

МАТЕМАТИКА

УДК 532. 529

**ВЛИЯНИЕ ОДНОРОДНОЙ МИКРОСТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА
НА ЕГО ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ТЕЧЕНИЕ**

Н. Д. Вервейко, А. А. Воронков, М. И. Быкова

Воронежский государственный университет

Рассматривается уточнение математической модели “Механика сплошных сред” для описания движения материалов с микроструктурой за счет введения характерного размера микроструктуры в тензор малых деформаций или скоростей деформаций. Это приводит к повышению порядка производных по геометрическим координатам до 4-го порядка в дифференциальных уравнениях Ламе для упругого материала и в уравнениях Навье–Стокса для вязкой жидкости. Качественно учет малого характерного размера микроструктуры материала ведет к уменьшению скорости распространения гармонических продольных и поперечных упругих волн, а в случае движения вязкой жидкости в круглой трубе, отмечаются цилиндрические слои более быстрого и более медленного движения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Механика сплошных сред как математическая модель реальных материалов, которые обладают относительно мелкой структурой вплоть до молекулярных размеров (жидкость, газ, металлы и др.), показала свою применимость с достаточной степенью точности, однако дальнейшее уточнение модельных расчетов требует учета характерных размеров и свойств микроструктуры. Необходимость учета не только геометрических параметров микроструктуры материалов, но и механического поведения микроструктур на микро- и нано-уровнях показана в работах [1—4] и ряде других. Погрешность математической модели «Механика сплошных сред» при описании поведения реальных материалов определяется следующими гипотезами:

1. Заменой действительного материала гипотетической сплошной средой, сформированной из материальных объемов с характерным геометрическим размером h при $h \rightarrow 0$.

2. Формулировкой уравнений движения (изменение количества движения и момента количества движения) материальных ча-

стиц и закона сохранения массы рассматриваемого элементарного объема (материальной частицы) с погрешностью порядка h^2 и записи их в предельном случае при $h \rightarrow 0$ с использованием понятий, операторов и правил дифференциального и интегрального исчислений.

3. Предположением о постоянном распределении напряжений на плоских участках исследуемого материального элемента.

4. Предположением об однородной деформации внутри рассматриваемого элемента, в замороженности деформаций в «представительный элемент».

Как следует из анализа математической модели «Механика сплошных сред», приведенные выше гипотезы содержат погрешность, определяемую самим геометрическим размером дискретизации $O(h)$ и погрешности аппроксимации законов сохранения импульса, момента импульса и массы величиной $O(h^2)$. Таким образом, суммарная оценка погрешности $R(h)$ математической модели «Механика сплошных сред» относительно реальных материалов складывается из: 1) погрешности R_m аппроксимации представительного элемента материальной точкой с характерным размером h ; 2) погрешности R_i аппроксимации законов изменения им-

© Вервейко Н. Д., Воронков А. А., Быкова М. И., 2005.

пульса и момента импульса представительного элемента; 3) погрешности R_p аппроксимации закона сохранения массы; 4) погрешности R_e, R_ε аппроксимации кинематических величин: деформации и скорости деформации; 5) погрешности R_σ аппроксимации распределения напряжений на площадке; 6) в случае численной реализации задач МСС необходимо добавить погрешность метода R_Δ и арифметическую погрешность R_δ при проведении вычислений с конечным числом знаков.

$$R(h) = R_m + R_i + R_p + R_e + R_\varepsilon + R_\sigma + R_\Delta + R_\delta. \quad (1.1)$$

