УДК 621.372.542

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДИСКРИМИНАТОРОВ СДВИГА ДИНАМИЧЕСКИХ ФРАГМЕНТОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ю. С. Радченко, Е. В. Овчинников

Для оценки неизвестного параметра сдвига динамического фрагмента видеоизображения в работе используется алгоритм максимального правдоподобия, реализованный в виде пространственного дискриминатора. Показана возможность получения оценки параметра сдвига с меньшими вычислительными затратами по сравнению с известными алгоритмами. С целью исследования границ применимости предложенных численных алгоритмов к различным классам изображений проведено статистическое моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Современные телекоммуникационные системы ориентированы на передачу мультимедийной информации, существенной частью которой являются статические и динамические видеоизображения. Использование, в частности, межкадровой корреляции динамических изображений позволяет синтезировать ряд алгоритмов устранения информационной избыточности видеопоследовательностей [1, 2], основанных на предсказании движения фрагментов изображений.

Пусть задано двумерное поле $s(\vec{r},t), \vec{r}=(x,y)$, представляющее собой фрагмент пространственного сигнала в момент t в области Ω_0 (макроблок опорного кадра). В момент $t+\Delta t$ в той же пространственной области Ω_0 наблюдается поле (анализируемый кадр)

$$\xi(\vec{r},t+\Delta t)=s(\vec{r}-\vec{\tau},t)+\eta(\vec{r}) \qquad (1)$$

представляющее собой смесь полезного сигнала $s(\vec{r}-\vec{\tau})$, смещённого на неизвестный вектор $\vec{\tau}=(\tau_x,\tau_y)$, и флуктуирующей помехи $\eta(\vec{r})$. Введение такой помехи обусловлено её неотделимостью от оптико-электронного преобразования сигналов и передачи их по каналам связи. С другой стороны, использование статистического подхода позволяет убрать произвол в вопросе синтеза алгоритмов оценки параметра сигнала. Корректность такой модели обсуждалась, в частности, в [2]. В ходе обработки принятой реализации $\xi(\vec{r})$ измеритель сдвига производит анализ поля (1) в подобласти $\Omega\in\Omega_0$ (блок анализируемого кадра). В этом случае выражение (1) примет вид

$$\xi(\vec{r})=s(\vec{r}-\vec{\tau}_0)+\eta(\vec{r}) \qquad (2)$$

где $\vec{\tau}_0$ — истинное значение неизвестного вектора сдвига. При обработке поля (2) необходимо учитывать изменение формы сигнала $s(\vec{r})$ при его сдвиге.

Существующие алгоритмы оценки вектора сдвига, основанные на оптимизационных методах поиска максимума некоторой целевой функции, приводят к весьма трудоёмким вычислительным процедурам. В данной работе синтезированы несколько вариантов алгоритма оценки вектора сдвига фрагмента динамического изображения в виде пространственного дискриминатора.

ДВУМЕРНЫЕ СУБОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Для формирования целевой функции используем алгоритм максимального правдоподобия, согласно которому требуется сформировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ЛФОП)

$$\Lambda(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)=\int_\Omega \xi(\vec{r})v(\vec{r},\vec{\tau})d\vec{r}-\frac{1}{2}\int_\Omega s(\vec{r}-\vec{\tau})v(\vec{r},\vec{\tau})d\vec{r} \qquad (3)$$

и определить положение его максимума из системы уравнений правдоподобия

$$\begin{aligned}\left(\partial\Lambda(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)/\partial\tau_x\right)\Big|_{\vec{\tau}=\vec{\tau}_m}&=0,\\ \left(\partial\Lambda(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)/\partial\tau_y\right)\Big|_{\vec{\tau}=\vec{\tau}_m}&=0.\end{aligned} \qquad (4)$$

