

ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСА КОНТУРА С ПОВЫШЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

В. В. Белоглазов, Н. Д. Бирюк

Воронежский государственный университет

Классическая теория резонанса колебательного контура удобна для высокодобротных контуров. В случае обобщения на параметрические и нелинейные контуры эта теория оказывается слишком частной, в связи с чем изначально трудно найти направление обобщения. В настоящей публикации предлагается более общий вариант теории резонанса обычного контура и представлена методика обобщения предложенной теории резонанса на параметрический контур.

Классическая теория резонанса колебательного контура удобна для высокодобротных контуров. В случае обобщения на параметрические и нелинейные контуры эта теория оказывается слишком частной, в связи с чем изначально трудно найти направление обобщения. В настоящей публикации предлагается более общий вариант теории резонанса обычного контура и представлена методика обобщения предложенной теории резонанса на параметрический контур.

При классическом подходе математической моделью обычного контура является обыкновенное дифференцированное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Обычно рассматривают последовательный или, двойственный ему, параллельный контур. Процессы в таком контуре совпадают с процессами в маятнике при малых колебаниях. Подмеченная аналогия является полезной как для механики, так и для электротехники. Однако диссипация в эти колебательные системы вводится по-разному. В случае маятника она объективно существует за счет вязкого трения маятника о воздух. В контуре она может проявляться по-разному, вплоть до подключения разными способами любого количества активных сопротивлений. В таких случаях аналогия между контуром и маятником нарушается. Из физических соображений следует, что, при уточненном анализе процессов в контуре, в последний должны быть включены несколько активных сопротивлений хотя бы потому, что диссипативные потери в конденсаторе и индуктивности нужно учитывать отдельно. Кроме того, контур

обычно бывает нагружен, в большинстве случаев входным сопротивлением нагрузки является активное сопротивление. Из этих соображений следует, что при общем подходе колебательный контур сложнее, чем последовательный или параллельный.

На рис. представлена схема предлагаемого для анализа колебательного контура, питаемого двумя источниками электрической энергии: один является источником тока $j(t)$, другой – источником напряжения с э.д.с. $\mathcal{E}(t)$.

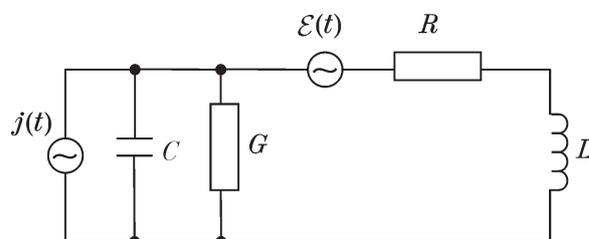


Рис. Схема анализируемого колебательного контура

Можно предложить бесконечное множество математических моделей такого контура в зависимости от того, какие две функции процесса выбраны в качестве определяющих. При классическом подходе в их роли применяются заряд q конденсатора и магнитный поток Φ , пронизывающий катушку индуктивности. При рассмотрении нескольких альтернативных вариантов оказалось, что, по-видимому, классический подход приводит к наиболее простым уравнениям.

Законы Кирхгофа приводят к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка, представленных здесь в развернутом векторном виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G}{C} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j(t) \\ \mathcal{E}(t) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Для удобства анализа резонансных явлений эту систему целесообразно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j(t) \\ \mathcal{E}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{G}{C} & 0 \\ 0 & \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Левая часть системы (2) не содержит активных сопротивлений. В правой части находятся элементы, отдающие в контур энергию (j, \mathcal{E}) и отбирающие энергию от него (G, R) . Согласно одной из гипотез, в явном виде приведенной в [1], при резонансе источники энергии выполняют две функции: а) в точности компенсируют диссипативные потери и б) задают начальные условия в реактивностях. Если это так, то уравнение (2) распадается на два уравнения:

$$\begin{bmatrix} j(t) \\ \mathcal{E}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G}{C} & 0 \\ 0 & \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Поскольку последняя система не содержит активных сопротивлений, то она представляет собственные колебания заряда и магнитного потока в контуре. Система (3) дает выражения для резонансных задающих тока и э.д.с. через соответствующие собственные колебания. Очевидно, что конкретные собственные колебания можно найти из (4), если задать вполне определенные начальные условия. При резонансе они задаются задающим током $j(t)$ и э.д.с. $\mathcal{E}(t)$. Рассмотрим этот механизм подробнее.

