

НАДБАРЬЕРНАЯ ИОНИЗАЦИЯ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ АТОМА ВОДОРОДА УЛЬТРАКОРОТКИМ ЛАЗЕРНЫМ ИМПУЛЬСОМ

А. С. Корнев

Воронежский государственный университет

В адиабатическом приближении проведены расчеты энергетических спектров электронов при надбарьерной ионизации возбужденных $2s$ -, $2p$ - и $3d$ -состояний атома водорода сверхсильным ультракоротким лазерным импульсом.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы был достигнут значительный прогресс в экспериментальном изучении ионизации атомов сверхсильным лазерным полем. Это относится, в частности, к детальным измерениям энергетического распределения электронов [1]—[4], а также к зависимости вероятности ионизации от фазы светового поля, возникающей для сверхкоротких лазерных импульсов [5].

Новые экспериментальные результаты стимулировали появление теоретических работ, в которых ионизация атомов в сильном лазерном поле рассматривалась как аналитическими, так и численными методами (см. обзор [6], а также недавние работы [7]—[11]). При этом основная проблема теории связана с учетом влияния кулоновского поля атомного остатка на движение электрона в непрерывном спектре. Дело в том, что для электрона, связанного короткодействующими силами, теория ионизации в сильном поле была построена еще в классической работе Келдыша [12]. Развитие метода, проведенное в работе [13] (см., также [14]), позволило получить спектры туннелирующих электронов, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными [15]. Авторами работы [13] была высказана гипотеза, что аналитические формулы, описывающие электронные спектры для фототрыва от отрицательных ионов (короткодействующий потенциал), могут быть после простой модификации применены и для описания ионизации нейтральных атомов и положительных ионов, где имеется дальнедействующее кулоновское взаимодействие. Проверка этой гипотезы и является одной из целей данной работы.

Аналитические методы описания электронных спектров при ионизации нейтральных атомов и положительных ионов развивались

также в работах [16]—[19]. В работе [19] для описания движения свободного электрона в кулоновском поле и поле электромагнитной волны использовались волковские функции с кулоновской поправкой; относительно их точности в случае сильного поля были высказаны серьезные сомнения [20].

Вычисления данной работы проведены на основе адиабатического приближения, предложенного и протестированного ранее в [21]. Следует напомнить, что основная идея используемого адиабатического приближения базируется на результате работы [22]. В этой работе вероятность туннельного вырывания электрона из короткодействующего потенциала, найденная Келдышем, была обобщена на случай туннельной ионизации атома путем формальной замены напряженности электрического поля в вероятности туннельного эффекта в постоянном поле [23] на переменную напряженность электрического поля световой волны с последующим усреднением этой вероятности по периоду поля. В адиабатическом приближении [21] замена переменного поля на постоянное производится на более ранней стадии — в электронных волновых функциях, с которыми можно проводить вычисления различных величин, в данном случае — электронных спектров. В дальнейшем эти найденные величины усредняются по периоду поля. Представляется очевидным, что точность подобного подхода должна быть не хуже, чем точность вычисления полной вероятности туннельного эффекта [24]. Другие варианты адиабатического приближения рассмотрены в работах [25].

В работе используется атомная система единиц ($\hbar = e = m = 1$).

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ

Рассмотрим электрон, движущийся в кулоновском потенциале, создаваемом зарядом Z ,

и линейно-поляризованном вдоль оси z лазерном поле с напряженностью $F(t)$. Волновая функция электрона в дипольном приближении удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) = \left[-\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{Z}{r} + zF(t)\right]\Psi(r,t). \quad (1)$$

Построим решение уравнения Шредингера (1), пригодное для случая низких частот поля ω . Ограничимся случаем непрерывного спектра. Воспользуемся адиабатическим приближением, в соответствии с которым движение электрона «подстраивается» к изменению поля. Физически это означает пренебрежение инерционными свойствами электрона при его взаимодействии с полем. В соответствии с классическим законом изменения импульса условие применимости адиабатического приближения в непрерывном спектре можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{F}{\omega} \gg \sqrt{E}, \quad (2)$$

где F — характерное значение напряженности поля, E — характерное значение энергии электрона. Условие (2) уточняет условие применимости адиабатического приближения, приведенное в [21]: $F/\omega \gg 1$. Соотношение (2) аналогично соответствующему условию, впервые предложенному в работе [16].