В случае, если $\eta(\vec{r})$ представляет собой гауссовский белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0/2$, опорный сигнал $v(\vec{r})$ может быть записан как $v(\vec{r},\vec{\tau})=(2/N_0)s(\vec{r}-\vec{\tau})$. Тогда выражение (3) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}\Lambda(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)=\frac{2}{N_0}\int_\Omega \xi(\vec{r})s(\vec{r}-\vec{\tau})d\vec{r}-\\ -\frac{1}{N_0}\int_\Omega (s(\vec{r}-\vec{\tau}))^2 d\vec{r}.\end{aligned} \qquad (5)$$

Точное решение системы (4) наталкивается на существенные трудности математического характера. Используем численный алгоритм Ньютона—Рафсона, позволяющий получать оценку максимального правдоподобия неизвестного параметра сдвига итерационно, для приближенного решения системы (4). Разложив ЛФОП в ряд Тейлора с точностью до квадратичного члена

$$\begin{cases} d_{xx}(\tau_{m,x}-\tau_{\text{ф},x})-d_{xy}(\tau_{m,y}-\tau_{\text{ф},y})=-d_x \\ d_{xy}(\tau_{m,x}-\tau_{\text{ф},x})-d_{yy}(\tau_{m,y}-\tau_{\text{ф},y})=-d_y \end{cases}$$

и вводя для производных ЛФОП следующие обозначения

$$d_x(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)=\partial\Lambda(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)/\partial\tau_x,$$
$$d_y(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)=\partial\Lambda(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)/\partial\tau_y,$$
$$d_{xx}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)=\partial^2\Lambda(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)/\partial\tau_x^2$$
$$d_{yy}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)=\partial^2\Lambda(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)/\partial\tau_y^2,$$
$$d_{xy}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)=\partial^2\Lambda(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)/(\partial\tau_x\partial\tau_y)=$$
$$=\partial^2\Lambda(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)/(\partial\tau_y\partial\tau_x)$$

можно получить один шаг итерационной процедуры Ньютона—Рафсона в виде

$$\begin{cases} \tau_{m,x}=\tau_{\text{ф},x}-\left.\left(\dfrac{d_x(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)d_{yy}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)-d_y(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)d_{xy}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)}{d_{xx}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)d_{yy}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)-(d_{xy}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0))^2}\right)\right|_{\vec{\tau}=\vec{\tau}_\text{ф}} \\ \tau_{m,y}=\tau_{\text{ф},y}-\left.\left(\dfrac{d_y(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)d_{xx}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)-d_x(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)d_{xy}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)}{d_{xx}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)d_{yy}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)-(d_{xy}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0))^2}\right)\right|_{\vec{\tau}=\vec{\tau}_\text{ф}} \end{cases} \quad (6)$$

Алгоритм (6) позволяет оценить неизвестный параметр сдвига с меньшими вычислительными затратами. Точное решение системы (4) задается в виде (6) для случая не более чем квадратичной зависимости $\Lambda(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)$ от неизвестного параметра сдвига. Другие варианты решения системы (4) можно получить с использованием алгоритма Брауна

$$\tau_{m,x}=\tau_{\text{ф},x}-t_x,\quad \tau_{m,y}=\tau_{\text{ф},y}-t_y \quad (7)$$

где

$$t_y=\frac{\Lambda'_y(\vec{\tau}_i,\vec{\tau}_0)\Lambda''_{xx}(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0)}{\Lambda''_{xx}(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0)\Lambda''_{yy}(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0)-\Lambda''_{xy}(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0)\Lambda''_{xy}(\vec{\tau}_i,\vec{\tau}_0)},$$
$$t_x=\frac{\Lambda'_x(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0)-t_y\Lambda''_{xy}(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0)}{\Lambda''_{xx}(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0)},$$
$$\vec{\tau}_i=\{\tau_{\text{ф},x}-\Lambda'_x(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0)/\Lambda''_{xx}(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0);\tau_{\text{ф},y}\},$$

а также других численных методов [4].

