УДК 519.27

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В ЗАДАЧЕ ДОСТИЖЕНИЯ ЗАДАННОГО УРОВНЯ СУММАМИ НЕЗАВИСИМЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С БЕЗГРАНИЧНО-ДЕЛИМЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Ю. П. Вирченко, М. И. Яструбенко

Белгородский государственный университет

Доказывается локальная предельная теорема для распределения вероятностей случайного числа $\nu(E)$ слагаемых суммы $\sum_{k=1}^{\nu(E)}\xi_k$ положительных, одинаково распределенных по безгранично-делимому закону величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, при котором значение этой суммы переходит через заданный уровень $E \in \mathbb{N}$. При этом безгранично-делимый закон должен обладать конечным вторым моментом и несуммируемой в окрестности нуля весовой мерой в каноническом разложении Колмогорова.

1. Введение. В работе рассматривается задача достижения заданного уровня $E > 0$ для сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_k; k \in \mathbb{N}\}$, неотрицательных с вероятностью единица. Эта задача состоит в вычислении распределения вероятностей

$$P_E(n) = \Pr\{\nu(E) = n\},\ \ n = 1, 2, \ldots$$

для решетчатой случайной величины $\nu(E)$, определенной равенством

$$\nu(E) = \min\left\{n; \eta_n \equiv \sum_{k=1}^{n}\xi_k \ge E\right\}.$$

Такая задача возникает, например, в последовательном статистическом анализе [1], в некоторых задачах теории управления стохастическими системами и в теории надежности. Ранее было доказано [2], что в случае, если типичный представитель ξ последовательности случайных величин ξ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеет решетчатое экспоненциально убывающее распределение вероятностей, то в пределе $E \to \infty$ для распределения $P_E(n)$ справедлива предельная теорема локального типа, утверждающая, что распределение вероятностей в этом пределе асимптотически точно определяется посредством гауссовского распределения для приведенной случайной величины $\bar{\nu}(E)$, связанной с $\nu(E)$ (см. п.3).

Можно думать, что этот результат не является случайным, и он может быть распространен на более общий случай, когда распределение вероятностей типичного представителя последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ необязательно является: 1) решетчатым и/или 2) экспоненциально убывающим.

Возможность существования асимптотически точного распределения для приведенной величины $\bar{\nu}(E)$, при большой величине уровня E, связано с тем, что, в этом случае, почти каждая сумма величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, с необходимостью, должна составляться из большого числа слагаемых для того, чтобы она могла превзойти уровень E, т.е. почти для каждой реализации последовательности имеет место $\nu(E) \to \infty$. Тогда гауссовость асимптотически точного распределения можно связать со следующим фактом. При большом числе случайных, независимых и одинаково распределенных слагаемых $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с конечной дисперсией, для распределения центрированной случайной величины их суммы, при существовании у них ограниченной плотности [3], имеет место локальная предельная теорема типа классической теоремы Муавра—Лапласа. Остается связать гауссовость распределения центрированной суммы величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с гауссовостью распределения величины $\bar{\nu}(E)$. При этом условия решетчатости случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и экспоненциальность убывания их общего распределения вероятностей, которые были использованы при доказательстве предельной теоремы в [2], не являются, по-видимому, существенными. Экспоненциальность убывания распределения типичного представителя сказывается только на оценках точности асимптотической формулы.

Таким образом, естественно поставить вопрос о доказательстве локальной предельной теоремы, аналогичной той, что изучалась в [2], однако, без использования условий 1) и/или 2). В настоящей работе мы отвечаем на этот вопрос положительно в частном случае, когда общее распределение вероятностей F для случайных величин ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$ является сосредоточенным на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$ безгранично-делимым законом, который обладает конечным вторым моментом и, дополнительно, обладает несуммируемой в окрестности нуля весовой мерой $dG(s)/s^2$ в разложении по пуассоновским компонентам (см. п.2).

Ограничение применимости данного нами решения поставленной выше задачи только для безгранично-делимых законов связано с тем, что оно существенно использует каноническое представление Колмогорова для характеристических функций законов распределения указанного класса (см., например, [3]). Что же касается дополнительного условия на поведение меры $dG(s)/s^2$, то оно носит технический характер и дает возможность использовать обратное преобразование Фурье в качестве формулы восстановления распределений вероятностей сумм большого числа независимых случайных слагаемых на основе их характеристических функций.