Адиабатическое решение уравнения (1) запишем следующим образом:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \Phi_E(F,\mathbf{r})\Big|_{F=F(t)} e^{-iEt}, \quad (3)$$

где $\Phi_E(F,\mathbf{r})$ — решение стационарного уравнения Шредингера в постоянном однородном поле F :

$$\left[-\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{Z}{r} + zF\right]\Phi_E(F,\mathbf{r}) = E\Phi_E(F,\mathbf{r}). \quad (4)$$

Как видно, функция (3) и энергия E зависят от времени параметрически, что и является основным приближением данной работы.

Стационарное уравнение Шредингера (4) удобно решать в квадратичных параболических координатах (μ, ν, φ) [26], связанных с декартовыми соотношениями:

$$x = \mu\nu \cos\varphi; \quad y = \mu\nu \sin\varphi; \quad z = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2). \quad (5)$$

Координаты (5) связаны с традиционными параболическими координатами (ξ, η) простыми соотношениями: $\mu^2 = \xi$, $\nu^2 = \eta$. Квадратичные координаты удобны при численном решении уравнения Шредингера (4), так как область интегрирования становится более компактной [27].

В этих координатах переменные в уравнении (4) разделяются

$$\Phi_E(F,\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu\nu}} M(F,\mu)N(F,\nu)e^{im\varphi}, \quad (6)$$

где $m = 0, \pm 1, \dots$ — магнитное квантовое число, приводя к двум одномерным уравнениям Шредингера

$$\left[\frac{d^2}{d\mu^2} + \frac{1-4m^2}{4\mu^2} + 2E\mu^2 - F\mu^4 + Z_1\right]M(F,\mu) = 0 \quad (7)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\nu^2} + \frac{1-4m^2}{4\nu^2} + 2E\nu^2 + F\nu^4 + Z_2\right]N(F,\nu) = 0 \quad (8)$$

с константами разделения Z_1 и Z_2 , связанными соотношением

$$Z_1 + Z_2 = 4Z.$$

Уравнение (7) описывает финитное движение (рис. 1а), и его собственные функции ха-

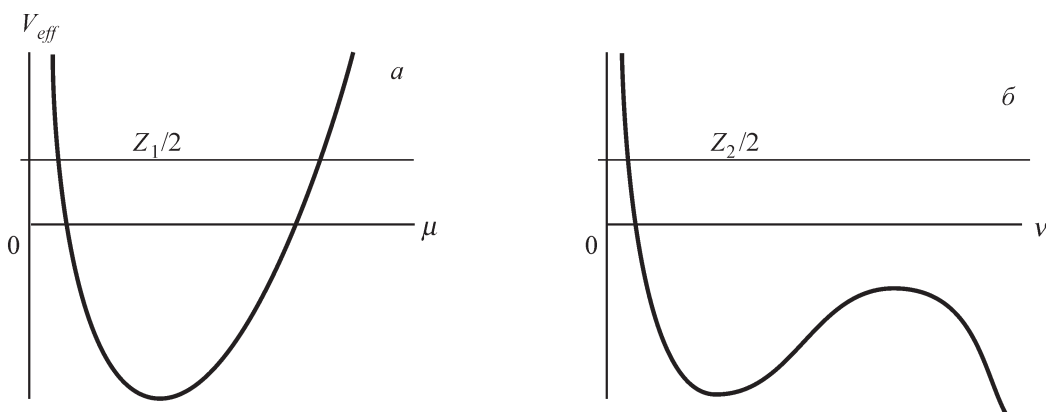


Рис. 1. Эффективные потенциалы для одномерных уравнений Шредингера (7) (а) и (8) (б)

рактически параболическим квантовым числом $n_1 = 0, 1, \dots$. Уравнение (8) соответствует инфинитному движению (рис. 1б), и его собственные функции можно характеризовать полной энергией E . Для численного решения каждого из уравнений (7), (8) промежутки интегрирования удобно разбить на интервалы длиной порядка 1 а.е. Внутри каждого интервала, например, $\mu_i \leq \mu < \mu_{i+1}$, решение представляется в виде ряда Тейлора

$$M(F, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{ik} (\mu - \mu_i)^k,$$

коэффициенты которого вычисляются из рекуррентных соотношений, выведенных в работе [27]. Найденные таким образом решения стационарного уравнения Шредингера (4) удобно нормировать на δ -функцию «по шкале энергий»:

$$\int \Phi_{E'n'm'}^*(\mathbf{r}) \Phi_{Enm}(\mathbf{r}) d^3r = \delta_{m'm} \delta_{n'n} \delta(E' - E).$$

Алгоритм численного расчета нормировочной константы в состояниях непрерывного спектра дается в работе [28].