Рассмотрим погрешность R_m , которая определяется характерным размером представительного элемента, механические свойства которого такие же, как и свойства материала в целом. Для газа или жидкости, поперечные размеры d молекул которых имеют величину $d \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$ мм, характерный среднестатистический размер h представительного элемента определяется количеством $10^3 \div 10^6$ молекул, так что h изменяется от $10^{-5} \div 10^{-4}$ мм до $10^{-4} \div 10^{-3}$ мм. Таким образом, для газа или жидкости погрешность R_m аппроксимации представительного элемента материальной точкой есть чрезвычайно малая величина $R_m = O(h^{-5} \text{ мм} \div h^{-3} \text{ мм})$ по сравнению с геометрическими размерами L задач при $L \sim 10^3$ мм. Для искусственных материалов, представляющих собой, например, гель-жидкость с равномерно распределенными в ней шариками (пропантом) такой же плотности как и жидкость и применяемого для гидроразрыва нефтяных и газовых пластов, характерный размер h имеет существенно большее значение, чем для газа. При $d \approx 10^{-2}$ мм характерный размер h представительного элемента будет $h \approx 10^{-1} \div 10^0$ мм и $R_m = O(10^{-1} \text{ мм} \div 10^0 \text{ мм})$. Еще большее значение характерного размера представительного элемента имеет место для сыпучих материалов и горных пород. Так для зерна при $h \approx 10^{-1}$ мм получаем $R_m = O(10^1 \text{ мм} \div 10^2 \text{ мм})$, а для горных пород при $h \approx 10^2$ мм получаем $R_m = O(10^3 \text{ мм} \div 10^4 \text{ мм})$. Из приведенных примеров следует необходимость учета характерного размера h при рассмотрении течения и деформирования материалов с большими размерами h представительных элементов. Разумеется, речь должна идти не о

погрешности в размерном виде, а об относительной погрешности, где $\bar{h} = h/L$, так что возможна малая величина погрешности аппроксимации представительного элемента точкой при больших характерных размерах L самой задачи. Погрешности выполнения законов сохранения импульса и массы в точке пространства имеют величину порядка (h^2/L) , $R_i = R_p = O(h^2/L)$.

2. ДЕФОРМАЦИЯ И СКОРОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ХАРАКТЕРНОГО РАЗМЕРА h МИКРОСТРУКТУРЫ

Необходимость уточнения кинематических параметров модельной сплошной среды возникает в случае учета геометрического размера h представительного элемента деформируемого твердого материала или жидкости с микроструктурой.

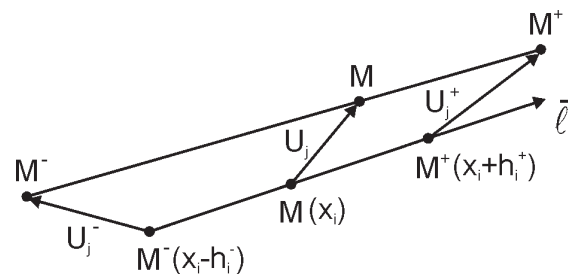


Рис. 1. Относительное изменение длины элемента дуги материала с заданным мгновенным полем перемещений U_j

Рассмотрим относительное изменение длины элемента материала с заданным мгновенным полем перемещений U_j ($j = 1, 2, 3$) (рис. 1). Элемент dS в первоначальной конфигурации для малых h_i может быть определен из выражения:

$$dS^2 = (x_i + h_i^+ - x_i + h_i^-)(x_i + h_i^+ - x_i + h_i^-) = (h_i^+ + h_i^-)(h_i^+ + h_i^-), \quad (2.1)$$

и для $h_i^+ = h_i^- = h_i$ получим:

$$dS_i^2 = 4h_i h_i. \quad (2.2)$$

В смежном деформированном состоянии элемент длины dS'^2 определим с учетом переноса концов отрезка dS полем перемещений U_j :

$$dS'^2 = (x_i + h_i^+ + U_i^+ - x_i + h_i^- - U_i^-) \times (x_i + h_i^+ + U_i^+ - x_i + h_i^- - U_i^-) = (h_i^+ + h_i^- + U_i^+ - U_i^-)(h_i^+ + h_i^- + U_i^+ - U_i^-). \quad (2.3)$$

Положим далее $h_i^+ = h_i^- = h$, l_j и $U_i^+ = U_i(x_j + hl_j)$, $U_i^- = U_i(x_j - hl_j)$, где l_j компоненты направляющего вектора отрезка M^-M^+ (рис. 1), $(l_j l_j = 1)$ и разложим в степенной ряд по h выражение для dS'^2 :

$$\begin{aligned} dS'^2 &= (2hl_i + U_i(x_j + hl_j) - U_i(x_j - hl_j)) \times \\ &\times (2hl_i + U_i(x_j + hl_j) - U_i(x_j - hl_j)) = \\ &= 4h^2 l_i l_i + 4h(U_i(x_j + hl_j) - \\ &- U_i(x_j - hl_j)) l_i + (U_i^+ - U_i^-)(U_i^+ - U_i^-), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$U_i^+ - U_i^- = 2h \frac{\partial U_i}{\partial x_j} l_j + \frac{1}{3} h^3 \frac{\partial^3 U_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} l_j l_k l_l + O(h^5), \quad (2.5)$$

j, k, l — индексы суммирования.