Найдем характеристики полученных оценок. Для простоты вначале рассмотрим одномерный случай. Тогда система (4) преобразуется к виду

$$\tau_m=\tau_\text{ф}-(d_1(\tau,\tau_0)/d_2(\tau,\tau_0))\big|_{\tau=\tau_\text{ф}}, \quad (8)$$

где обозначения аналогичны сделанным выше. Выделив из ЛФОП сигнальную и шумовую компоненты, производные $d_1(\tau,\tau_0), d_2(\tau,\tau_0)$ можно записать как

$$d_1(\tau,\tau_0)=m_1(\tau,\tau_0)+\sigma_1(\tau)\eta_1,$$
$$d_2(\tau,\tau_0)=m_2(\tau,\tau_0)+\sigma_2(\tau)\eta_2$$

где $m_1(\tau,\tau_0)$, $m_2(\tau,\tau_0)$, $\sigma_1^2(\tau)$, $\sigma_2^2(\tau_\text{ф})$ — математические ожидания и дисперсии соответствующих производных, $\eta_1=N'(\tau)/\sigma_1(\tau)$, $\eta_2=N''(\tau)/\sigma_2(\tau)$ — нормированные гауссовские случайные величины. Подробнее статистические свойства производных ЛФОП представлены в ПРИЛОЖЕНИИ, где производные $d_1(\tau,\tau_0), d_2(\tau,\tau_0)$ выражены через АКФ сигнала $\Psi_\Omega(\tau_1,\tau_2)$. Тогда отношение d_1/d_2 в (8), определяющее правило работы дискриминатора, запишется в виде

$$\frac{d_1(\tau,\tau_0)}{d_2(\tau,\tau_0)}=\frac{m_1(\tau,\tau_0)_1+\sigma_1(\tau)\eta_1}{m_2(\tau,\tau_0)+\sigma_2(\tau)\eta_2}\approx$$
$$\approx\frac{m_1(\tau,\tau_0)}{m_2(\tau,\tau_0)}+\frac{\sigma_1(\tau)}{m_2(\tau,\tau_0)}\eta_1-\frac{m_1(\tau,\tau_0)\sigma_2(\tau)}{[m_2(\tau,\tau_0)]^2}\eta_2$$

а для характеристик оценки можно получить следующие выражения

$$m_m(\tau_\text{ф},\tau_0)=\tau_\text{ф}-m_1/m_2,$$
$$\sigma_m^2(\tau_\text{ф},\tau_0)=(m_2)^{-2}\times((\sigma_1)^2+ \quad (9)$$
$$+(m_1/m_2)^2(\sigma_2)^2-2K_{12}m_1/m_2),$$

где аргументы $\tau_\text{ф},\tau_0$ опущены для краткости записи. Если к сигнальной функции может быть применена параболическая аппроксимация, то оценка оказывается асимптотически несмещённой, а ее дисперсия в первом приближении совпадает с дисперсией эффективной оценки. Этот вывод в частном случае неэнергетичности неизвестного параметра сдвига совпадает с результатами в [3].

Рассуждая аналогично (8-9), можно получить характеристики двумерной оценки в виде

$$m_{m,x}(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0)=\tau_{\text{ф},x}-m_{xc}/m_z,$$
$$\sigma_{m,x}^2(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0)=(m_z)^{-2}\times\{(\sigma_x m_{yy})^2+(\sigma_{yy}m_x)^2+$$

$$+(\sigma_y m_{xy})^2+(\sigma_{xy} m_x)^2+(m_{xc}/m_z)^2\times$$
$$\times((\sigma_{xx} m_{yy})^2+(\sigma_{yy} m_{xx})^2+2(\sigma_{xy} m_{xy})^2)+$$
$$+2K_{x,y} m_{xy} m_{yy}-2K_{x,xx}[m_{yy}]^2 m_{xc}/m_z+$$
$$+2K_{x,xy}(2m_{xy} m_{yy} m_{xc}/m_z-m_y m_{yy})+$$
$$+2K_{x,yy}(m_x m_{yy}-m_{xx} m_{yy} m_{xc}/m_z)+$$
$$+2K_{y,xx} m_{xy} m_{yy} m_{xc}/m_z-$$
$$-2K_{y,xy}(2(m_{xy})^2 m_{xc}/m_z-m_y m_{xy})-$$
$$-2K_{y,yy}(m_x m_{xy}-m_{xx} m_{xy})\},$$