Таким образом, адиабатическое решение временного уравнения Шредингера (1) можно записать в виде параболической волны

$$\Psi_{Enm}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu\nu}} M_{Enm}(F, \mu) N_{Enm}(F, \nu) \Big|_{F=F(t)} e^{i(m\varphi - Et)}. \quad (9)$$

АМПЛИТУДА И ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОЦЕССА

Выберем лазерный импульс в следующем виде:

$$F(t) = F_0 \cos^2\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cos(\omega t - \Theta), \quad |t| \leq T, \quad (10)$$

где Θ — фаза светового поля, существенная для коротких импульсов, T — ширина импульса на половине высоты.

Дифференциальная по энергии вероятность связанно-свободного перехода между начальным $|i\rangle$ и конечным $|f\rangle$ состояниями дается формулой:

$$\frac{dP_{fi}}{dE} = \left| \int_{-T}^T A_{fi}(t) dt \right|^2, \quad (11)$$

где волновая функция конечного состояния предполагается нормированной на δ -функцию по шкале энергий. Амплитуда перехода

$$A_{fi}(t) = F(t) \langle f | z | i \rangle. \quad (12)$$

Таким образом, в отличие от известной работы Келдыша [12], в качестве волновой функции конечного состояния здесь выбирается не функция Гордона—Волкова, описывающая движение электрона в поле плоской электромагнитной волны, а адиабатические функции, переходящие при $\omega \rightarrow 0$ в точное решение уравнения Шредингера, описывающее движение электрона в кулоновском и постоянном электрическом поле.

Волновая функция начального состояния в квадратичных параболических координатах имеет следующий вид:

$$|i\rangle = |n_1 n_2 i m\rangle = \frac{Ze^{i(m\varphi - E_0 t)}}{\sqrt{\pi n^3 \mu\nu}} f_{n_1 i |m|} \left(\mu \sqrt{\frac{Z}{n}} \right) f_{n_2 i |m|} \left(\nu \sqrt{\frac{Z}{n}} \right). \quad (13)$$

Здесь

$$n = n_1 + n_2 + |m| + 1, \quad (14)$$

$$f_{n'm}(x) =$$

$$= \frac{1}{m!} \sqrt{\frac{(n'+m)!}{n!}} x^{(2m+1)/2} {}_1F_1(-n', m+1; x^2) e^{-x^2/2},$$

${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция, $E_0 = -Z^2/(2n^2)$ — энергия связанного состояния.

После подстановки (9), (13) в (12) выражение для амплитуды процесса принимает вид:

$$A_{E, n_1 i, n_2 i}^{(m)}(n_1) = \int_{-T}^{+T} \mathcal{N}_{E, n_1 i, n_2 i}^{(m)}(n_1, t) e^{i(E-E_0)t} dt, \quad (15)$$

где

$$\mathcal{N}_{E, n_1 i, n_2 i}^{(m)}(n_1, t) = \frac{ZF}{\sqrt{2n^3}} [\mathcal{I}_4 \mathcal{J}_0 - \mathcal{I}_0 \mathcal{J}_4] \Big|_{F=F(t)}, \quad (16)$$

$$\mathcal{I}_k = \int_0^{\infty} \mu^k M_{En_1 |m|}(|F|, \mu) f_{n_1 i |m|} \left(\mu \sqrt{\frac{Z}{n}} \right) d\mu;$$

величина \mathcal{J}_k отличается от \mathcal{I}_k заменами $\mu \rightarrow \nu$, $M_{En_1 |m|} \rightarrow N_{En_1 |m|}$, $n_1 i \rightarrow n_2 i$. Итак, амплитуда ионизации связанного состояния есть Фурье-образ функции (16) по времени на частоте $E - E_0$:

$$A_{E, n_1 i, n_2 i}^{(m)}(n_1) = \mathcal{N}_{E, n_1 i, n_2 i}^{(m)}(n_1, \Omega) \Big|_{\Omega=E-E_0}. \quad (17)$$

Строго говоря, выражение (16) справедливо только на положительных полупериодах лазерного поля. При интегрировании в (11) по отрицательным полупериодам в правой части (16) необходимо произвести дополнительную замену $n_1 i \rightleftharpoons n_2 i$, поскольку при $F < 0$ координаты

μ и ν меняются ролями. Напомним, что проекция орбитального момента электрона на направление линейной поляризации сохраняется, и поэтому амплитуда (17) зависит от m параметрически. Заметим, что адиабатическое приближение, вообще говоря, неприменимо в те моменты времени, когда поле $F(t)$ меняет знак. Однако данное ограничение существенно не сказывается на величине амплитуды благодаря общему множителю $F(t)$ в (12).

