

СВОЙСТВА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОФИЛЕЙ ВОЛНЫ СОЛИТОНОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССАХ В КРИСТАЛЛАХ

Б. М. Даринский, Д. Ю. Гребенников, А. В. Крутов, М. Н. Чаплыгин, С. В. Шершнев

Воронежский государственный университет

Математическому моделированию и исследованию различных нелинейных явлений в кристаллах, в частности, фазовых переходов в веществе и нелинейных волн, в настоящее время уделяется большое внимание. Характерной особенностью нелинейных явлений в кристаллах является форма профиля бегущей волны волновых процессов [1–5]. Для возможности сравнения, в качестве тестовых предлагаются некоторые геометрические идеальные модели профилей волн кинематического происхождения, определяемые параметрически, и исследуются их свойства. Предполагается, что особенностям формы соответствуют определенные физические нелинейные эффекты и закономерности [6–9], включая основанные на симметрии [10, 11]. Приводятся особенности геометрической формы солитонообразных решений, физическая интерпретация которых может являться предметом дальнейших исследований.

Ставится задача исследовать свойства геометрических моделей профилей волн в нелинейных волновых процессах в кристаллах с целью выявления в дальнейшем соответствующих физических закономерностей.

Солитонные волновые профили, как правило, выражаются через гиперболические функции [12, 3], особенности формы графического представления которых мы и рассмотрим.

Если положить круговой тангенс угла наклона касательной графика гиперболического котангенса равным тангенсу гиперболическому аргумента τ : $-1/\text{sh}^2 \tau = 1 - \text{cth}^2 \tau = \text{tg} \alpha = \text{th} \tau$, то получим уравнение вида $\text{cth}^3 \tau - \text{cth} \tau + 1 = 0$, ($\text{cth} \tau = -1/\phi_{q_2}$) или $\text{th}^3 \tau - \text{th}^2 \tau + 1 = 0$, которое имеет вещественный корень $\tau = \text{arth}(-\phi_{q_2}) = -0,9841985$, при этом тангенс гиперболический равен по величине характеристическому числу ϕ_{q_2} обобщенной второй q -пропорции: $\text{th} \tau = -\phi_{q_2}$, $\alpha = -\text{arctg} \phi_{q_2}$, удовлетворяющей кубическому уравнению $\phi_{q_2}^3 + \phi_{q_2}^2 - 1 = 0$. Это число равно отношению меньшей части к большей при таком делении целого, когда вторая степень этого отношения равна отношению большего к целому. Такое деление является частным случаем $n = 2$ обобщения деления в крайнем и среднем, когда n -я степень отношения меньшего к большему равна отношению ϕ_{nq} большего к целому, удовлетворяющему уравнению $\phi_{qn}^{n+1} + \phi_{qn}^2 - 1 = 0$; делению в крайнем и среднем отвечает значение $n = 1$ [1, 2].

Положим круговой тангенс угла наклона касательной графика гиперболического котан-

генса равным тангенсу гиперболическому со знаком минус того же аргумента τ : $-1/\text{sh}^2 \tau = 1 - \text{cth}^2 \tau = \text{tg} \alpha_t = -\text{th} \tau$. Получим характеристическое уравнение q -пропорции относительно $\text{th} \tau$

$$\begin{aligned} \text{th}^3 \tau + \text{th}^2 \tau - 1 &= 0, \quad (\text{th} \tau_t = \phi_{q_2} = 0,754877666), \\ \tau_t &= \text{arth}(\phi_{q_2}) = 0,984198, \\ \alpha_t &= -\text{arctg} \phi_{q_2} = -37,048^\circ. \end{aligned} \quad (1)$$

В соответствии с аналогом формул приведения для гиперболических функций, вещественный корень $\tau_t = \text{arth} \phi_{q_2} = 0,9841985$ уравнения (1) равен действительной части комплексного корня $0,984198509 + 1,570796326i$ характеристического уравнения 2-й q -пропорции относительно $\text{cth} \tau$, в то время как мнимая его часть равна $\pi/2$.