где аргументы $\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0$ опущены для краткости записи. В случае слабой анизотропии, т.е. малости математического ожидания, дисперсии и корреляционных функций смешанных производных по сравнению с производными по одному параметру, формулы преобразуются к следующему виду:

$$m_{m,x}(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0)=\tau_{\text{ф},x}-m_x/m_{xx}$$

$$\sigma^2_{m,x}(\vec{\tau}_\text{ф},\vec{\tau}_0)=(m_{xx})^{-2}\times((\sigma_x)^2+(m_x/m_{xx})^2(\sigma_{xx})^2-$$
$$-2K_{x,xx} m_x/m_{xx})+2(m_x\sigma_{yy}/m_{xx} m_{yy})^2.$$

Видно, что даже в случае отсутствия анизотропии дисперсия оценки в двумерном случае не совпадает с (9).

МОДЕЛИРОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ

С целью исследования границ применимости численных методов решения системы (4) было проведено статистическое моделирование. В качестве модельного был взят сигнал $s(\vec{t})=\cos^2(3r^2)$, где $r^2=x^2+y^2$. Область Ω полагалась прямоугольной и равной $\{[-T,T];[-T,T]\}$, где $T=1$. При этом изменялись отношение сигнал/шум (ОСШ) $z_0^2=\Psi_\Omega(\vec{\tau}_0,\vec{\tau}_0)$ на входе устройства обработки и величина сдвига сигнала по оси Ox. Сдвиг по оси Oy полагался постоянным и равным 0.1 величины размера области Ω. Объем моделирования составил 1000 реализаций. На рис. 1 приведена зависимость величины относительного рассеяния $\rho^2=(\tau_m-\tau_0)^2/(\tau_\text{ф}-\tau_0)^2$ от сдвига при ОСШ равном 5, 10 и 20 дБ (сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии соответственно). Рис. 2 соответствует зависимости величины относительного рассеяния от ОСШ при величине параметра сдвига в 0.1, 0.2 и 0.3 размера подобласти Ω, порядок линий тот же. На рис. 3 изображены зависимости относительного рассеяния от ОСШ для случаев применения алгоритма Ньютона-Рафсона и алгоритма Брауна (сплошная и штриховая линии соответственно).

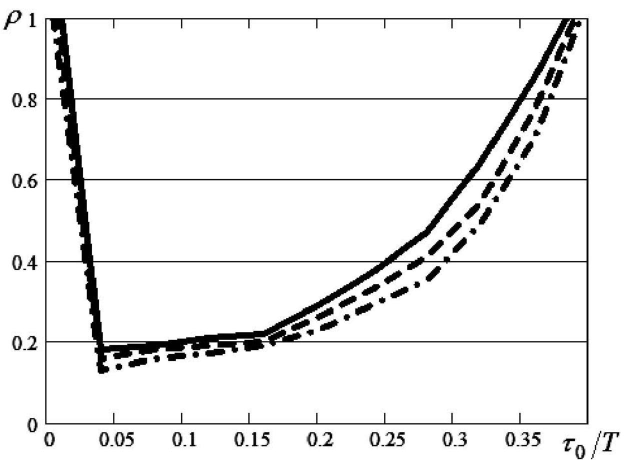

Рис. 1. По горизонтали: нормированная величина сдвига τ_0/T. По вертикали: нормированный корень квадратный из рассеяния ρ