В соответствии с (11), дифференциальная по энергии вероятность испускания электрона с параболическим квантовым числом n_1 получается возведением в квадрат (17):

$$\frac{d}{dE} P_{E, n_1, n_{2i}}^{(m)}(n_1) = \left| A_{E, n_1, n_{2i}}^{(m)}(n_1) \right|^2. \quad (18)$$

Проинтегрированное по углам энергетическое распределение электронов получается суммированием вероятностей (18) по всем значениям параболического квантового числа n_1 :

$$\frac{d}{dE} P_{E, n_1, n_{2i}}^{(m)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \left| A_{E, n_1, n_{2i}}^{(m)}(n_1) \right|^2. \quad (19)$$

Таким образом, использование параболических координат не требует решения системы связанных дифференциальных уравнений. Нужно лишь выполнить суммирование по вкладам всех параболических парциальных волн.

Если начальное состояние задается с помощью главного n_i и орбитального l_i квантовых чисел, в качестве начального состояния $|i\rangle$ нужно взять соответствующую суперпозицию состояний (13) с параболическими числами n_{1i} , n_{2i} (см., напр., [29]):

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |n_i l_i m\rangle = \\ &= \sum_{n_{1i}, n_{2i}} C^{l_i m} \frac{n_{1i}-1}{2} \frac{m+n_{1i}-n_{2i}}{2} \frac{n_{2i}-1}{2} \frac{m+n_{2i}-n_{1i}}{2} |n_{1i} n_{2i} m\rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

Индексы суммирования в (20) пробегает все целые неотрицательные значения, удовлетворяющие условию (14) и не позволяющие коэффициенту Клебша—Гордана обращаться в нуль тождественно.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Все численные результаты, полученные в данной работе, относятся к проинтегрированной по углам вероятности испускания электрона в зависимости от его энергии. Отметим вначале, что использованное здесь адиабатическое приближение не позволяет провести сравнение с результатами работ [30]—[32], в которых про-

водились аналогичные расчеты для основного состояния атома водорода. Использувавшиеся в указанных работах лазерные параметры удовлетворяют условию адиабатичности (2) лишь для низких энергий. Энергетический же спектр электронов при этом оказывается достаточно широким. Он заметно спадает лишь при значениях энергии, находящихся вне условия адиабатичности (2).

По этой причине расчеты были проведены для ионизации возбужденных (2s, 2p, 3d) состояний атома водорода при $\omega = 0.056$ ($\lambda = 800$ нм), $F_0 = 0.1$ (пиковая интенсивность излучения в импульсе 3.45×10^{14} Вт/см²), $T = 2.5$ фс. Электронные спектры для ионизации из возбужденных состояний оказываются более узкими в сравнении с ионизацией из основного состояния, выход электронов спадает на несколько порядков для энергий, удовлетворяющих условию адиабатичности (2). Кроме того, для возбужденных состояний энергия электрона в поле с максимальной напряженностью $F_0 = 0.1$ превышает энергию связи электрона в атоме, поэтому формально приводимые результаты соответствуют случаю надбарьерной ионизации. Вопрос об ионизации возбужденных состояний атома также неоднократно поднимался в литературе (см., напр., [4, 33]).

Результаты расчетов представлены на рис. 2—4; энергия электронов измеряется в единицах пондеромоторной энергии $U_p = F_0^2 / (4\omega^2)$.

Для сравнения даны аналогичные результаты, получающиеся в моделях [13, 17, 19]. В этих работах приведены аналитические формулы для скоростей ионизации атома монохроматическим линейно-поляризованным излучением. При этом естественно возникает зависимость от числа поглощенных фотонов. Во всех трех моделях величина W_n получается численным интегрированием дифференциальной по углам скорости ионизации:

$$W_n = 2\pi \int_0^\pi \frac{dW_n}{d\Omega} \sin \theta d\theta.$$

Вид последней определяется используемой моделью.