Как видно на рис. 1 и как легко убедиться аналитически, значение $\tau_t = \text{arth} \phi_{q_2}$ близко к тому, которое соответствует точке котангенсоиды гиперболической, в которой ее нормаль является центральной, т.е. проходит через начало координат, а полярный радиус минимален и совпадает с единственной общей нормалью двух ветвей. Аналогичная ситуация имеет место для свойств котангенса кругового, где фигурирует вторая p -пропорция ϕ_{p_2} , удовлетворяющая уравнению $\phi_{p_2}^3 + \phi_{p_2} - 1 = 0$ и равная отношению меньшей части к большей при таком делении целого, когда это отношение равно второй степени отношения большего к целому.

Значение ϕ_{q_2} второй q -пропорции и соответствующее положение нормалей соответствует также решению механической модели минимальной задачи о гарантированном максималь-

© Даринский Б. М., Гребенников Д. Ю., Крутов А. В., Чаплыгин М. Н., Шершнев С. В., 2006

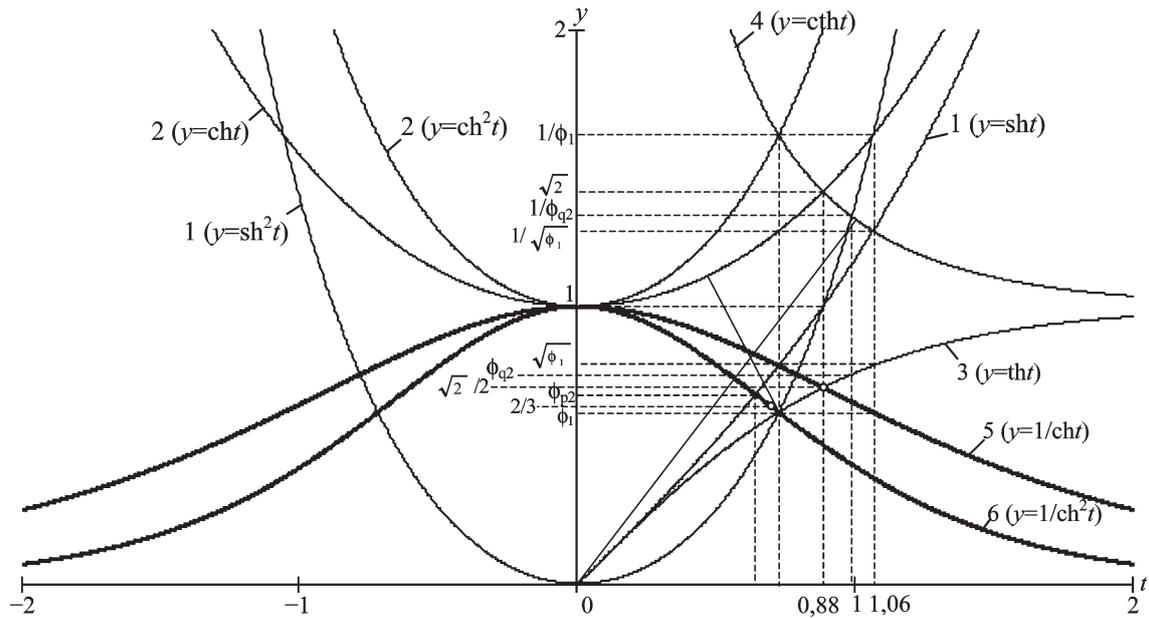


Рис. 1. Геометрическая форма и свойства солитонообразных решений. Если $1/\text{ch}^2 = \text{sh}$, то $\text{sh} = \phi_{p2}$, если $1/\text{ch}^2 = \text{th}$, то $1/\text{ch}^2 = \phi_1$, если $\text{sh}^2 = \text{cth} = 1/\phi_{q2}$, $y = 2/3$ — перегиб

ном выигрыше для случая движения стержня в криволинейном канале, образованном двумя ветвями гиперболического котангенса.