2. Характеристические функции безгранично-делимых распределений. Пусть

$$\varphi(t) = \mathrm{E}\, e^{i\xi t} = \int_0^\infty e^{ixt} dF(x) \qquad (1)$$

— характеристическая функция сосредоточенного на $[0, \infty)$ безгранично-делимого закона F, обладающего конечным вторым моментом,

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \int_0^\infty x^2 dF(x) < \infty,$$

т.е. конечна дисперсия $\sigma = \mathrm{D}\xi = \mathrm{E}\,\xi^2 - (\mathrm{E}\,\xi)^2$. Тогда для функции $\varphi(t)$ справедливо каноническое разложение Колмогорова, т.е. существует конечная положительная мера $G(s)$ на $\mathbb{R}_+$ такая, что имеет место представление

$$\ln \varphi(t) = iat + \int_0^\infty \left(e^{its} - 1 - its\right) \frac{dG(s)}{s^2}, \qquad (2)$$

где $a = \mathrm{E}\,\xi$, $dG(s)/s^2$ — дифференциал меры, определяющий вклад пуассоновской компоненты с характеристической функцией $\exp(e^{its} - 1 - its)$ в безгранично-делимое распределение F.

В дальнейшем нам понадобится следующая оценка для модуля характеристической функции

$$|\,\varphi(t)\,| = \exp\left(-\int_0^\infty (1 - \cos(ts)) \frac{dG(s)}{s^2}\right) < C / |\,t\,|^\alpha \quad (3)$$

с некоторыми положительными α и C. С этой целью мы будем далее предполагать, что мера $G(s)$ в достаточно малой окрестности $[0, c)$, $c > 0$ обладает свойством $(dG(s)/ds)_- \geq \beta s$ с некоторым $\beta > 0$, где $(dG/ds)_-$ — левая нижняя производная неубывающей функции $G(s)$. Эквивалентная формулировка этого условия дается неравенством $G(s + \Delta) - G(s) \geq \beta s$, которое должно иметь место при $s \in [0, c)$ и достаточно малой величине Δ.

При выполнении указанного условия для меры $G(s)$, имеют место оценки

$$\int_0^\infty (1 - \cos(ts)) \frac{dG(s)}{s^2} \geq \int_0^c (1 - \cos(ts)) \frac{dG(s)}{s^2} \geq$$

$$\geq \beta \int_0^c (1 - \cos(ts)) \frac{ds}{s} = \beta \int_0^{ct} (1 - \cos(s)) \frac{ds}{s} \geq \alpha \ln |ct|$$

при некотором положительном $\alpha < \beta$. Откуда следует оценка (3) с $C = c^{-\alpha}$.

3. Локальная предельная теорема. Сформулируем утверждение, которое будет доказано в этом пункте.

Теорема. *Пусть типичный представитель ξ последовательности $\{\xi_n; n \in N\}$ независимых, неотрицательных случайных величин распределен по безгранично-делимому закону, который обладает конечным* *вторым моментом. Пусть, кроме того, мера $G(s)$ в каноническом разложении (2) характеристической функции этого закона обладает свойством $(dG(s)/ds)_- > \beta s$, при $s \in [0, c)$ и $\beta > 0$, $c > 0$. Тогда случайная величина $\bar{\nu}(E) = \dfrac{\nu(E) - E/a}{E^{1/2}}$ с вероятностью единица ограничена, и для распределения вероятностей ее значений справедлива асимптотическая при $E \to \infty$, $n \to \infty$, $E = na + xn^{1/2}$, $x < \infty$ формула (локальная предельная теорема)*

$$P_E(n) \equiv \Pr\{\nu(E) = n\} \sim$$

$$\sim \frac{a}{\sqrt{2\pi\sigma n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma}\right)(1 + O(E^{-1})), \qquad (5)$$

где $a = \mathrm{E}\xi$, $\sigma = \mathrm{D}\xi$.