Исключив одну из переменных в (4), из системы получим одно уравнение или относительно q , или относительно Φ :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{1}{LC} \Phi = 0. \quad (5)$$

Решениями этих уравнений являются функции

$$q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \quad \Phi = \Phi_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \quad (6)$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — собственная частота, $Q_m, \varphi_1,$

Φ_m, φ_2 определяются из начальных условий.

Из (3) имеем

$$\begin{aligned} j(t) &= \frac{G}{C} q = \frac{G}{C} Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ \mathcal{E}(t) &= \frac{R}{L} \Phi = \frac{R}{L} \Phi_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Как видно, возмущающие функции должны входить в множество собственных колебаний контура. Можно выразить собственные колебания через задающие резонансные функции.

$$\begin{aligned} q &= Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1) = \frac{C}{G} j(t), \\ \Phi &= \Phi_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2) = \frac{L}{R} \mathcal{E}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

а также их производные

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \omega_0 Q_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{C}{G} \frac{dj(t)}{dt}, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \omega_0 \Phi_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{L}{R} \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) позволяют задать начальные условия для любого из уравнений (5). При известных резонансных $j(t)$ и $\mathcal{E}(t)$ имеем

$$\begin{aligned} q(0) &= Q_m \cos \varphi_1 = \frac{C}{G} j(0), \\ \frac{dq(0)}{dt} &= -\omega_0 Q_m \sin \varphi_1 = \frac{C}{G} \frac{dj(0)}{dt}, \\ \Phi(0) &= \Phi_m \cos \varphi_2 = \frac{L}{R} \mathcal{E}(0), \\ \frac{d\Phi(0)}{dt} &= -\omega_0 \Phi_m \sin \varphi_2 = \frac{L}{R} \frac{d\mathcal{E}(0)}{dt}. \end{aligned} \quad (10)$$

Эти выражения дают возможность вычислить амплитуды и начальные фазы в (6) и тем самым полностью определить резонансные колебания при известных резонансных возмущениях:

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{C}{G} \sqrt{j^2(0) + \frac{1}{\omega_0^2} \left[\frac{d}{dt} j(0) \right]^2}, \\ \varphi_1 &= -\arctg \frac{j'(0)}{\omega_0 j(0)}, \\ \Phi_m &= \frac{L}{R} \sqrt{\mathcal{E}^2(0) + \frac{\mathcal{E}'^2(0)}{\omega_0^2}}, \\ \varphi_2 &= -\arctg \frac{\mathcal{E}'(0)}{\omega_0 \mathcal{E}(0)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь через штрих обозначена производная во времени.

Из практики известно, что довольно часто можно не отличить резонанс от околорезонансного явления. При нашем подходе следует, что резонанс реализуется при двух источниках энергии с четким разделением их функционирования. Именно, источник тока $j(t)$ компенсирует тепловые потери в проводимости G , а э.д.с. $\mathcal{E}(t)$ — в сопротивлении R .

В классическом анализе идея о том, что резонансные возмущающие функции и отклик при резонансе принадлежат собственным колебаниям контура, содержится в завуалированном виде. Обычно в практике резонанс определяют по максимуму или минимуму амплитуды той или иной функции процесса. Если взять за основу этот признак, то в обычном последовательном контуре содержится бесконечное множество резонансных частот. Допустим, что для нашего контура выполняются условия: $G = 0$, $j \equiv 0$. Тогда получается обычный последовательный контур. Если он возмущается гармонической э.д.с. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \cos \omega t$, то вынужденные колебания тока будут также гармоническими:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (12)$$

С изменением частоты ω найдется такая особая, резонансная частота $\omega_i = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, при которой амплитуда тока максимальна:

$$(I_m)_{\max} = \frac{\mathcal{E}_m}{R}.$$

назовем эту частоту

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad (13)$$

частотой резонанса для тока. Если же выбрать другие функции процесса, то для них будет своя частота резонанса. Рассмотрим в этой роли напряжения на емкости и индуктивности

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{\int i(t) dt}{C}, U_L = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (14)$$

Нетрудно убедиться, что их амплитуды равны

$$U_{cm} = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$U_{Lm} = \frac{\omega L \mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Исследуя на максимум функции $U_{cm} = U_{cm}(\omega)$ и $U_{Lm} = U_{Lm}(\omega)$, получим соответствующие резонансные частоты для напряжения емкости и напряжения индуктивности:

$$\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}},$$

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}. \quad (15)$$

Здесь $\alpha = \frac{R}{2L}$ — коэффициент затухания контура, $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — характеристическое сопротивление, $Q = \frac{\rho}{R}$ — добротность контура.