Минимальное расстояние между тангенсоидой и косинусоидой гиперболическими измеряется отрезком, равным около 0,545, который проходит близко к точке пересечения тангенсоиды и солитонной кривой $y = 1/\text{ch}^2 t$, тангенс угла наклона касательной которой в этой точке равен ϕ_1 , а сам угол α равен 0,55357 рад или $31,71747^\circ$ (величина t , соответствующая этой точке, равна $\text{arth} \phi_1 = 0,7218$). Эта солитонная кривая пересекается с синусоидой под прямым углом.

Заметим, что, кроме геометрического моделирования физических явлений, движения в криволинейных каналах изучаются в связи с исследованием нетрадиционных способов передвижения, в частности, рыб, ужей, обладающих высоким коэффициентом полезного действия [13, 14], а также в связи с изучением механизма проникновения молекулы ДНК в клетку [15, 16].

Известны различные точные решения волновых уравнений солитонного типа, содержащие синусоидальные составляющие как эллиптических так и гиперболических функций, и другие исследования, указывающие на существенную роль этих функций в различных нелинейных процессах [17, 18], хотя их геометрическим свойствам, безусловно отражающим и физические особенности, не уделялось должного внимания.

На рис. 2 приведена параметрически заданная кривая кинематического происхождения

$$a := 1 \quad \phi_1 := \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} \quad r := \phi_1 \quad \psi := \text{asin} \left(\frac{r}{a} \right)$$

$$x(\tau) := (\tau - \cos(\tau)) + \cos(\psi) \cdot \cos(\tau - \psi) \quad y(\tau) := \cos(\psi) \cdot \sin(\tau - \psi)$$

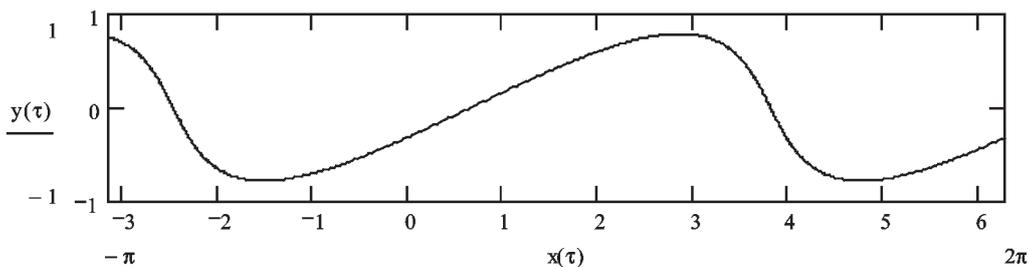


Рис. 2. Форма профиля бегущей волны типа «цунами» как геометрической модели солитоноподобного решения нелинейного волнового уравнения, определяемого в параметрическом виде трансцендентными зависимостями

$$\begin{aligned} x/a &= (\tau - \cos \tau) + \cos y \cos(\tau - \psi), \\ y/a &= \cos y \sin(\tau - \psi), \end{aligned} \quad (2)$$

которая может служить геометрической моделью солитоноподобного решения нелинейного волнового уравнения, а также волны прилива, цунами. Она пересекает ось абсцисс в точках $\tau = x = \alpha_1 + \pi k$, имеет перегиб в точках $\tau = 2\pi k$, где угол наклона касательной $\alpha = \arctg \phi_1 \sqrt{\phi_1} = = 0,48586$ рад = $25,9136^\circ$, и в точках $\tau = \pi(2k + 1)$, где угол наклона касательной равен $\alpha = -\arctg(1/\phi_1 \sqrt{\phi_1}) = -2,05817 = -64,0863^\circ$, так что угол между касательными в соседних точках перегиба равен прямому.