□ Прежде всего заметим, что $\{\nu(E) = n\} = \{\xi_n > E - \eta_{n-1}, \eta_{n-1} < E\}$. Тогда, по формуле полной вероятности,

$$P_E(n) = \Pr\{\xi_n > E - \eta_{n-1}, \eta_{n-1} < E\} =$$

$$= \int_0^E \Pr\{\xi_n > E - u \mid \eta_{n-1} = u\} d\Pr\{\eta_{n-1} < u\}.$$

Так как η_{n-1}, ξ_n — независимые случайные величины, то

$$P_E(n) = \int_0^E \Pr\{\xi_n > E - u\} d\Pr\{\eta_{n-1} < u\}.$$

Ввиду одинаковой распределенности величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, имеем

$$P_E(n) = \int_0^E \Pr\{\xi > E - u\} d\Pr\{\eta_{n-1} < u\}. \qquad (6)$$

Вероятность $P_E(n)$ как функция от $E > 0$ является ограниченной и, на основании представления (6), непрерывной. Поэтому, для этой функции, наверняка, существует преобразование Лапласа.

Применим преобразование Лапласа к обеим частям равенства (6),

$$\psi(y, n) = \int_0^\infty e^{-yE} P_E(n) dE =$$

$$= \int_0^\infty e^{-yE} dE \int_0^E \Pr\{\xi > E - u\} d\Pr\{\eta_{n-1} < u\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-uy} d\Pr\{\eta_{n-1} < u\} \int_u^\infty e^{-y(E-u)} \Pr\{\xi > E - u\} dE =$$

$$= \int_0^\infty e^{-yu} d\Pr\{\eta_{n-1} < u\} \int_0^\infty e^{-vy} \Pr\{\xi > v\} dv.$$

Обозначив

$$\varphi_n(iy) = \int_0^\infty e^{-uy} d\Pr\{\eta_n < u\},$$

получим, на основании (1) и определения величины η_n, как суммы независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$,

$$\varphi_n(iy) = [\varphi(iy)]^n,$$

где $\varphi_1(iy) = \varphi(iy)$. Так как преобразование Лапласа, в терминах характеристической функции, дает нам

$$\int_0^\infty e^{-vy} \Pr\{\xi > v\} dv = -y^{-1} \int_0^\infty \Pr\{\xi > v\} de^{-vy} =$$

$$= -y^{-1} \int_0^\infty (1 - \Pr\{\xi < v\}) de^{-vy} =$$

$$= y^{-1}\left(1 + \int_0^\infty \Pr\{\xi < v\} de^{-vy}\right) = \qquad (7)$$

$$= y^{-1}\left(1 - \int_0^\infty e^{-vy} d\Pr\{\xi < v\}\right) = y^{-1}(1 - \varphi(iy)),$$

то функция $\psi(y, n)$ дается формулой

$$\psi(y, n) = y^{-1}(1 - \varphi(iy))[\varphi(iy)]^{n-1}.$$

Функция $\varphi(iy)$ непрерывна при $\operatorname{Re} t > 0$ и при $y = -it + \varepsilon$, $\varepsilon \to +0$ стремится к $\varphi(t)$. Кроме того, так как непрерывна производная по y функции $\varphi(iy)$ при $\operatorname{Re} t > 0$, которая остается конечной при $y \to +0$, равной $(-a)$, то из полученного представления (7) следует, что функция $\psi(-it, n) = \lim_{\varepsilon \to +0} \psi(-it + \varepsilon, n)$ является преобразованием Фурье по переменной E вероятности $P_E(n)$ и она определяется формулой

$$\psi(-it, n) = it^{-1}(1 - \varphi(t))[\varphi(t)]^{n-1}.$$

Покажем, что существует обратное преобразование Фурье функции $\psi(-it, n)$, которое дает нам вероятность $P_E(n)$,

$$P_E(n) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (1 - \varphi(t))[\varphi(t)]^{n-1} \frac{e^{-itE}}{t} dt. \qquad (8)$$

Это следует из оценки (3), при достаточно больших n, так как в этом случае выполняется $\alpha(n-1)>1$ и, поэтому, ввиду $|\varphi(t)|^{n-1}< C\,|t|^{-\alpha(n-1)}$, сходится несобственный интеграл Римана

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(-it,n)|\,dt<\infty.$$

Это гарантирует абсолютную сходимость интеграла Фурье (8), что, в свою очередь, обеспечивает равномерность относительно $E=an+xn^{1/2}$ сходимости интеграла (8) на пределах интегрирования. Заменим переменную интегрирования в (8) следующим образом,

$$P_E(n)=\frac{1}{2\pi n^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(-it/n^{1/2},n)e^{-itE/n^{1/2}}dt. \quad (9)$$