Любая из частот $\omega_i, \omega_L, \omega_C$ является резонансной в своем роде. Среди них выделяется частота ω_i поскольку она относится к току, а ток — функция процесса, принадлежащая всем трем элементам контура L, C, R . Резонансные частоты связаны между собой простым соотношением

$$\omega_i = \sqrt{\omega_C \omega_L}.$$

Можно толковать эти резонансные частоты по-другому, ω_i является резонансной частотой тока, ω_L — резонансной частотой производной тока $\frac{di}{dt}$, ω_C — интеграла тока $\int i dt$. Если ввести в рассмотрение вторую, третью, и т.д. производные, а также двойной, тройной и т.д. интегралы, то получим бесконечное множество резонансных частот простого последовательного контура. Если уменьшить активное сопротивление контура, то его резонансные частоты сближаются, а при $R = 0$ сливаются в одну резонансную частоту $\omega_p = \omega_0$, которая равна собственной частоте контура. Отсюда видно, что даже в случае простого последовательного контура активное сопротивление ослабляет резонанс, «размазывает» его на оси частот. Если в контур подключено несколько активных сопро-

тивлений, то явление резонанса радикально усложняется. Покажем это на примере контура рис., который отличается от последовательного только лишь одной активной проводимостью G . Полагаем $j(t) \equiv 0$. Наш контур двойственный по отношению к самому себе. Поэтому отклик на ток $j(t)$ будет таким же как и отклик на э.д.с. $\mathcal{E}(t)$, но по отношению к двойственному контуру. Отклик сразу на две задающие функции может быть найден по принципу суперпозиции. Другими словами, задающий ток $j(t)$ не добавляет ничего нового в исследование резонанса традиционными методами.

Попытка дать аналогичный анализ более сложного контура по рис. связана с трудностями, возникающими при исследовании более громоздких по сравнению с последовательным контуром, функций на максимум. Нам удалось только найти резонансную частоту, на которой амплитуда тока в сопротивлении R достигает максимума:

$$\omega_i = \omega_0 \sqrt{\sqrt{1 + 2\rho G(1 + \rho G)} - \rho^2 G^2}. \quad (16)$$

Как видно, это выражение значительно сложнее формулы (13) для последовательного контура $\omega_i = \omega_0$ и вырождается в нее при $G = 0$. А между тем контур на рис. отличается от последовательного только лишь проводимостью G . Для высокодобротных контуров, когда $\rho G \ll 1$ выражение (16) упрощается

$$\omega_i = \omega_0 \sqrt{1 + \rho G} = \omega_0 \left(1 + \frac{\rho G}{2} \right).$$

Из физических соображений следует, что проводимость G может быть малой, но не равной нулю. Именно, потери в диэлектрическом заполнении конденсатора принято учитывать в виде подключения параллельно конденсатору активной проводимости. Колебательные контуры в технике применяются так широко, что не могут считаться высокодобротными во всех частных случаях. В системах радиосвязи применяются высокодобротные резонансные контуры. В радиоизмерительных приборах резонансного типа гарантировать высокой добротности нельзя, т.к. некоторые элементы контура могут быть измеряемыми, т.е. изначально неизвестными. Например, измеряемый конденсатор может быть с большими потерями и входить в колебательный контур в качестве его емкости. В таких случаях формула (16) может быть использована для повышения точности измере-

ний. В мировоззренческом отношении формула подчеркивает ограниченность для практики соотношений, полученных для последовательного контура. В реальный нагруженный контур неявно подключается несколько сопротивлений, в число которых входят, например, входное сопротивление нагрузки, эквивалентные сопротивления приборов. Учет этих обычно выпускаемых из вида подробностей сильно усложняет расчетные формулы, полученные из теории последовательного контура. Если подключить параллельно индуктивности нашего контура другую активную проводимость, то выражение для ω_i сильно усложняется и становится намного более громоздким, чем (16). Заметим, что эта вновь подключенная проводимость имеет вполне реальный характер, она учитывает потери в ферромагнитном сердечнике катушки индуктивности (потери в металле как емкости, так и индуктивности включены в сопротивление R).

