УДК 517.9

О СВЯЗИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ КОШИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ОДНОМЕРНЫМИ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Ю. В. Засорин

Воронежский государственный университет

В статье строится в явном виде фундаментальное решение Коши для одного трехмерного нестационарного уравнения 5 порядка. С его помощью строится решение задачи Коши для этого уравнения, находятся асимптотики и направления быстрого убывания.

Устанавливается связь между фундаментальными решениями некоторых классов линейных нестационарных уравнений в частных производных с фундаментальными решениями также нестационарных уравнений, но с меньшим числом переменных. В частности, метод редукции позволяет получать точные формулы фундаментальных решений некоторых пространственных нестационарных уравнений математической физики (например, Кадомцева—Петвиашвили, Кельвина—Фойгта и др.) с помощью известных фундаментальных решений одномерных стационарных уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Повышенный интерес к появившимся сравнительно недавно нестационарным уравнениям математической физики высоких порядков (особенно, с невыделенными производными по времени) привел к, несомненно, огромному прогрессу в качественной теории этих уравнений (см., напр., [1]). С другой стороны, изучение структуры решений этих моделей (линейных и нелинейных) в пространственном случае значительно отстает от одномерных моделей (см., напр., [2], [3]). Одна из причин этого — наличие несравнимо большего числа точных решений одномерных уравнений по сравнению с трехмерными (см. [1]—[3]). В частности, хорошим инструментом для исследования структуры решений трехмерных уравнений могли бы служить явные формулы фундаментальных решений, однако, за редким исключением (см., напр., [1], [4], [5]) такие формулы пока еще отсутствуют.

В данной статье предлагается метод, позволяющий с помощью известных фундаментальных решений для нестационарных операторов с малым числом пространственных переменных (в частности, одномерных) получать явные формулы для некоторых достаточно широких классов операторов с большим числом пространственных переменных (в частности, трехмерных). Как частный случай, этот метод позволяет построить фундаментальные решения нестационарного вязкого трансзвукового уравнения, пространственного уравнения Кадомцева—Петвиашвили, большого числа пространственных модификаций уравнений Кельвина—Фойгта и некоторых других известных нестационарных уравнений с невыделенной производной по времени.

§ 1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НЕВЫДЕЛЕННОЙ ВРЕМЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Введем обозначения. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ означают вектора евклидова пространства R^n, $n \ge 1$. Пусть, далее, $D_x = (D_1, \dots, D_n)$, $D_j = \partial / \partial x_j$, $j = 1, \dots, n$. Через R_+^{n+1} будем обозначать верхнее полупространство векторов $(t, x) \in R^{n+1}$, таких, что $t > 0$, а через Ω_ε — область в R_+^{n+1} всех точек (t, x), таких, что $t > \varepsilon > 0$. Как обычно, $S'(R^m)$, $m \ge 1$ будет обозначать пространство Шварца распределений умеренного роста, а $\mathring{S}'(\overline{R}_+^{n+1})$ — подпространство (см. [6]) всех распределений $T \in S'(R^{n+1})$, таких, что

$\operatorname{sup} p(T) \subset \bar{R}_+^{n+1}$. Как обычно, через $P(D_x)$ будем обозначать дифференциальные полиномы с постоянными вещественными коэффициентами.

Рассмотрим нестационарный оператор:

$$L = L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) \equiv P_1(D_x)\frac{\partial}{\partial t} + P_2(D_x). \qquad (1)$$

Для простоты будем полагать, что:

$$\operatorname{Re}(P_1(-i\xi)P_2(i\xi)) \geq 0. \qquad (2)$$

Введем понятие фундаментального решения Коши для оператора L.

Определение. Распределение $E(t,x) \in \overset{\circ}{S}'(\bar{R}_+^{n+1})$ будем называть фундаментальным решением Коши для оператора L, если:

$$LE(t,x) = 0,\ (t,x) \in R_+^{n+1}. \qquad (3)$$

$$(P_1(D_x)E)\big|_{t=+0} = \delta(x),\ x \in R^n, \qquad (4)$$

где $\delta \in S'(R^n)$ означает дельта-функцию Дирака.

Замечание 1. Термин «фундаментальное решение Коши» для операторов вида (1) (т. е. с невыделенной временной производной) не является устоявшимся (см., напр., [1]), однако он уже вводился ранее, по крайней мере, для нестационарного вязкого трансзвукового уравнения (см. [4]). Следующее утверждение показывает, что фундаментальное решение Коши, определяемое равенствами (3), (4), является и вполне «полноценным» фундаментальным решением в обычном смысле.