Вычислим асимптотику функции $\psi(-it/n^{1/2},n)$ при $n\to\infty$. Так как $|e^{itv}-1-itv|<(vt)^2/2$, то $|\varphi(t)-1-iat|<t^2(a^2+\sigma)/2$. Тогда имеет место асимптотическая формула $\varphi(t/n^{1/2})= =1+iat/n^{1/2}+(t^2/n)+O(1)$, равномерная по t и по n. Тогда тем же свойством обладает асимптотика $in^{1/2}t^{-1}(1-\varphi(t/n^{1/2}))=a+(t/n^{1/2})+O(1)$. Асимптотика функции $[\varphi(t/n^{1/2})]^n$ при $n\to\infty$ вычисляется следующим образом. Преобразуем интеграл в (2),

$$\int_0^t e^{isv}dv=\frac{1}{is}(e^{its}-1),$$

$$\int_0^t du\int_0^u e^{isv}dv=\frac{1}{is}\int_0^t(e^{ius}-1)du=-\frac{1}{s^2}(e^{its}-1-its).$$

Тогда представление в виде повторного интеграла в (2), можем записать

$$[\varphi(t/n^{1/2})]^n=$$
$$=\exp\left(ian^{1/2}t-n\int_0^{\infty}\left[\int_0^{tn^{-1/2}}\left(\int_0^u e^{isv}dv\right)du\right]dG(s)\right).$$

После последовательных замен $n^{1/2}u\Rightarrow u$, $n^{1/2}v\Rightarrow v$ переменных интегрирования, имеем для интеграла в показателе экспоненты следующее представление

$$n^{1/2}\int_0^{\infty}\left(\int_0^t du\int_0^{un^{-1/2}}e^{isv}dv\right)dG(s)=$$
$$=\int_0^{\infty}\left(\int_0^t du\int_0^u e^{isvn^{-1/2}}dv\right)dG(s),$$

из которого следует, что равномерно по t этот интеграл сходится к пределу при $n\to\infty$,

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^t du\int_0^u dv\right)dG(s)=\frac{t^2}{2}\int_0^{\infty}dG(s)=\frac{t^2}{2}\sigma,$$

где $\sigma=G(\infty)$. Отсюда следует, что имеет место равномерная по t асимптотическая формула

$$[\varphi(t/n^{1/2})]^n=\exp(ian^{1/2}t-\sigma t^2/2+o(1)),$$

Тогда, на основании вычисленных асимптотических формул, равномерных по n и по t, а также условия $E=na+xn^{1/2}$, получаем, что при $n\to\infty$ подинтегральная функция стремится к $a\exp(-ixt-\sigma t^2/2+o(1))$ и при этом сам интеграл сходится равномерно по n. Поэтому, предел можно вынести за знак интеграла и, следовательно, имеет место асимптотическая формула

$$P_E(n)\sim\frac{a}{2\pi n^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ixt-\sigma t^2/2)dt=$$
$$=\frac{a\exp(-x^2/2\sigma)}{\sqrt{2\pi\sigma n}}.\ \blacksquare$$

Замечание. Ввиду того, что оценка (3), использованная при доказательстве теоремы, влечет за собой абсолютную сходимость, при достаточно больших n, интеграла Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(t)]^{n-1}e^{-itE}dt,$$

т.е. ограниченность плотности распределения вероятностей случайной величины η_{n-1} при этих значениях n. Следовательно, полученный результат перекликается с локальной предельной теоремой Гнеденко для сумм независимых случайных величин [3]. Существование ограниченной плотности гарантируется только для больших n, но отнюдь не для распределения вероятностей типичного представителя ξ, так как характеристическая функция $\varphi(t)$ может соответствовать распределению, которое вообще не имеет плотности, например содержит дискретную компоненту, которая связана со скачками меры $G(s)/s^2$.

Заметим по этому поводу также, что, в отличие от метода доказательства указанной локальной предельной теоремы, в нашем случае можно оценивать точность асимтотической формулы для вероятности $P_E(n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wald A.* Sequential Analysis. New York, John Wiley & Sons, Inc. Charman & Hall, Ltd. London, 1947. (пер. на рус. яз. *Вальд А.* Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960).

2. *Вирченко Ю.П., Яструбенко М.И.* Локальная предельная теорема в задаче достижения заданного уровня суммой независимых случайных величин со случайным числом слагаемых. // Труды Воронежской зимней математической школы — 2004. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2004. С. 56—74.

3. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969.