Как видно из вышеизложенного, традиционный подход анализа резонанса контура наталкивается на трудно преодолимые громоздкости при вполне естественном учете диссипативных потерь. В предлагаемом методе анализа с двумя источниками энергии j и э.д.с. \mathcal{E} подобных громоздкостей не возникает.

Трудности возрастают в случае применения традиционной теории резонанса для обобщений. Например, при разработке теории резонанса параметрического контура, элементы которого изменяются во времени независимо от протекающих в них токов, использовать традиционную теорию резонанса крайне трудно.

Это видно хотя бы из интересной и обстоятельной статьи Г. С. Горелика [1], заслуженно включенной в сокровищницу выдающихся достижений советской школы нелинейных колебаний, возглавляемой академиками Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси. Статья построена по определенному плану: контур представлен в виде линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами, затем применяется замена переменной, приводящая к такому же уравнению, но с постоянным коэффициентом при первой производной. Последнее уравнение берется за основу при построении теории резонанса. Заметим, что в случае подобных преобразований теряется часть информации, а полученные выводы для преобразованного уравне-

ния нельзя напрямую применять к исходному уравнению. Хотя для теоретических целей упомянутые преобразования вполне возможны и приводят иногда к интересным выводам общего характера, применять их для анализа конкретного контура совсем непросто, при этом часто бывают упущены интересные для практики подробности.

В нашем случае математической моделью контура является система двух уравнений первого порядка, которая напрямую получается из законов Кирхгофа, именно она берется за основу при разработке теории резонанса параметрического контура. При этом обнаруживаются многочисленные достоинства по сравнению с традиционным подходом, основанным на преобразованиях исходных уравнений. Покажем это.

Допустим, что в контуре рис. 1 все элементы изменяются во времени, независимо от протекающих по ним токов, т.е. $C = C(t)$, $L = L(t)$, $G = G(t)$, $R = R(t)$. В этом случае законы Кирхгофа приводят к системе уравнений, в точности совпадающей с (1), только все элементы матрицы оказываются зависимыми от времени. В случае одного дифференциального уравнения это не так, в состав коэффициентов уравнения входят производные во времени от элементов контура, т.е. они существенно усложняются по сравнению с обычным контуром. Анализ параметрического контура радикально усложняется по отношению к обычному контуру, в том числе и явление резонанса оказывается намного сложнее. Принципиальный подход к анализу этого явления приведен в статье [1], но из-за преобразования уравнения контура к специальному виду конкретные выводы этой статьи носят частный характер, в том числе и основное заключение о том, что вынуждающая функция

при резонансе должна представлять собой производную от собственного колебания контура.

При нашем подходе условия резонанса параметрического контура в сущности не отличаются от таковых для обычного контура, т.е. представляют собой выражение (3) и (4). Основная трудность здесь носит естественный характер и заключается лишь в том, что собственные колебания получаются при решении линейной системы (4) с переменными коэффициентами, а для обычного контура — с постоянными коэффициентами, первое намного сложнее. Резонансные задающие функции выражаются через собственные колебания (3), эта зависимость имеет более общий характер, чем основной результат статьи [1]. Физический смысл резонанса в нашем случае совершенно прозрачен, роль источников энергии специализирована: задающий ток $j(t)$ компенсирует тепловые потери G , а задающая э.д.с. $\mathcal{E}(t)$ — тепловые потери в R . Кроме того, эти источники энергии задают начальные условия для системы (4), в которой при резонансе возникают свободные колебания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен и обоснован метод исследования резонанса контура с повышенными потерями. Метод имеет более общий характер по сравнению с ранее разработанными и позволяет просто и естественно представить физический смысл этого важного явления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горелик Г.С. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами. — Журнал Технической физики. 1934. Т. 4. Вып. 10. С. 1783—1817; 1935. Т. 5. Вып. 2. С. 196—215; 1935. Т. 5. Вып. 3.