=r_i,\rho_i<r_i<1/\rho_i,$ $i=1,2\}$ [5]. Нормы коэффициентов B_k удовлетворяют следующим оценкам:

$$\|B_k\|\le\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\Gamma}\frac{\|\Phi_{A^{-1}}(\xi)\|}{|\xi^{k+1}|}d\xi,k\in Z\times Z,$$

$$\|B_k\|\le 2\|A^{-1}\|\rho_1^{|k_1|}\rho_2^{|k_2|},$$

где $\rho_i=\sqrt{1-\frac{1}{8K_A}}$.

Для сужения функции $\Phi_{A^{-1}}(z)$ на произведение окружностей Π^2 ряд Лорана совпадает с рядом Фурье:

$$\Phi_{A^{-1}}(\Theta)=\sum_{k\in Z\times Z}B_k\Theta^k,$$

и в частности, ряд Фурье для оператора A^{-1} имеет вид

$$A^{-1}=\sum_{k\in Z\times Z}B_k.$$

Имеющиеся оценки коэффициентов B_k позволяют утверждать, что данный ряд абсолютно сходится и $d_A(k)=\|B_k\|\le 2\|A^{-1}\|\rho^{|k|}$. Таким образом, оператор A^{-1} принадлежит $\mathrm{End}_\gamma L_2(R)$ с константой $M_{A^{-1}}=2\|A^{-1}\|$ и $\gamma_{A^{-1}}=\rho$.

Для доказательства утверждения осталось получить требуемую оценку для $\|A^{-1}\|_1$. Имеют место следующие соотношения

$$\|A^{-1}\|_1=\sum_{k\in Z\times Z}d_{A^{-1}}(k)\le 2\|A^{-1}\|\sum_{k\in Z\times Z}\rho^{|k|}\le$$

$$\le 2\|A^{-1}\|\frac{(1+\rho_1)(1+\rho_2)}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}=2\|A^{-1}\|\left(\sqrt{8K_A}+\sqrt{1+8K_A}\right)^4.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 2. Если обратимый оператор A принадлежит алгебре $\mathrm{End}_\gamma L_2(R)$ (то есть $d_A(k)\le M_A\gamma^{|k|},k\in Z\times Z$), то обратный оператор $A^{-1}\in\mathrm{End}_{\gamma_{A^{-1}}}L_2(R)$, причем

$$d_{A^{-1}}(k)\le M_{A^{-1}}\gamma_{A^{-1}}^{|k|},$$

$$M_{A^{-1}}=2\|A^{-1}\|,\gamma_{A^{-1}}^{|k|}=\xi_1^{|k_1|}\xi_2^{|k_2|},$$

$$\xi_i=\frac{c\gamma_i}{c-1+\gamma_i},c=\sqrt{1+\frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{8M_A\|A^{-1}\|}}.$$

Доказательство

Доказательство данного утверждения во многом аналогично предыдущему доказательству, поэтому часть пояснений будет опущена. В данном случае функция $\Phi_A(\Theta)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, нормы коэффициентов A_k $(k\in Z\times Z)$ которого допускают оценки $\|A_k\|=d_A(k)\le M_A\gamma^{|k|}=M_A\gamma_1^{|k_1|}\gamma_2^{|k_2|}$.

Данная функция допускает аналитичное расширение на произведение колец $K=\{z=(z_1,z_2)\in C^2:\gamma_i<|z_i|<1/\gamma_i,i=1,2\}$. Оператор $\Phi_A(\Theta)$ обратим для каждого $\Theta\in\Pi^2$ и обратный оператор имеет вид $P(\Theta)A^{-1}P(\Theta^{-1})=$ $=\Phi_{A^{-1}}(\Theta)$. Аналитичность функции $\Phi_A(z)$ в области K и свойство обратимости операторов при малых возмущениях позволяют найти внутри области K область K_1, являющуюся произведением колец $K_1=\{z=(z_1,z_2)\in C^2:\rho_i<$ $<1/\rho_i,i=1,2\}$, в точках которой операторы $\Phi_A(z)$ обратимы. Усилим условие $\|\Phi_A(z)-\Phi_A(\Theta)\|<$ $<1/\|A^{-1}\|$. Искомая область K_1 будет состоять из точек, удовлетворяющих соотношению