Уравнения (2) — это ψ -параметрическое семейство кривых-солитонов (группы, «стаи» солитонов). Уравнения его огибающей (группового, огибающего солитона) получаются из уравнений (2) семейства обычным путем: исключением одного из параметров с помощью уравнения связи между ними, которое имеет вид

$$\sin(\tau - 2\psi) \cos \psi [\cos(\tau - \psi) + \cos \tau] - \cos \tau (1 - \sin \tau) = 0. \quad (3)$$

При изменении параметра, которому соответствует тот или иной солитон, профиль трансформируется, в частности, при некотором значении параметра начинается нелинейный процесс «обрушивания» волны, являющейся известным решением, например, уравнения Кортевега — де Фриза (рис. 3). График кривой такого типа, полученный из модельных уравнений, представлен на рис. 4.

На рис. 5 изображена модель нелинейных волн пилообразного профиля, часто встречающихся как в физике твердого тела так и в различных других областях [19]

$$x_{p\lambda} = \tau - \cos \tau - [1 + \phi_{p2}^{3/2}] \sin(\tau - \tau_\lambda),$$

$$y_{p\lambda} = [1 + \phi_{p2}^{3/2}] \sin(\tau - \tau_\lambda).$$

Выводы. Установлены свойства профилей солитонных волн, отвечающие физическим

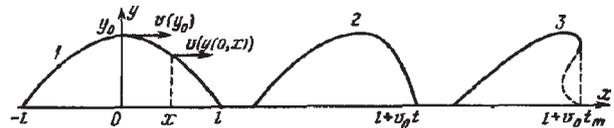


Рис. 3

$$\begin{aligned} \tau &:= -3\pi, -3\pi + 0.01.. 4\pi & \phi &:= 0.682327803828019 & a &:= \phi(\sqrt{\phi} + \phi^2) & b &:= \sqrt{\phi} + \phi^2 \\ x(\tau) &:= \tau + (a - 1)\cos(\tau) - b \sin(\tau) & y(\tau) &:= a \cdot (\cos(\tau) - b) \cdot \sin(\tau) \end{aligned}$$

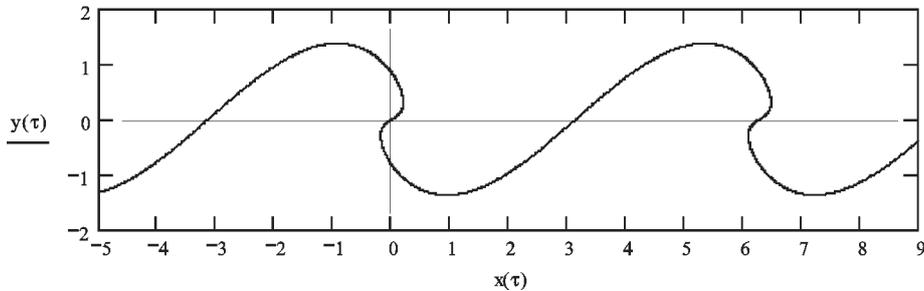


Рис. 4. «Обрушивающийся» профиль

$$\begin{aligned} \tau &:= -3\pi, -3\pi + 0.01.. 4\pi & \phi &:= 0.682327803828019 & a &:= (1 + \phi\sqrt{\phi}) & \theta &:= \text{atan}(\phi) \\ x(\tau) &:= \tau - \cos(\tau) - a \sin(\tau - \theta) & y(\tau) &:= a \cdot \cos(\tau - \theta) \end{aligned}$$