В работе [13] начальное состояние электрона взято в модели короткодействующего потенциала, для описания конечного состояния электрона берется волновая функция Гордона—Волкова, а вычисления проводятся в квазиклассическом приближении. В работе [17] предложена модифицированная модель Келды-

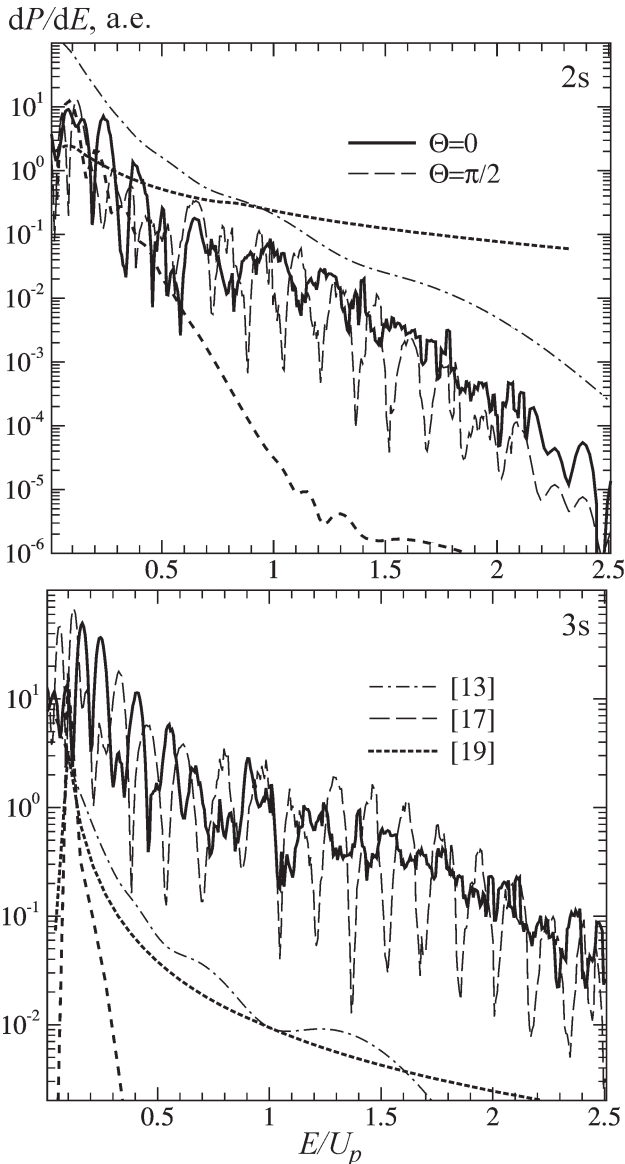


Рис. 2. Спектры электронов при ионизации 2s- и 3s- состояний атома водорода лазерным импульсом (10). В адиабатическом приближении расчеты проведены для двух значений начальной фазы Θ . Значение $\Theta = 0$ соответствует импульсу (10) «в форме косинуса»; значение $\Theta = \pi/2$ — «в форме синуса». Значения других параметров лазерного излучения указаны в тексте статьи

ша, не содержащая интегрирования по импульсу и пригодная, по словам авторов, в достаточно широком диапазоне энергий электрона. Этими же авторами в [18] предложена и так называемая «модель кулоновского торможения», сравнение с которой не представляется здесь возможным, поскольку она накладывает ограничение на минимальное значение эллиптичности лазерного поля. В работе [19] для описания

конечного состояния электрона использовалась волновая функция Гордона—Волкова с кулоновской поправкой. К сожалению, в двух последних работах формулы вероятностей ионизации выведены лишь для s-состояний.

При ионизации возбужденных состояний атома водорода скорости W_n оказываются настолько большими, что их умножение на время порядка длительности лазерного импульса приводит к вероятности, превышающей 1. Поэтому эти величины в данном случае следует рассматривать именно как скорости переходов, а не как вероятности переходов в единицу времени.

Для получения разумных результатов в начале строились кинетические уравнения, содержащие скорости W_n , которые затем решались для импульса с огибающей из (10) (при этом, к сожалению, зависимость от начальной фазы импульса терялась):

$$\frac{dC_0}{dt} = - \sum_{n=1}^{N_{\max}} W_n C_0; \quad \frac{dC_n}{dt} = W_n C_0; \quad (21)$$

$$C_0(-T) = 1; \quad C_n(-T) = 0, \quad n = 1, \dots, N_{\max}.$$

Здесь C_n — вероятность ионизации с поглощением n фотонов, C_0 — начальная концентрация нейтральных атомов, N_{\max} — максимальное число поглощенных фотонов, учитываемое при вычислениях.