$\|\Phi_A(z)-\Phi_A(\Theta)\|\le 1/2\|A^{-1}\|$. Продолжим решение данного неравенства следующим образом

$$\|\Phi_A(z)-\Phi_A(\Theta)\|\le \sum_{k\in Z\times Z}\|A_k\|\|z_1^{k_1}\|\left|z_2^{k_2}\right|-1\Big|\le$$

$$\le 4M_A\sum_{k\in Z_+\times Z_+\cup\{0\}}\gamma_1^{k_1}\gamma_2^{k_2}Z^{k_1}Z^{k_2}-4M_A\sum_{k\in Z_+\times Z_+\cup\{0\}}\gamma_1^{k_1}\gamma_2^{k_2}=$$

$$=4M_A\left(\frac{1}{(1-\gamma_1 Z)(1-\gamma_2 Z)}-\frac{1}{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}\right).$$

Далее воспользуемся обозначениями

$$\alpha_i=\frac{1}{1-\gamma_i Z},$$

$$\beta_i=\frac{1}{1-\gamma_i},i=1,2.$$

В данных обозначениях исследуемое неравенство перепишется в виде:

$$\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2\le\frac{1}{8M_A\|A^{-1}\|},$$

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}-1\le\frac{1}{8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2},$$

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}\le\frac{1}{8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2}+1.$$

В частности, это неравенство выполняется, если

$$1\le\frac{\alpha_i}{\beta_i}\le\sqrt{\frac{1}{8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2}+1},$$

$$\beta_i\le\alpha_i\le\beta_i\sqrt{\frac{1}{8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2}+1},i=1,2.$$

Обозначив через $c=\sqrt{\frac{1}{8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2}+1}$ и учитывая тот факт, что $c>1$, решим неравенства $\beta_i\le\alpha_i\le c\beta_i, i=1,2.$ Левые их части выполняются для любых $Z=\max\{|z_1|,|z_2|,1/|z_1|,1/|z_2|\}\ge 1$ и для любых $\gamma_A=(\gamma_1,\gamma_2)$. Рассмотрим правые части неравенств

$$\alpha_i\le c\beta_i,$$

$$\frac{1}{1-\gamma_i Z}\le\frac{c}{1-\gamma_i},$$

$$\gamma_i Z\le 1-\frac{1-\gamma_i}{c},$$

$$Z\le\frac{c-1+\gamma_i}{c\gamma_i}.$$

Так как $\gamma\in(0,1)\times(0,1)$, то выполняется соотношение

$$1\le\frac{c-1+\gamma_i}{c\gamma_i}\le\frac{1}{\gamma_i},$$

поэтому область K_1 можно записать в виде

$$K_1=\{z=(z_1,z_2)\in C^2:\upsilon_i<|z_i|<$$
$$<1/\upsilon_i, i=1,2\},$$

где

$$\frac{1}{\upsilon_i}=\frac{c-1+\gamma_i}{c\gamma_i}=\frac{1}{\gamma_i}+\frac{\gamma_i-1}{\gamma_i}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2}{8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2+1}}.$$

Проводя относительно коэффициентов Фурье B_k обратного оператора рассуждения, аналогичные изложенным в доказательстве утверждения 1, получим $\|B_k\|\le 2\|A^{-1}\|\upsilon^{|k|}=2\|A^{-1}\|\upsilon_1^{|k_1|}\upsilon_2^{|k_2|}$.