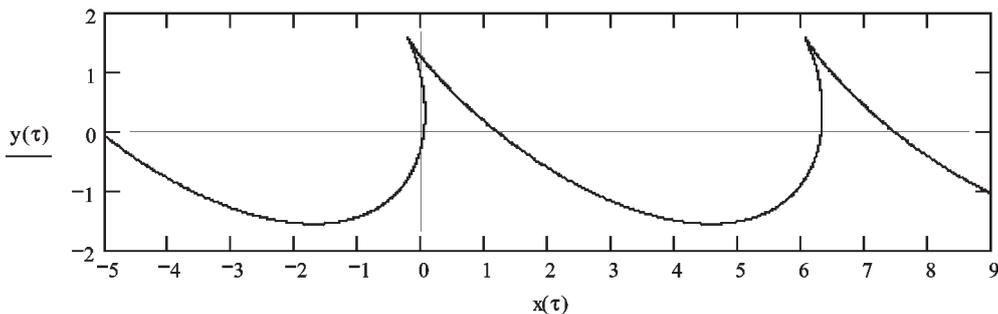


Рис. 5. Аналитическая модель пилообразного профиля нелинейных волн

закономерностям, проявляющимся в виде обобщенных пропорций во многих физических процессах, в т.ч. в нелинейных явлениях в конденсированных средах, в кристаллах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Редкозубов С.А., Крутов А.В.* О связи обобщенной гармонической пропорции с представлением функций // Оптимизация и моделирование в автоматизированных системах: Межвуз. сб. науч. тр. — Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т, 2003. — С. 248—253.

2. *Гребенкина Н.А.* / Моделирование синергетических и фрактальных свойств самоподобия / Н. А. Гребенкина, Б. М. Даринский, А. В. Крутов, С. А. Редкозубов, М. Н. Чаплыгин // Прикладные задачи моделирования и оптимизации: Межвуз. сб. науч. тр. — Воронеж: ВГТУ, 2005. — С. 131—137.

3. *Даринский Б.М., Дьяченко А.А., Крутов А.В., Сапронов Ю.И., Чаплыгин Н.М.* Математическое моделирование фазовых переходов в доменной границе кристаллов // Оптимизация и моделирование в автоматизированных системах: Межвуз. сб. науч. тр. — Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т, 2005. — С. 159—163.

4. *Чаплыгин М.Н.* / Модели нелинейных волн в ферроиках / М. Н. Чаплыгин // Высокие технологии в технике, медицине и образовании. Межвуз. сб. науч. тр. — Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т, 2005 — С. 250—259.

5. *Малинецкий Г.Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 256 с.

6. *Дитрих Я.* Проектирование и конструирование. Системный подход. — М.: Мир, 1981. — 456 с.

7. *Брахман Т.Р.* Многокритериальность и выбор альтернативы в технике. — М.: Радио и связь, 1984.

8. *Ларин Ю.С.* Системный подход и эволюционика // Система. Симметрия. Гармония. — М.: Мысль, 1988. С. 130—144.

9. *Кривошапко С.Н.* Геометрия и прочность торсовых оболочек: Реферативная информация. — М.: Изд-во АСВ, 1995. — 273 с.

10. *Федоров Е.С.* Основные работы по симметрии и структуре кристаллов. — М.: Изд. АН СССР, 1949.

11. *Шубников А.В., Коцик В.А.* Симметрия в науке и искусстве. — М.: Наука, 1972.

12. *Санюк В.И.* Многомерные солитоны. Введение в теорию и приложения. — М.: Изд-во РУДН. — 2001. — 481 с.

13. *Лаврентьев М.А., Лаврентьев М.М.* Об одном принципе создания тяговой силы для движения // ПМТФ. — 1962. — С. 3—9.

14. *Шер Е.Н.* О механизме движения ужей и рыб. — В сб. Некоторые проблемы математики и механики. — Л.: Наука, 1970. — С. 267—276.

15. *Немцов В.Б.* Использование модели упругого стержня для описания проникновения молекулы ДНК в клетку // Теоретическая и прикладная механика: Межведомственный сб. научно-методических статей. Вып. 18. — Минск: Белорусский национальный технический университет. — 2005. — С. 93—96.

16. *Gennes P.G.* Problems of DNA entry into a cell // Physica. 274, 1990. P. 1—7.

17. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. — М.: Наука, 1985. — 126 с.

18. *Петухов С.В.* Биомеханика, бионика и симметрия. — М.: Наука, 1981. — 240 с.

19. *Руденко О.В.* Нелинейные пилообразные волны // УФН. — 1995. — 38(9). — С. 965—990.