С учетом величин до h^5 выражение для dS'^2 примет вид:

$$\begin{aligned} dS'^2 &= 4h^2 + 8h^2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j} l_i l_j + 4h^2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} l_j \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} l_k \right) + \\ &+ \frac{4}{3} h^4 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} l_j \right) \left(\frac{\partial^3 U_i}{\partial x_k^3} l_k^3 \right) + \frac{4}{3} h^4 l_j^3 \frac{\partial^3 U_i}{\partial x_j^3} l_i + O(h^6). \end{aligned} \quad (2.6)$$

С точностью до величин порядка h при малых градиентах $\partial U_i / \partial x_j$ относительное изменение квадрата длины отрезка dS :

$$\lambda^2 = \frac{dS'^2 - dS^2}{dS^2} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) l_i l_j = 2\varepsilon_{ij}^c l_i l_j, \quad (2.7)$$

определяется тензором малых деформаций Коши ε_{ij}^c . Далее, в случае малых градиентов перемещений (малых деформаций) построим выражение для относительного удлинения квадрата элемента $dS = 2h$ с учетом величин до h^2 :

$$\lambda^2 = \frac{dS'^2 - dS^2}{dS^2} = 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j} l_i l_j + \frac{h^2}{3} l_j^3 \frac{\partial^3 U_i}{\partial x_j^3} l_i + O(h^4). \quad (2.8)$$

В симметричной форме выражение для λ^2 может быть представлено через тензор деформации:

$$\lambda^2 = 2 \left(\varepsilon_{ij}^c + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}^c}{\partial x_p \partial x_q} l_p l_q \right) l_i l_j + O(h^4). \quad (2.9)$$

Как следует из (2.9) относительное удлинение квадрата длины отрезка $2h$ в поле пе-

ремещений U_i определяется обычным тензором второго ранга ε_{ij}^c деформаций Коши при малых градиентах перемещений, а учет величин до третьего порядка по h добавляет еще одну деформационную характеристику — тензор четвертого ранга $D_{ijkl} = h^2 \varepsilon_{ij,kl}^c / 6$, который является симметричным по двум парам индексов $D_{ijkl} = D_{jilk}$.

Учет величин до h^3 в тензоре деформаций ε_{ij} приводит к факту неоднородного деформированного состояния представительного элемента $\Delta V = 8h^3$ и он, в модельном представлении, может рассматриваться как твердое тело в каждый фиксированный момент времени. Заметим, что в классическом представлении представительный элемент $\Delta V = 8h^3$ при малых деформациях рассматривается как твердое тело, меняющее свое однородное деформированное состояние в разные моменты времени.

Из тензора D_{ijkl} можно выделить главную часть, отвечающую гипотезе постоянства деформационных характеристик на гранях представительного элемента. Такими элементами тензора D_{ijkl} являются его отдельные элементы $\partial^2(\partial U_i / \partial x_j) / \partial x_k^2$ и $\partial^2(\partial U_j / \partial x_i) / \partial x_k^2$, отвечающие за изменение градиентов перемещений по направлению самих градиентов. Выделение главных слагаемых в тензоре D_{ijkl} может быть оправдано разложением в ряд Тейлора выражения для тензора деформации по Коши ε_{ij}^c , представленного в конечно-разностной форме. В самом деле:

$$\begin{aligned} dS'^2 &= 4h^2 + 8h^2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j} l_i l_j + 4h^2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} l_j \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} l_k \right) + \\ &+ \frac{4}{3} h^4 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} l_j \right) \left(\frac{\partial^3 U_i}{\partial x_k^3} l_k^3 \right) + \frac{4}{3} h^4 l_j^3 \frac{\partial^3 U_i}{\partial x_j^3} l_i + O(h^6). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Эти упрощения позволяют в рамках принятых допущений: постоянства деформаций на гранях представительного элемента и удержания слагаемых до порядка h^3 включительно, представить тензор малых деформаций в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 U_i}{\partial x_j^3} + \frac{\partial^3 U_j}{\partial x_i^3} \right). \quad (2.11)$$