Таким образом, оператор A^{-1} принадлежит алгебре $\mathrm{End}_{\gamma_{A^{-1}}}L_2(R)$, причем $d_{A^{-1}}(k)\le M_{A^{-1}}\gamma_{A^{-1}}^{|k|}$, где $M_{A^{-1}}=2\|A^{-1}\|,\gamma_{A^{-1}}=\upsilon.$

Для завершения доказательства утверждения получим требуемую оценку для $\|A^{-1}\|_1$. Рассмотрим следующие оценки

$$\|A^{-1}\|_1\le\sum_{k\in Z\times Z}d_{A^{-1}}(k)\le 2\|A^{-1}\|\sum_{k\in Z\times Z}\upsilon^{|k|}\le$$
$$\le 2\|A^{-1}\|\frac{(1+\upsilon_1)(1+\upsilon_2)}{(1-\upsilon_1)(1-\upsilon_2)}.$$

$$\frac{1+\upsilon_i}{1-\upsilon_i}=\frac{c-1+\gamma_i+c\gamma_i}{c-1+\gamma_i-c\gamma_i}=$$
$$=\frac{c-1+\gamma_i(1+c)}{(c-1)(1-\gamma_i)}\le\frac{1}{1-\gamma_i}\frac{2c}{c-1}=\frac{1}{1-\gamma_i}\times$$
$$\times\frac{2\sqrt{1+8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2}}{\sqrt{1+8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2}-\sqrt{8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2}}=$$
$$=\frac{2}{1-\gamma_i}\sqrt{1+8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2}\times$$
$$\times\left(\sqrt{1+8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2}+\sqrt{8M_A\|A^{-1}\|\beta_1\beta_2}\right).$$

Окончательно получаем

$$\|A^{-1}\|_1\le\frac{8\|A^{-1}\|}{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}\left(1+\frac{8M_A\|A^{-1}\|}{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{1+\frac{8M_A\|A^{-1}\|}{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}}+\sqrt{\frac{8M_A\|A^{-1}\|}{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}}\right)^2.$$

Утверждение доказано.

Для доказательства замкнутости подалгебры $\mathrm{End}_1 L_2(R)$ относительно операции взятия обратного оператора проведем некоторые предварительные рассуждения. Зафиксируем некоторый вектор $m\in Z_+\times Z_+$, $m=(m_1,m_2)$ и наряду с разложением единицы $P = \{P_j : j \in Z \times Z\}$ рассмотрим последовательность проекторов вида $P_j(m) = \sum_{\underline{l}_j \le l \le \overline{l}_j} P_l$, где $\underline{l}_j = (m_1(j_1 - 1) + 1, m_2(j_2 - 1) + 1)$, $\overline{l}_j = (m_1 j_1, m_2 j_2)$, то есть производится укрупнение разбиения единицы. Можно проверить, что данная последовательность проекторов удовлетворяет всем трем условиям, которые были введены относительно последовательности проекторов P, а значит, оператору A можно поставить в соответствие ряд $\sum_{k \in Z \times Z} A_k(m)$, где операторы $A_k(m)$ допускают представление в виде сильно сходящегося ряда $A_k(m) = \sum_{i-j=k} P_i(m) A P_j(m)$, и $\|A_k(m)\| = \sup_{i-j=k} \|P_i(m) A P_j(m)\| = d_{A,m}(k)$.

Как аналог пространства $\mathrm{End}_1 L_2(R)$ рассмотрим пространство $\mathrm{End}_{1,m} L_2(R)$ с нормой $\|A\|_{1,m} = \sum_{k \in Z \times Z} d_{A,m}(k)$.