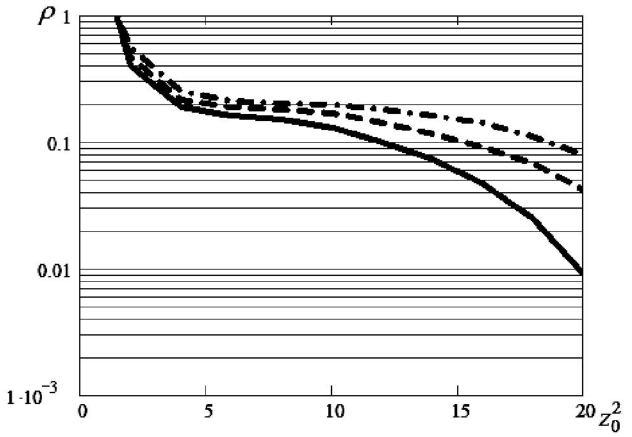

Рис. 2. По горизонтали: отношение сигнал/шум z_0^2. По вертикали: нормированный корень квадратный из рассеяния ρ

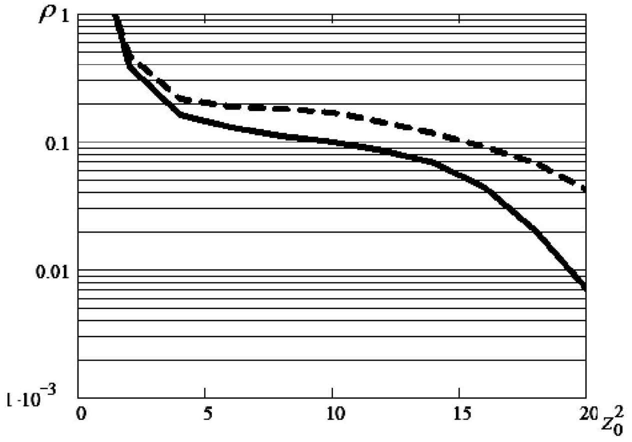

Рис. 3. По горизонтали: отношение сигнал/шум z_0^2 По вертикали: нормированный корень квадратный из рассеяния ρ

Полученные значения рассеяния дают основание указать в качестве рабочей области алгоритма величины сдвига порядка 0,04—0,4 размера подобласти Ω. Результаты моделирования также позволяют сделать обоснованный выбор в пользу того или иного алгоритма решения системы уравнений (4).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Параметры, используемые при расчете характеристик алгоритмов

$\Psi_\Omega(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2)=\dfrac{2}{N_0}\int\limits_\Omega s(\vec{r}-\vec{\tau}_1)s(\vec{r}-\vec{\tau}_2)d\vec{r}$ — автокорреляционная функция сигнала.

$z^2(\vec{\tau})=\Psi_\Omega(\vec{\tau},\vec{\tau})$ — ОСШ для произвольного параметра сдвига.

Параметры одномерного алгоритма Ньютона—Рафсона

$$m_1(\tau_ф,\tau_0)=\left\langle\Lambda'(\tau,\tau_0)\right\rangle\Big|_{\tau=\tau_ф}=\left(\partial\left[\Psi_\Omega(\tau,\tau_0)-\Psi_\Omega(\tau,\tau_ф)\right]\Big/\partial\tau\right)\Big|_{\tau=\tau_ф},$$

$$m_2(\tau_ф,\tau_0)=\left\langle\Lambda''(\tau,\tau_0)\right\rangle\Big|_{\tau=\tau_ф}=(\partial^2[\Psi_\Omega(\tau,\tau_0)-\Psi_\Omega(\tau,\tau_ф)]/\partial\tau^2)\Big|_{\tau=\tau_ф}-(\partial^2[\Psi_\Omega(\tau_1,\tau_2)]/(\partial\tau_1\partial\tau_2))\Big|_{\tau_1=\tau_2=\tau_ф},$$

$$\sigma_1^2(\tau_ф)=\left\langle(\Lambda'(\tau,\tau_0)-m_1(\tau_ф,\tau_0))^2\right\rangle\Big|_{\tau=\tau_ф}=(\partial^2[\Psi_\Omega(\tau_1,\tau_2)]/(\partial\tau_1\partial\tau_2))\Big|_{\tau_1=\tau_2=\tau_ф},$$