Подсчитаем вектор вихря Ω_k , порожденный несимметричной «матрицей градиентов» поля

перемещений представительного элемента, отвечающего за деформацию этого элемента:

$$\nabla_j U_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 U_i}{\partial x_j^3}, \quad (2.12)$$

$$2\Omega_k = \varepsilon_{ijk} \nabla_j U_i = \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 U_i}{\partial x_j^3} \right). \quad (2.13)$$

Здесь ε_{ijk} — тензор Леви—Чивита:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{— при четной перестановке} \\ & \text{индексов } ijk, \\ 0 & \text{— при совпадении двух и более} \\ & \text{индексов } ijk, \\ -1 & \text{— при нечетной перестановке} \\ & \text{индексов } ijk, \\ & (i, j, k = 1, 2, 3), \end{cases}$$

$$\Omega_k = w_k + \frac{h^2}{6} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^3 U_i}{\partial x_j^3}, \quad (2.14)$$

при этом последнее слагаемое в (2.14) не является вектором вихря в классическом понимании, так как:

$$\begin{aligned} \Omega_{k,k} &= \text{div } \bar{\Omega} = w_{k,k} + \frac{h^2}{6} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^4 U_i}{\partial x_j^3 \partial x_k} = \text{div rot } \bar{U} + \\ &+ \frac{h^2}{6} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^4 U_i}{\partial x_j^3 \partial x_k} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 w_k}{\partial x_k^3} = \\ &= \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^3}{\partial x_3^3} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \right] \neq 0, \quad (2.15) \end{aligned}$$

где величина $\Omega_{k,k} = \sum_k \partial \Omega_k / \partial x_k$ определяет

изменение кривизны траектории вектора вихря элемента $\Delta V = 8h^3$, так что при малых кручениях вектора $\bar{\Omega}$, он является почти вектором вихря поля \bar{U} .

Кинематические построения меры скорости деформации $e_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ с учетом величин порядка h^2 , где h — характерный размер представительного элемента, можно распространить на мгновенное состояние течения материала, описываемое в скоростях v_i , вводя скорость деформирования $e_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$. В самом деле, введя λ^2 — скорость относи-

тельного удлинения квадрата длины отрезка $2h\bar{l}$, можно показать:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{dS'^2 - dS^2}{dS^2 dt} = \\ &= e_{ij}^c l_i l_j + \frac{h^2}{6} \frac{\partial e_{ij}^c}{\partial x_p \partial x_q} l_i l_j l_p l_q + O(h^4), \quad (2.16) \end{aligned}$$

где $e_{ij}^c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — тензор скорости

деформации Коши, $\dot{D}_{ijpq} = \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 e_{ij}^c}{\partial x_p \partial x_q}$ — до-

полнительный к скорости деформации тензор четвертого ранга, главной частью которого является тензор второго ранга

$$\frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 v_i}{\partial x_j^3} + \frac{\partial^3 v_j}{\partial x_i^3} \right),$$

не учитывающий переменность скорости деформации Коши e_{ij}^c на координатных площадках.

3. ВЛИЯНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ МАТЕРИАЛЕ

Рассмотрим распространение волн в упругом материале с учетом его микроструктуры в предположении малости деформаций. Закон Гука линейной связи напряжений и деформаций примем в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (3.1)$$

где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 U_i}{\partial x_j^3} + \frac{\partial^3 U_j}{\partial x_i^3} \right)$, $\varepsilon_{ij}^c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$.

Уравнение движения в напряжениях и перемещениях запишем так:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + \rho g_i. \quad (3.2)$$

Уравнение неразрывности для малых деформаций принимает вид постоянства плотности: $\rho = \rho_0$. В перемещениях система уравнений в частных производных представляет собой уравнения, содержащие четвертую производную по геометрическим координатам x_i и вторую по времени t [5]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} + \\ &+ \mu \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^4 U_i}{\partial x_k^3 \partial x_k} + \frac{\partial^4 U_k}{\partial x_k \partial x_i^3} \right) + \lambda \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 U_k}{\partial x_k^3 \partial x_i}. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Для классической объемной деформации $\varepsilon = \varepsilon_{kk} = \partial U_k / \partial x_k$ и вектора вихря $w_k = (1/2)\varepsilon_{ijk}\partial U_i / \partial x_j$, система уравнений (3.3) может быть упрощена путем применения к ней операций $\text{div } \Omega_i = \partial v_i / \partial x_i$ и вихря $\text{rot } \Omega_i = (1/2)\varepsilon_{ijk}\partial v_i / \partial x_j$, ($\text{div rot } \Omega_i \equiv 0$, $\text{div } \nabla \Omega = \Delta \Omega$):