В работе [1] показано, что $\mathrm{End}_{1,m} L_2(R) = \mathrm{End}_1 L_2(R)$, причем соответствующие нормы эквивалентны:

$$\frac{\|A\|_1}{4 m_1 m_2} \le \|A\|_{1,m} \le 4\|A\|_1 .$$

Для удобства изложения дальнейшего материала введем в рассмотрение две вспомогательные функции, которые строятся по каждому конкретному оператору $A \in \mathrm{End}_1 L_2(R)$:

$$\varphi_A : Z \times Z \to R_+ \cup \{0\}, \varphi_A(k) = 4 \sum_{\substack{j \in Z \times Z, \\ j \ge k+e, \\ j \le -k-e}} d_A(j);$$

$$\psi_A : R_+ \to Z, \psi_A(t) = \min\{k_1 k_2 : \varphi_A(k) \le t\}.$$

Если $\varphi_A(k)$ может быть представлена или оценена функцией вида $\xi_A(k) = \xi_1(k_1)\xi_2(k_2)$, то функция $\psi_A(t)$ определяется как

$$\psi_A : R_+ \times R_+ \to Z,$$

$$\psi_A(t) = \min\{k_1 k_2 : \xi_i(k_i) \le t_i, i = 1,2\}.$$

Утверждение 3. Пусть A — обратимый оператор из алгебры $\mathrm{End}_1 L_2(R)$, тогда обратный оператор принадлежит пространству $\mathrm{End}_1 L_2(R)$, и для нормы $\|A^{-1}\|_1$ имеет место следующая оценка

$$\|A^{-1}\|_1 \le 8\|A^{-1}\| \left(\sqrt{16K_A + 7} + \sqrt{16K_A + 8}\right)^4 \times$$

$$\times \psi\left(\frac{1}{8\|A^{-1}\|\left(\sqrt{16K_A + 7} + \sqrt{16K_A + 8}\right)^4}\right).$$

Доказательство.

Будем рассматривать пространства $\mathrm{End}_1 L_2(R)$ и $\mathrm{End}_{1,m} L_2(R)$. Имеет место следующее неравенство:

$$\frac{\|A\|_1}{4 m_1 m_2} \le \|A\|_{1,m} \le 4\|A\|_1 .$$

Возьмем обратимый оператор $A \in \mathrm{End}_1 L_2(R)$ ($A \in \mathrm{End}_{1,m} L_2(R)$). Его можно расписать как ряд $A = \sum_{k \in Z \times Z} A_k(m)$, (вектор m будет выбран в дальнейшем).

Представим оператор A в виде суммы $A = C + D$, где $C = \sum_{\substack{k \in Z \times Z, \\ -e \le k \le e}} A_k(m)$. Для нормы оператора $D = A - C$ справедлива следующая оценка:

$$\|D\| \le \|D\|_{1,m} = \sum_{k \in Z \times Z} d_{D,m}(k) \le$$

$$\le 4 \sum_{\substack{k \in Z \times Z, \\ k \le -m-e, \\ k \ge m+e}} d_A(k) = \varphi_A(m).$$

Если выбрать вектор m так, что $\|A^{-1}\| \varphi_A(m) \le 1/2$, то оператор C будет обратим, причем

$$\|C^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{(1 - \|A^{-1}\|\|D\|)} \le \frac{\|A^{-1}\|}{(1 - \|A^{-1}\| \varphi_A(m))} \le 2\|A^{-1}\|.$$

Для получения оценок коэффициентов $L_k(m)$ оператора $L = C^{-1}$ будем использовать утверждение 1. Данное утверждение было доказано для системы проекторов P_j, $j \in Z \times Z$, но в силу произвольности системы проекторов она остается справедливой и для проекторов $P_j(m)$, $j \in Z \times Z$ с вектором m, удовлетворяющим условию $\|A^{-1}\| \varphi_A(m) \le 1/2$. Из доказательства утверждения 1 следует, что