$$\sigma_2^2(\tau_ф)=\left\langle(\Lambda''(\tau,\tau_0)-m_2(\tau_ф,\tau_0))^2\right\rangle\Big|_{\tau=\tau_ф}=\left(\partial^4[\Psi_\Omega(\tau_1,\tau_2)]/(\partial\tau_1^2\partial\tau_2^2)\right)\Big|_{\tau_1=\tau_2=\tau_ф},$$

$$K_{12}(\tau_ф)=\left\langle(\Lambda'(\tau_1,\tau_0)-m_1(\tau_ф,\tau_0))(\Lambda''(\tau_2,\tau_0)-m_2(\tau_ф,\tau_0))\right\rangle\Big|_{\tau_1=\tau_2=\tau_ф}=(\partial^3[\Psi_\Omega(\tau_1,\tau_2)]/(\partial\tau_1\partial\tau_2^2))\Big|_{\tau_1=\tau_2=\tau_ф},$$

Параметры двумерного алгоритма Ньютона—Рафсона

$$m_x(\vec{\tau}_ф,\vec{\tau}_0)=\left\langle\Lambda'_{\tau_x}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)\right\rangle\Big|_{\vec{\tau}=\vec{\tau}_ф}=(\partial[\Psi_\Omega(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)-\Psi_\Omega(\vec{\tau},\vec{\tau}_ф)]/\partial\tau_x)\Big|_{\vec{\tau}=\vec{\tau}_ф}$$

$$m_y(\vec{\tau}_ф,\vec{\tau}_0)=\left(\partial[\Psi_\Omega(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)-\Psi_\Omega(\vec{\tau},\vec{\tau}_ф)]/\partial\tau_y\right)\Big|_{\vec{\tau}=\vec{\tau}_ф},$$

$$m_{xx}(\vec{\tau}_ф,\vec{\tau}_0)=\left(\frac{\partial^2[\Psi_\Omega(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)-\Psi_\Omega(\vec{\tau},\vec{\tau}_ф)]}{\partial\tau_x^2}\right)\Bigg|_{\vec{\tau}=\vec{\tau}_ф}-\left(\frac{\partial^2\Psi_\Omega(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2)}{\partial\tau_{1,x}\partial\tau_{2,x}}\right)\Bigg|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_ф},$$

$$m_{xy}(\vec{\tau}_ф,\vec{\tau}_0)=\left(\frac{\partial^2[\Psi_\Omega(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)-\Psi_\Omega(\vec{\tau},\vec{\tau}_ф)]}{\partial\tau_x\partial\tau_y}\right)\Bigg|_{\vec{\tau}=\vec{\tau}_ф}-\left(\frac{\partial^2\Psi_\Omega(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2)}{\partial\tau_{1,x}\partial\tau_{2,y}}\right)\Bigg|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_ф},$$

$$m_{yy}(\vec{\tau}_ф,\vec{\tau}_0)=\left(\frac{\partial^2[\Psi_\Omega(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)-\Psi_\Omega(\vec{\tau},\vec{\tau}_ф)]}{\partial\tau_y^2}\right)\Bigg|_{\vec{\tau}=\vec{\tau}_ф}-\left(\frac{\partial^2\Psi_\Omega(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2)}{\partial\tau_{1,y}\partial\tau_{2,y}}\right)\Bigg|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_ф},$$

$$\sigma_x^2(\vec{\tau}_ф)=\left\langle(\Lambda'_{\tau_x}(\vec{\tau},\vec{\tau}_0)-m_x(\vec{\tau}_ф,\vec{\tau}_0))^2\right\rangle\Big|_{\vec{\tau}=\vec{\tau}_ф}=(\partial^2\Psi_\Omega(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2)/(\partial\tau_{1,x}\partial\tau_{2,x}))\Big|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_ф},$$

$$\sigma_y^2(\vec{\tau}_ф)=(\partial^2\Psi_\Omega(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2)/(\partial\tau_{1,y}\partial\tau_{2,y}))\Big|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_ф},$$