$$\rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{h^2}{3} \left(\lambda \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k \partial x_l \partial x_l} + \mu \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x_i^3 \partial x_i} \right), \quad (3.4)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_i \partial x_i} + \lambda \frac{h^3}{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x_l \partial x_l \partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4 w_k}{\partial x_l \partial x_l^3} + \mu \frac{h^3}{6} \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x_i^3 \partial x_j} \varepsilon_{ijk}. \quad (3.5)$$

Для случая малых h можно решение уравнений строить в виде степенного ряда по h , так что в нулевом приближении, не содержащем h , последние два уравнения описывают распространение пространственных продольных и сдвиговых волн, бегущих со скоростями C_1 и C_2 продольных и поперечных упругих волн:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = C_1^2 \Delta \varepsilon \text{ и } \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} = C_2^2 \Delta w_k, \quad (3.6)$$

$$\rho C_1^2 = \lambda + 2\mu, \quad \rho C_2^2 = \mu,$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x_k \partial x_k$.

Рассмотрим поведение объемной деформации и вихря на фронте гармонических упругих волн. В одномерном случае уравнения движения для объемной деформации ε и вектора вихря w имеют вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2} + \frac{h^2}{3} (\lambda + \mu) \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial n^4},$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{h^2}{3} \mu \frac{\partial^4 w}{\partial n^4}. \quad (3.7)$$

Приведенные уравнения допускают решения в виде бегущих гармонических волн:

$$\varepsilon = A \sin k(n - C_1^h t), \quad w = B \sin k(n - C_2^h t), \quad (3.8)$$

где $C_1^h = C_1^e (1 - k^2 h^2 / 3)^{1/2}$, $C_2^h = C_2^e (1 - k^2 h^2 / 6)^{1/2}$; $C_1^e = [(\lambda + 2\mu) / \rho]^{1/2}$, $C_2^e = (\mu / \rho)^{1/2}$ — скорости продольных и поперечных волн в идеально упругой среде.

Из выражений для C_1^h и C_2^h следует их уменьшение за счет микроструктуры, по

сравнению со скоростями C_1^e и C_2^e в идеально упругом материале. Замедление волн от частоты k с отражает факт дисперсии волн в среде с микроструктурой, а также увеличение энергии волн за счет вовлечения в движение материала большего объема, чем в идеально упругом случае.

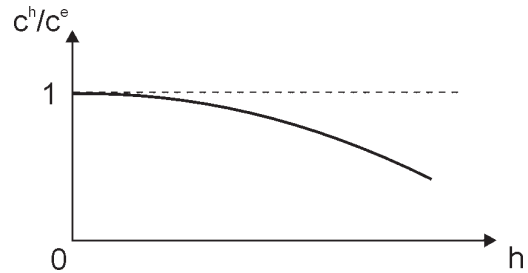


Рис. 2. Зависимость безразмерной скорости гармонических волн в упругом материале с микроструктурой от характерного размера h предельного элемента

4. ВЛИЯНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ НА СТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

В качестве примера влияния микроструктуры на стационарное напряженное состояние рассмотрим одномерное растяжение стержня длиной $2L$ (рис. 3).



Рис. 3. Схематическое изображение стержня длиной $2L$

Уравнение для перемещений примем из (3.5) в виде:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{h^2}{3} (\lambda + \mu) \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0. \quad (4.1)$$

Граничные условия примем следующие:

$$\begin{cases} x = \pm L; \\ U = \pm U_0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Введем безразмерные величины $V = U / U_0$, $n = x / L$, $\bar{h} = h / L$. Тогда из (4.1):

$$\frac{d^4 V}{dn^4} + \lambda_0^2 \frac{d^2 V}{dn^2} = 0, \quad (4.3)$$

где $\lambda_0^2 = 3C_1^2 / (C_1^2 - C_2^2) \bar{h}^2$.