Система (21) формально может быть разрешена в квадратурах, которые, однако, непригодны для численных расчетов ввиду недостаточности гладкого поведения подынтегральных функций. Поэтому более удобным является численное решение самих кинетических уравнений. Отметим, что такая задача будет «жесткой» [34]. Для интегрирования подобных систем разработаны специальные численные методы [35].

Результатом решения системы (21) является набор вероятностей ионизации, различающийся числом поглощаемых фотонов. Эти вероятности затем интерполировались на непрерывный спектр энергий. Значения вероятностей содержат не более семи верных цифр, что ограничивает величину N_{\max} , а вместе с тем и верхнюю границу энергетических спектров электронов.

Легко заметить, что электронные спектры, рассчитанные в адиабатическом приближении, имеют сложную структуру и сильно зависят от начальной фазы светового импульса. Модель

dP/dE , а.е.

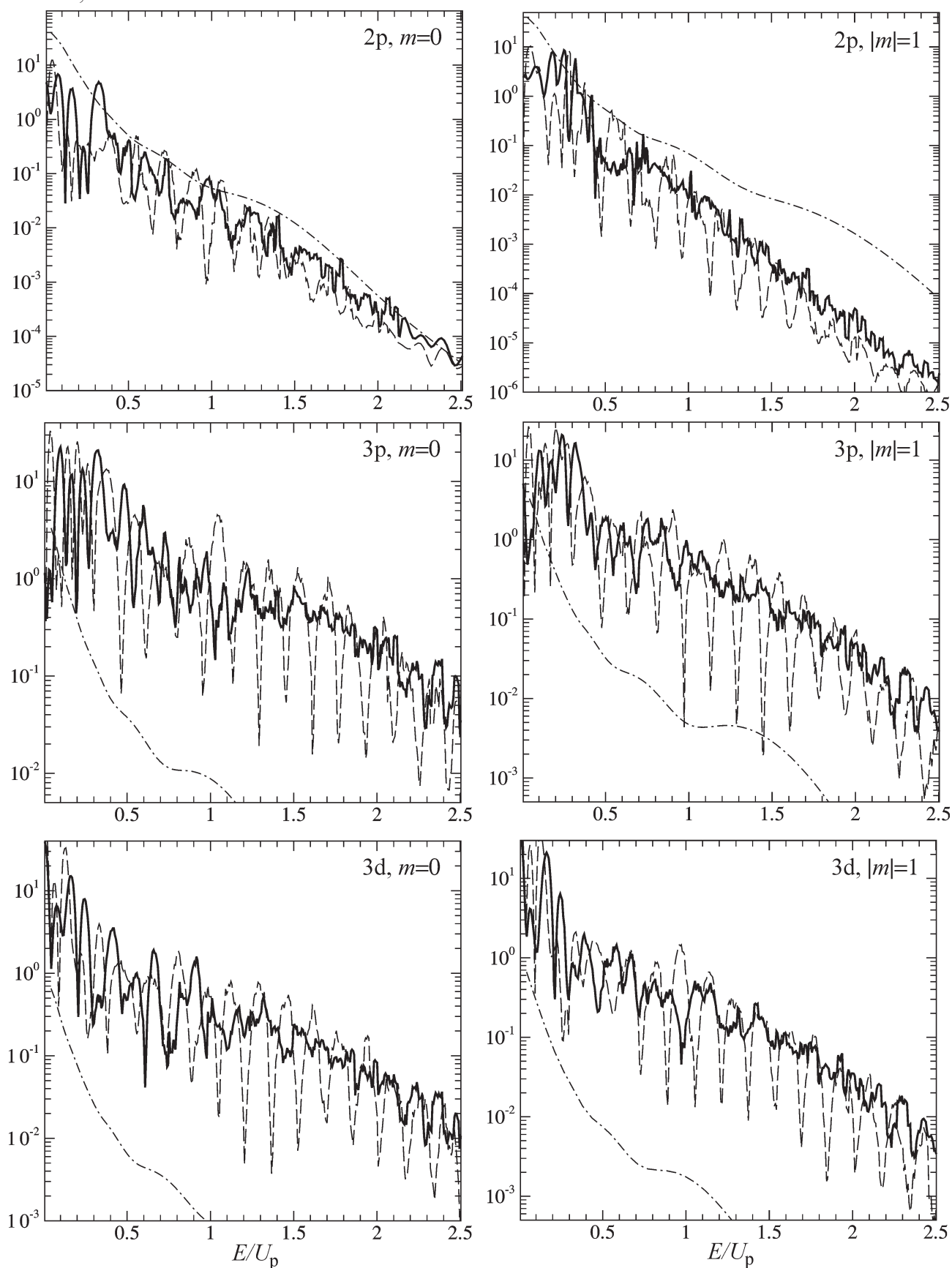


Рис. 3. Спектры электронов при ионизации 2p-, 3p- и 3d-состояний ($m = 0, \pm 1$). Обозначения и параметры те же, что на рис. 2

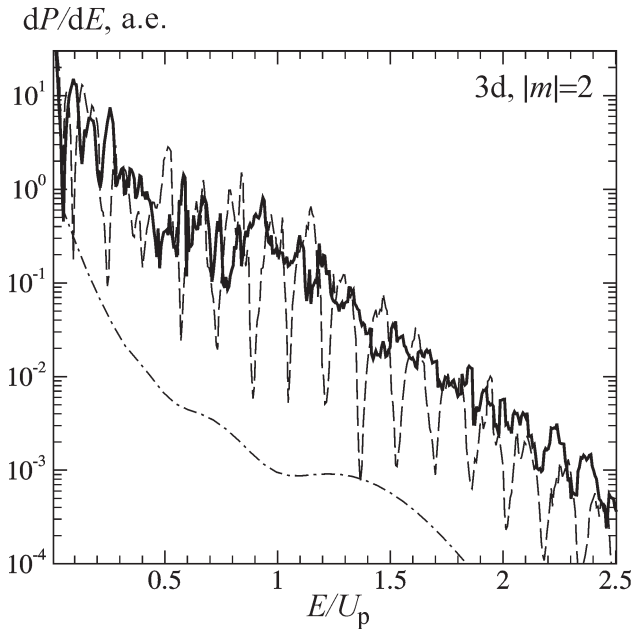


Рис. 4. Спектры электронов при ионизации 3d-состояний с $m = \pm 2$. Обозначения и параметры те же, что на рис. 2

Келдыша не позволяет извлекать столь подробную информацию из процесса ионизации.

Наилучшее согласие с адиабатическим приближением дает модель [13] в случае ионизации 2s- и 2p-состояний с $m = 0$. Качественная воспроизводимость результатов наблюдается на всем протяжении спектра вплоть до энергии $2.5U_p$. В остальных же случаях воспроизводимость имеет место лишь в области малых энергий электронов. Отмеченные расхождения, возможно, объясняются малой длительностью лазерного импульса.