Теорема 1. *Фундаментальное решение Коши $E \in \overset{\circ}{S}'(\bar{R}_+^{n+1})$, определенное равенствами (3), (4), удовлетворяет уравнению:*

$$LE(t,x) = \delta(t) \otimes \delta(x). \qquad (5)$$

Доказательство: Не ограничивая общности, будем считать $E(t,x)$ регулярным распределением. Фиксируя произвольную пробную функцию $\varphi(t,x) \in S(R^{n+1})$, имеем:

$$\langle LE; \varphi\rangle \overset{def}{=} \left\langle E; L\left(-\frac{\partial}{\partial t}, -D_x\right)\varphi\right\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} E(t,x) L\left(-\frac{\partial}{\partial t}, -D_x\right)\varphi(t,x)dtdx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\{I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon)\},$$

$$I_1(\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} LE \cdot \varphi dtdx,$$

$$I_2(\varepsilon) = \int_{R^n} P_1(D_x)E(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)dx.$$

В силу равенства (3) интеграл $I_1(\varepsilon) = 0$, а в силу равенства (4) $I_2(\varepsilon) \to \varphi(0,0)$, $\varepsilon \to 0$. Что и доказывает равенство (5), а вместе с ним — и Теорему.

§ 2. КОНСТРУКЦИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ КОШИ ДЛЯ БОЛЬШЕГО ЧИСЛА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $y = (y_1, y_2)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ означают векторы пространства R^2, а $r = |y|$, $\rho = |\eta|$ — их евклидовы длины; $R^{n+2} = R^n \times R^2 = \{(x,y) : x \in R^n, y \in R^2\}$, $R^{n+3} = R \times R^{n+2} = \{(t,x,y) : t \in R, x \in R^n, y \in R^2\}$, $R_+^{n+3} = \{(t,x,y) \in R^{n+3} : t > 0\}$. Пусть, далее, $D = (D_x, D_y)$, $D_y = (\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2)$, а $\Delta = D_y \cdot D_y$ — двухмерный оператор Лапласа по переменным $y \in R^2$. Подпространство $\overset{\circ}{S}'(\bar{R}_+^{n+3}) \subset S'(R^{n+3})$ определим аналогично подпространству $\overset{\circ}{S}'(\bar{R}_+^{n+1})$ из предыдущего параграфа.

В пространствах $\overset{\circ}{S}'(\bar{R}_+^{n+1})$ и $\overset{\circ}{S}'(\bar{R}_+^{n+3})$ соответственно рассмотрим следующие операторы:

$$L^{(0)} = L^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t} + P(D_x), \quad \operatorname{Re}(P(i\xi)) \geq 0, \qquad (6)$$

$$L^{(1)} = L^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) \equiv P_1(D_x)\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_2(D_x)\right) - \Delta, \qquad (7)$$

$$P_j(D_x) = a_j + b_j \cdot D_x + c_j P(D_x),\ j = 1,2; \qquad (8)$$

$$a_j, c_j > 0,\ b_j \in R^n; \quad a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + |b_1| + |b_2| > 0. \qquad (9)$$

Теорема 2. *Пусть $E^{(0)}(t,x) \in \overset{\circ}{S}'(\bar{R}_+^{n+1})$ — фундаментальное решение Коши оператора $L^{(0)}$, определенного равенством (6). Тогда оператор $L^{(1)}$, определенный равенствами (7)—(9), также имеет фундаментальное решение Коши $E^{(1)}(t,x,y) \in \overset{\circ}{S}'(\bar{R}_+^{n+3})$, причем:*

$$E^{(1)}(t,x,y) = (4\pi t)^{-1} \cdot \exp(-\omega_1) E^{(0)}(\omega_2, z), \qquad (10)$$

$$\omega_1 = a_2 t + a_1 r^2/4t,\ \omega_2 = c_2 t + c_1 r^2/4t, \quad z = x - b_2 t - b_1 r^2/4t,\ r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \qquad (11)$$

Замечания. 2. Формулировка Теоремы 2 корректна, поскольку ограничение (6) на символ $P(i\xi)$ (являющееся частным случаем ограничения (2)) обеспечивает существование фундаментального решения Коши $E^{(0)}$; при этом в силу (6):

$$E^{(0)}(t,x) = (2\pi)^{-n}\theta(t)\int_{R^n}\exp(ix\cdot\xi - P(i\xi)t)d\xi, \quad (12)$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда.

3. Точно также ограничения (9) обеспечивают существование фундаментального решения Коши $E^{(1)}$, которое определяется аналогично фундаментальным решениям E из предыдущего параграфа (т. е. равенствами, аналогичными (3) и (4)).

4. Теорема 2 легко может быть обобщена (см. [7]) на случай $y \in R^{2m}$, $m > 1$ путем замены «двухмерного» лапласиана на «2m-мерный» $\Delta = D_y \cdot D_y$ в операторе $L^{(1)}$ из равенства (7); при этом соответствующее фундаментальное решение Коши $E^{(m)}(t,x,y)$ может быть получено из фундаментального решения $E^{(1)}$, определенного равенствами (10), (11) с помощью формулы:

$$E^{(m)} = (-2\pi)^{1-m}\left(\frac{\partial}{r\partial r}\right)^{m-1}E^{(1)},$$
$$r = |y|, \; m = 2,3,\ldots.$$