Уравнение для V имеет четыре собственных значения:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \quad \lambda_{3,4} = \pm \lambda_0 i. \quad (4.4)$$

Так что безразмерное перемещение V можно представить:

$$V = D_1 + D_2 n + D_3 \sin \lambda_0 n + D_4 \cos \lambda_0 n. \quad (4.5)$$

Из граничных условий симметрии следует, что $D_1 = D_4 = 0$ и $D_2 + D_3 \sin \lambda_0 = \bar{U}_0$, то есть $D_2 = V_0 - D_3 \sin \lambda_0$. Заметим, что дифференциальное уравнение для V имеет четвертый порядок, и, поэтому необходимо дополнить граничные условия еще одним, что обусловлено введением характерного параметра $\bar{h} = h/L$ и, следовательно, необходимо учитывать граничный эффект приложения крайних усилий. Для классических граничных условий положим $\partial V / \partial n = \pm W_0 = U_0/L$ при $n = \pm 1$, так что $D_3 = 0$ и перемещение V как функция n примет вид $V(n) = V_0 n$.

В случае стационарного одномерного сдвига $U_1 = U_1(x_0)$, $U_2 = U_3 = 0$, $V_1 = U_1/U_0$, получим следующее уравнение для безразмерного перемещения V_1 :

$$\frac{d^4 V_1}{dn^4} + \frac{6}{\bar{h}^2} \frac{d^2 V_1}{dn^2} = 0. \quad (4.6)$$

Положим $k_1 = \sqrt{6}/\bar{h}_1$, $n = \pm 1$, $V_1 = \pm V_1^0$, $\partial V_1 / \partial n = \pm W_1^0$. Решение уравнения (4.6) представимо в виде:

$$V_1 = A_1 + A_2 n + A_3 \sin k_1 n + A_4 \cos k_1 n. \quad (4.7)$$

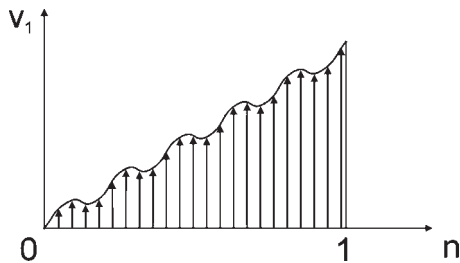


Рис. 4. График сдвиговых перемещений

Из граничных условий найдем: $A_1 = A_4$, $A_2 = (V_0 k_1 \cos k_1 - W_1^0 \sin k_1) / (k_1 \cos k_1 - \sin k_1)$, $A_3 = (V_1^0 - W_1^0) / (\sin k_1 - k_1 \cos k_1)$. Так что перемещение сдвига представимо одной формулой:

$$V_1 = \frac{V_0 k_1 - W_1^0 \operatorname{tg} k_1}{k_1 - \operatorname{tg} k_1} n + \frac{W_1^0 - V_1^0}{k_1 - \operatorname{tg} k_1} \frac{\sin k_1 n}{\cos k_1}. \quad (4.8)$$

В случае перемещения сдвига в виде $V_1 = an + b \sin k_2 n$ можно подсчитать величину вектора вихря $2W_3 = \partial V_1 / \partial n = a + bk_2 \cos k_2 n$.

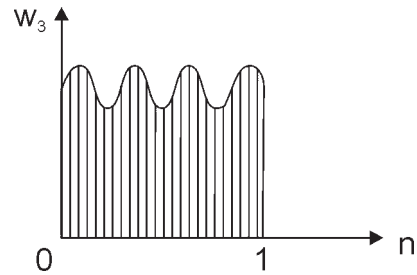


Рис. 5. График величины вектора вихря

Из последнего выражения для W_3 следует наличие слоев увеличенного и уменьшенного поворотов W_3 , по сравнению со случаем однородного материала без микроструктуры при $h \rightarrow 0$.

Таким образом, при одномерном сдвиге или растяжении-сжатии упругих материалов, эффект микроструктуры может быть выявлен только при граничных условиях специального вида.