Как видно из приведенных графиков, в электронных спектрах отсутствуют области, имеющие вид плато, в которых распределение электронов относительно слабо зависит от энергии. Этот вывод согласуется с данными работы [36], в которой экспериментально и теоретически было установлено, что с ростом интенсивности лазерного излучения подобные платообразные области исчезают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты, полученные в данной работе.

1. В рамках адиабатической модели проведены расчеты энергетических спектров электронов, образующихся в результате надбарьерной ионизации атомов водорода из возбужденных состояний интенсивным лазерным импульсом.

2. Кинетическая модель, основанная на

аналитических формулах работы [13], хорошо описывает спектры электронов во всем исследуемом диапазоне энергий вплоть до $2.5U_p$ при ионизации из 2s- и 2p-состояний с $m = 0$.

3. В случае более высоких возбужденных состояний качественное согласие с результатами модели [13] наблюдается только в низкоэнергетической области. Этот факт ни в коей мере не означает неприменимость модели [13] в общем случае, поскольку расчеты проводились для очень короткого лазерного импульса.

4. Заключение п. 3 об ухудшении согласия результатов в высокоэнергетической области относится и к моделям, предложенным в работах [17, 19]. Для этих моделей сравнение с расчетами, проведенными в адиабатическом приближении, оказалось возможным только для двух случаев ионизации атома водорода из 2s- и 3s-состояний.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-02-16253), Американского Фонда гражданских исследований и развития (грант VZ-010-0) и Фонда некоммерческих программ «Династия».