$$\sigma_{xy}^2(\vec{\tau}_ф)=(\partial^4\Psi_\Omega(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2)/(\partial\tau_{1,x}\partial\tau_{2,x}\partial\tau_{1,y}\partial\tau_{2,y}))\Big|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_ф},$$

$$\sigma_{yy}^2(\vec{\tau}_ф)=\left(\partial^4\Psi_\Omega(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2)/(\partial\tau_{1,y}^2\partial\tau_{2,y}^2)\right)\Big|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_ф},$$

$$\sigma_{xx}^2(\vec{\tau}_ф)=\left(\partial^4\Psi_\Omega(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2)\Big/\left(\partial\tau_{1,x}^2\partial\tau_{2,x}^2\right)\right)\Big|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_ф},$$

$$K_{x,y}(\vec{\tau}_ф)=\left\langle(\Lambda'_x(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_0)-m_x(\vec{\tau}_ф,\vec{\tau}_0))(\Lambda'_y(\vec{\tau}_2,\vec{\tau}_0)-m_y(\vec{\tau}_ф,\vec{\tau}_0))\right\rangle\Big|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_ф}=$$

$$=(\partial^2[\Psi_\Omega(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2)]/(\partial\tau_{1,x}\partial\tau_{2,y}))\Big\|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_ф},$$

$$K_{x,xx}\left(\vec{\tau}_{\text{ф}}\right)=\left.\left(\frac{\partial^3\left[\Psi_\Omega\left(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2\right)\right]}{\partial\tau_{1,x}\partial\tau_{2,x}^2}\right)\right\|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_{\text{ф}}},\quad K_{x,xy}\left(\vec{\tau}_{\text{ф}}\right)=\left.\left(\frac{\partial^3\left[\Psi_\Omega\left(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2\right)\right]}{\partial\vec{\tau}_{1,x}\partial\vec{\tau}_{2,x}\partial\vec{\tau}_{2,y}}\right)\right\|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_{\text{ф}}},$$

$$K_{x,yy}\left(\vec{\tau}_{\text{ф}}\right)=\left.\left(\frac{\partial^3\left[\Psi_\Omega\left(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2\right)\right]}{\partial\tau_{1,x}\partial\tau_{2,y}^2}\right)\right\|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_{\text{ф}}},\quad K_{y,xx}\left(\vec{\tau}_{\text{ф}}\right)=\left.\left(\frac{\partial^3\left[\Psi_\Omega\left(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2\right)\right]}{\partial\tau_{1,y}\partial\tau_{2,x}^2}\right)\right\|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_{\text{ф}}},$$

$$K_{y,xy}\left(\vec{\tau}_{\text{ф}}\right)=\left.\left(\frac{\partial^3\left[\Psi_\Omega\left(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2\right)\right]}{\partial\vec{\tau}_{1,x}\partial\vec{\tau}_{2,x}\partial\vec{\tau}_{2,y}}\right)\right\|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_{\text{ф}}},\quad K_{y,yy}\left(\vec{\tau}_{\text{ф}}\right)=\left.\left(\frac{\partial^3\left[\Psi_\Omega\left(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2\right)\right]}{\partial\tau_{1,y}\partial\tau_{2,y}^2}\right)\right\|_{\vec{\tau}_1=\vec{\tau}_2=\vec{\tau}_{\text{ф}}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Цифровая обработка телевизионных и компьютерных изображений / сост. А. В. Дворкович [и др.]; под ред. Ю. Б. Зубарева, В. П. Дворковича. — М.: МЦНТИ, 1997. — 216 с.

2. *Радченко Ю.С.* Спектральные алгоритмы оценки параметров сдвига динамических фрагментов изображений / Ю. С. Радченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. сер. Физика, математика. — 2004. — № 2. — С. 86—89.

3. *Куликов Е.И.* Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. – М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.

4. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов: учебник для вузов / В. М. Вержбицкий. — М.: Высш. шк., 2002. — 840 с.