Воспользовавшись методом возмущений по малому параметру h , вычислим напряжения в идеальной упругой задаче в перемещениях $U_r = U(r)$, а затем уточним значение радиальных напряжений σ_{rr} за счет тензора деформаций с учетом микроструктуры. Проведем оценку влияния микроструктуры на напряженное состояние полого цилиндра (рис. 6), ограниченного поверхностями $r_1 = a$ и $r_2 = b$ с заданными на них давлениями $\sigma_{r_1} = -P_a$ и $\sigma_{r_2} = -P_b$. Главная часть перемещений, не содержащая h , может быть представлена в виде [6]:

$$U_r = \frac{1+\nu}{E(b^2 - a^2)} \left[\frac{a^2 b^2}{r} (P_a - P_b) + (1+2\nu)(a^2 P_a - b^2 P_b)r \right], \quad U_\theta = 0. \quad (4.9)$$

Здесь $E = (3\lambda + 2\mu) / (\lambda + 2\mu)$, $\nu = \lambda / 2(\lambda + \mu)$, $b > a$.

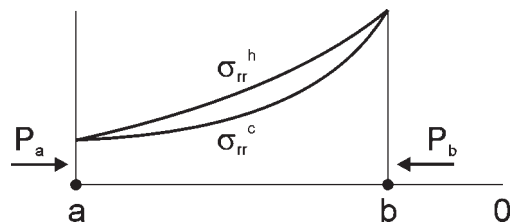


Рис. 6. Распределение напряжений в цилиндрическом слое с учетом микроструктуры

Вычислим относительное изменение η радиальных напряжений:

$$\eta = \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_{rr}^c} = \frac{1}{\sigma_{rr}^c} \left(\sigma_{rr}^c + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 U_r}{\partial r^4} \right), \quad (4.10)$$

где $\sigma_{rr}^c = (\lambda + 2\mu) \partial U_r / \partial r$ — радиальное напряжение упругой задачи с тензором деформаций Коши. Так что η имеет вид:

$$\eta = 1 + \frac{h^2}{3} \frac{1}{\rho C_1^2} \frac{\partial^4 U_r / \partial r^4}{\partial U_r / \partial r}. \quad (4.11)$$

С учетом знания $U(r)$ вычислим η :

$$\eta = 1 + \frac{h^2}{3} \frac{1}{\rho C_1^2} \frac{24a^2 b^2 (P_a - P_b) / r^5}{(1 + 2\nu)(a^2 P_a - b^2 P_b) - a^2 b^2 (P_a - P_b) / r^2}. \quad (4.12)$$

При $P_b > P_a$ имеем $\eta < 1$, то есть учет микроструктуры ведет к более плавному падению σ_r . При $P_a > P_b$ для трубы под внутренним противодавлением имеет место $\eta > 1$, при $r \in (a, b)$, так что распределение напряжений внутри цилиндрического слоя имеет более плавный характер по сравнению со случаем идеально упругого материала (рис. 6).

$$\eta = 1 + \frac{8h^2}{\rho C_1^2 r^3} \frac{1}{(1 + 2\nu) \frac{r^2}{b^2} \frac{P_a - b^2 P_b / a^2}{P_a - P_b} - 1}. \quad (4.13)$$

5. ВЛИЯНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ НА ПРОДОЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Рассмотрим стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости с учетом микроструктуры в трубе кругового сечения (рис. 7).

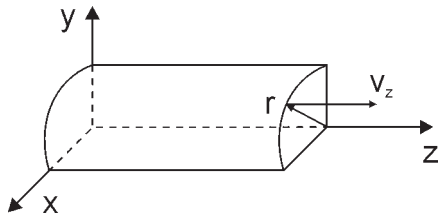


Рис. 7. Изображение элемента области течения жидкости в круглой трубе

Реологический закон Ньютона связи напряжений и скоростей деформаций представим в виде:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (5.1)$$

где $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 v_i}{\partial x_j^3} + \frac{\partial^3 v_j}{\partial x_i^3} \right)$.

Уравнение движения в напряжениях в проекции на ось z имеет вид:

$$d\sigma_{rz} / dr + \sigma_{rz} / r = -\Delta p / L = -q_0. \quad (5.2)$$

Реологическое уравнение и проинтегрированное уравнение движения для σ_{rz} дают линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка для $v(r)$:

$$\frac{dv}{dr} + \frac{h^2}{6} \frac{d^3 v}{dr^3} = -\frac{q_0}{2\mu} r, \quad (5.3)$$

которое имеет три собственных значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{6} / h$ и можем записать выражение для продольной скорости $v_r = v(r)$:

$$v(r) = -\frac{q_0}{4\mu} r^2 + C_1 + C_2 \sin\left(\sqrt{6} \frac{r}{h}\right) + C_3 \cos\left(\sqrt{6} \frac{r}{h}\right). \quad (5.4)$$