$$\|L_k(m)\| \le 2\|C^{-1}\| \left(1 - \frac{1}{8K_C}\right)^{\frac{|k|}{2}},$$

$$\|C^{-1}\| \le \|C^{-1}\|_{1,m} = \sum_{k \in Z \times Z} \|L_k(m)\| \le$$

$$\le 2\|C^{-1}\| \left(\sqrt{8K_C - 1} + \sqrt{8K_C}\right)^4 .$$

Наложим на вектор m условие, ведущее к малости величины $\|D\|_{1,m} \|C^{-1}\|_{1,m}$ (это возможно, так как $\|D\|_{1,m} \le \varphi_A(m)$, а $\varphi_A(m) \to 0$ при $|m| \to \infty$). Тогда оператор A^{-1} можно будет представить в виде произведения двух операторов из $\mathrm{End}_{1,m} L_2(R)$:

$$A^{-1} = \left(I + C^{-1} D\right)^{-1} C^{-1}.$$

Пространство $\mathrm{End}_{1,m} L_2(R)$ замкнуто относительно операции произведения операторов, поэтому $A^{-1} \in \mathrm{End}_{1,m} L_2(R)$ и выполняется следующее неравенство:

$$\left\|A^{-1}\right\|_{1,m} \leq \frac{\left\|C^{-1}\right\|_{1,m}}{1-\|D\|_{1,m}\left\|C^{-1}\right\|_{1,m}}.$$

Продолжим оценку неравенства так, чтобы $\left\|A^{-1}\right\|_{1,m}$ оценивалась только через $\left\|A^{-1}\right\|$, $\|A\|$, $\varphi_A(m)$.

$$\left\|A^{-1}\right\|_{1,m} \leq \frac{2\left\|C^{-1}\right\|\left(\sqrt{8K_C-1}+\sqrt{8K_C}\right)^4}{1-2\left\|C^{-1}\right\|\varphi_A(m)\left(\sqrt{8K_C-1}+\sqrt{8K_C}\right)^4} \leq$$

$$\leq \frac{4\left\|A^{-1}\right\|\left(\sqrt{16K_A+7}+\sqrt{16K_A+8}\right)^4}{1-4\left\|A^{-1}\right\|\varphi_A(m)\left(\sqrt{16K_A+7}+\sqrt{16K_A+8}\right)^4},$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_1 \leq \frac{4m_1m_2\left\|A^{-1}\right\|\left(\sqrt{16K_A+7}+\sqrt{16K_A+8}\right)^4}{1-4\left\|A^{-1}\right\|\varphi_A(m)\left(\sqrt{16K_A+7}+\sqrt{16K_A+8}\right)^4}.$$

Найдем условие на вектор m, при котором знаменатель правой части последнего неравенства будет принимать значение не меньше $1/2$:

$$1-4\left\|A^{-1}\right\|\varphi_A(m)\times$$
$$\times\left(\sqrt{16K_A+7}+\sqrt{16K_A+8}\right)^4 \geq 1/2,$$
$$\varphi_A(m) \leq \frac{1}{8\left\|A^{-1}\right\|\left(\sqrt{16K_A+7}+\sqrt{16K_A+8}\right)^4}.$$

При векторе m, удовлетворяющем данному условию (заметим, что оно перекрывает условие $\left\|A^{-1}\right\|\varphi_A(m) \leq 1/2$), наша оценка перепишется в виде

$$\left\|A^{-1}\right\|_1 \leq 8\left\|A^{-1}\right\|\left(\sqrt{16K_A+7}+\sqrt{16K_A+8}\right)^4 \times$$
$$\times\psi\left(\frac{1}{8\left\|A^{-1}\right\|\left(\sqrt{16K_A+7}+\sqrt{16K_A+8}\right)^4}\right).$$

Утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и ассимптотические оценки элементов обратных матриц. // Математические заметки. 1992 Т. 52, 2, С. 17—26.

2. *Баскаков А. Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов. // Известия РАН. Серия математика. 1997 Т. 61, 6, С. 25—28.

3. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. М.: РИЦ «Техносфера», 2004.

4. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

5. *Тихонов А. Н., Ильин В. А., Свешников А. Г.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970.

6. *Чуи Ч.* Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001.