Доказательство Теоремы 2: Применим к распределению $E^{(1)}(t,x,y)$ прямое преобразование Фурье по пространственным переменным $(x,y)\in R^{n+2}$. Обозначая через $\hat{E}^{(1)}(t,\xi,\eta)$ Фурье-образ $E^{(1)}$, получим (см. Замечание 3), что:

$$\left[P_1(i\xi)\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_2(i\xi) + \rho^2\right)\right]\hat{E}^{(1)}(t,\xi,\eta) = 0, \quad t > 0; \quad (13)$$
$$P_1(i\xi)\,\hat{E}^{(1)}\Big|_{t=+0} = 1(\xi,\eta), \; (\xi,\eta)\in R^{n+2}.$$

Решая задачу Коши (13), находим:

$$\hat{E}^{(1)}(t,\xi,\eta) = \theta(t)(P_1(i\xi))^{-1}\times \times\exp[-(P_2(i\xi) + \rho^2 / P_1(i\xi))t]. \quad (14)$$

Восстановим распределение $E^{(1)}$ равенством:

$$E^{(1)}(t,x,y) = (2\pi)^{-n-2}\int_{R^{n+2}}\exp(ix\cdot\xi + iy\cdot\eta)\times \times\hat{E}^{(1)}(t,\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (15)$$

Заметим, что интеграл (15) может иметь (в силу равенства (14)) несуммируемую особенность на гиперплоскости $\{\xi = 0\}$. Обойдем эту трудность путем выбора подходящей регуляризации интеграла (15); например, сведением его к повторному:

$$E^{(1)}(t,x,y) = (2\pi)^{-n}\theta(t)\times \times\int_{R^n}\exp(ix\cdot\xi - P_2(i\xi)t)d\xi\cdot\hat{I}_1(t,y,\xi), \quad (16)$$

$$\hat{I}_1(t,y,\xi) = (2\pi)^{-2}(P_1(i\xi))^{-1}\times \times\int_{R^2}\exp(iy\cdot\eta - \rho^2 t / P_1(i\xi))d\eta = = (2\pi)^{-2}(P_1(i\xi))^{-1}\hat{I}_2(t,y,\xi). \quad (17)$$

В интеграле $\hat{I}_2$ перейдем к полярным переменным интегрирования (ρ,ψ), где $\rho = |\eta|$, а ψ — угол между векторами y и η:

$$\hat{I}_2(t,y,\xi) = \int_0^{+\infty}\exp(-\rho^2 t / P_1(i\xi))\rho d\rho\cdot\hat{I}_3(t,y), \quad (18)$$

$$\hat{I}_1(t,y) = \int_0^{2\pi}\exp(ir\rho\cos\psi)d\psi.$$

Интеграл $\hat{I}_3$ вычисляется непосредственно (см. [8], стр. 92, формула (7.12.2)) и равен:

$$\hat{I}_3(t,y) = 2\pi J_0(r\rho), \quad (19)$$

где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя 1-го рода. Из равенств (18) и (19) получаем, что:

$$\hat{I}_2(t,y,\xi) = 2\pi\int_0^{+\infty}\exp(-\rho^2 t / P_1(i\xi))J_0(r\rho)\rho d\rho. \quad (20)$$

Интеграл $\hat{I}_2$ из равенства (20) также может быть вычислен непосредственно (см. [8], стр. 60, формула (7.7.3.24)):

$$\hat{I}_2(t,y,\xi) = \pi t^{-1}P_1(i\xi)\cdot\exp(-P_1(i\xi)r^2 / 4t). \quad (21)$$

Объединяя (8), (16), (17) и (21), получаем, что:

$$E^{(1)}(t,x,y) = (4\pi t)^{-1}(2\pi)^{-n}\theta(t)\times \times\exp(-\omega_1)\int_{R^n}\exp(iz\cdot\xi - P(i\xi)\omega_2)d\xi, \quad (22)$$

где автомодельные переменные ω_1, ω_2 и z определены равенствами (11). Сравнивая формулы (12) и (22), немедленно устанавливаем справедливость равенства (10). Что и доказывает Теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демиденко Г.В., Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. —Новосибирск: Научная книга, 1998. — 438 с.

2. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988. — 694 с.

3. *Буллаф Р., Вадати М. и др.* Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М.: Мир, 1983. — 480 с.

4. *Засорин Ю.В.* Точные решения некоторых задач, описываемых нестационарными вязкими трансзвуковыми уравнениями // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1994. Т. 34, № 10. С. 1446—1488.

5. *Засорин Ю.В., Придущенко М.В.* Трехмерная математическая модель переходных процесов в плазме. // Матем. моделирование, 2005. — Т. 17, № 5. — С. 41—51.

6. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965. — 379 с.

7. Засорин Ю.В. Гармонический анализ в шварцевских пространствахх распределений и некоторые приложения к неклассическим задачам математической физики. // Сиб. мат. журнал, 1997. — Т. 38. № 6. — С. 1282—1299.

8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1974. — 295 с.

9. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Издательство иностранной литературы, 1956. — 528 с.

10. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990. — 528 с.