Сформулируем граничные условия следующим образом:

1) прилипание жидкости к границе $r = R$ трубы: $v(R) = 0$; 2) симметричность течения при $r = 0$: $(dv/dr)|_{r=0} = 0$; 3) качение элементов микроструктуры на контуре трубы $r = R$ и совпадение скорости течения жидкости при $r = R - d$ и скорости вращения элементов микроструктуры d , $[v(R - d) - v(R)] / d = (dv/dr)|_{r=R}$, так что получим:

$$d^2 v / dr^2 + (d/3) d^3 v / dr^3 = 0. \quad (5.5)$$

Определив постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 , получим выражение для скорости $v(r)$ продольного течения жидкости в трубе [7]:

$$v(r) = \frac{q_0}{4\mu} R^2 \times \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{\cos\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right) - \cos\left(\sqrt{6} \frac{r}{h}\right)}{3 \cos\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right) + \sqrt{6} \frac{d}{h} \sin\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right)} \right]. \quad (5.6)$$

При $h \rightarrow 0$ выражение для скорости $v(r)$ продольного течения переходит в известную формулу Пуазейля:

$$v(r) = (q_0 R^2 / 4\mu) [1 - (r/R)^2]. \quad (5.7)$$

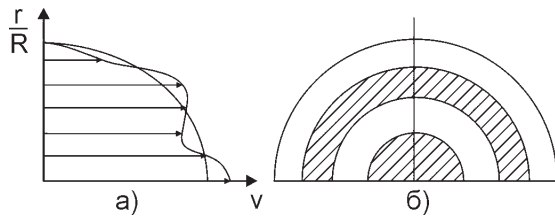


Рис. 8. а) График скорости $v(r)$ течения жидкости в круглой трубе для некоторого (h/R) ; б) Изображение кольцевых зон более быстрого движения слоев

Качественное влияние микроструктуры на кинематику течения жидкости в круглой трубе проявляется в образовании тонких цилиндрических слоев с относительно более быстрым и более медленным движением.

Подсчет расхода жидкости через поперечное сечение трубы при $d \rightarrow 0$ дает выражение:

$$Q_h = Q_0 \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right], \quad (5.8)$$

где $Q_0 = \pi R^4 q_0 / 8\mu$ — выражение для расхода линейной вязкой жидкости в трубе круглого сечения с перепадом давления $q_0 = \Delta p / L$ по формуле Пуазейля. Заметим, что относительное увеличение расхода Q_h / Q_0 обусловлено кинематическим эффектом качения элементов микроструктуры по стенке трубы с выполнением условия прилипания жидкости к стенке.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При описании течения и деформирования материалов с микроструктурой возникает

необходимость введения тензоров деформаций и скоростей деформаций с учетом геометрического размера h самой микроструктуры. Это приводит к рассмотрению на микро-уровне тензора четвертого ранга порядка h^2 , характеризующего микро-деформацию и микро-скорость деформации.

Учет конечности размеров h представительного элемента материальной среды при переходе к математической модели механики сплошных сред приводит в статических задачах МСС к появлению эффектов послойности течения (деформирования), а в динамических задачах к уменьшению скоростей упругих волн и увеличению их энергоемкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панин В. Е., Панин Л. Е. Масштабные уровни гомеостаза в деформируемом твердом теле // Физическая мезомеханика. 2004. Т. 4. С. 5—23.
2. Садовский М. А. Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР. 1975. Т. 247. № 4. С. 829—831.
3. Шемякин Е. Н. О свободном разрушении твердых тел // ДАН. 1988. Т. 300. С. 1090—1094.
4. Макаров П. В. Об иерархической природе деформации и разрушения твердых тел и сред // Физическая мезомеханика. 2004. Т. 7. № 4. С. 25—34.
5. Быкова М. Распространение пространственных ударных волн в нелинейной упругой среде с микроструктурой.: диссерт. канд. физ.-мат. наук. ВГУ 2002. 102 с.
6. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 937 с.
7. Вервейко Н. Д., Воронков А. А., Сумец П. П. Математическое моделирование пульсового движения крови в сосудах // Вестник ВГУ, серия физика, математика. 2003. № 2. С. 125—131.