ЛИТЕРАТУРА

1. Walker B., Sheehy K., Kulander K.C. et al. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 5031.
2. Sheehy B., Lafon R., Widmer M. et al. // Phys. Rev. A. 1998. V. 58. P. 3942.
3. Buerke B., Meyerhofer D.D. // Phys. Rev. A. 2004. V. 69. P. 051402(R).
4. de Jesus V.L.B., Feuerstein B., Zrost K. et al. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2004. V. 37, P. L161.
5. Paulus G.G., Grasbon F., Walter H. et al. // Nature. 2001. V. 414. P. 182.
6. Dörner R., Weber T., Weckenbrock M. et al. // Adv. At. Mol. Opt. Phys. 2002. V. 48. P. 1.
7. Kornev A.S., Tulenko E.B., Zon B.A. // Phys. Rev. A. 2003. V. 68. P. 043414.
8. Kornev A.S., Tulenko E.B., Zon B.A. // Phys. Rev. A. 2004. V. 69. P. 065401.
9. Chirilă C.C., Potvliege R.M. // Phys. Rev. A. 2005. V. 71, P. 021402(R).
10. Litvinyuk I.V., Le gare F., Dooley P.W. et al. // Phys. Rev. Lett. 2005. V.94, P.033003.
11. Chernov V.E., Kiyon I.Yu., Helm H., Zon B.A. // Phys. Rev. A. 2005. V.71, P.033410.
12. Келдыш Л.В. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1945.
13. Gribakin G.F., Kuchiev M.Yu. // Phys. Rev. A. 1997. V. 55. P. 3760.
14. Frolov M.V., Manakov N.L., Pronin E.A., Starace A.F. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2003. V. 36, P. L419.

15. *Kiyan I.Yu., Helm H.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V.90. P.183001.
16. *Delone N.B., Krapov V.P.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1991. V. 8. P. 1207.
17. *Гореславский С.П., Попруженко С.В., Швецов-Шиловский Н.И., Щербачев О.В.* // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. Вып. 1. С. 27.
18. *Goreslavski S.P., Paulus G.G., Popruzhenko S.V., Shvetsov-Shilovski N.I.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 233002.
19. *Kraïnov V.P.* // J. Opt. Soc. Am. B 14, 425 (1997).
20. *Kornev A.S., Zon B.A.* // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2002. V. 35. P. 2451.
21. *Зон Б.А., Корнев А.С.* // ЖЭТФ. 2003. Т.123, С. 991.
22. *Переломов А.М., Попов В.С., Терентьев М.В.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 1393.
23. *Смирнов Б.М., Чибисов М.И.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 841.
24. *Аммосов М.В., Делоне Н.Б., Крайнов В.П.* // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 2008.
25. *Potvliege R.M., Shakeshaft R.* // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 3061; *Dörr M., Potvliege R.M., Shakeshaft R.* // Phys. Rev. A. 1990 V. 41. P. 558; *Potvliege R.M., Shakeshaft R.* // Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 1609; *Shakeshaft R., Potvliege R.M., Dörr M., Cooke W.E.* // Phys. Rev. A. 1990. V.42. P.1656.
26. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М. Издательство иностранной литературы, Москва. 1958. Т. 1. 930 с.
27. *Damburg R.J., Kolosov V.V.* // J. Phys. B: At. Mol. Phys. 1976. V. 9. P. 3149.
28. *Luc-Koenig E., Bachelier A.* // J. Phys. B: At. Mol. Phys. 1980. V. 9. 1743.
29. *Park D.* // Zs. Phys. 1960. V. 159. P. 155.
30. *Dionissopoulou S., Lyras A., Mercouris Th., Nicolaidis C.A.* // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 1995. V. 28. P. L109.
31. *Dionissopoulou S., Mercouris Th., Lyras A., Nicolaidis C.A.* // Phys. Rev. A. 1997. V. 55. P. 4397.
32. *Cormier E. and Lambropoulos P.* // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 1997. V. 30. P. 77.
33. *Rudenko A., Zrost K., Schröter C.D.* // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2004. V. 37, P. L407.
34. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Мир. 1979. 312 с.
35. *Shampine L.F., Watts H.A.* DEPACK — design of a user oriented package of ODE solvers. Report SAND79-2374. Sandia Laboratories. 1979.
36. *Paulus G.G., Nicklich W., Zacher F. et al.* // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 1996. V. 29. P. L249.