ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика. Математика, 2005, № 2

УДК 539.3

О ПОВЕДЕНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КОНТИНУУМА ПРИ ОРТОГОНАЛЬНОМ ДОГРУЖЕНИИ

Н. А. Кончакова

Воронежский государственный университет

Работа посвящена аналитическому исследованию состояния сложного нагружения упругопластического тела. Получены определяющие уравнения в случае ортогонального догружения и соответствующие дифференциальные уравнения характеристик.

1. На основании данных экспериментальных исследований по сложному нагружению образцов [1—4], можно заключить, что первоначально однородный и изотропный материал становится анизотропным. Анизотропия пластического состояния элемента материала зависит от достигнутого напряженно-деформированного состояния и истории нагружения [5—7]. При этом необходимо заметить, что тензор приращения деформаций материала, первоначально подверженного простому пластическому деформированию, а затем дополнительному догружению, существенно зависит от угла поворота главных осей тензора приращений напряжений относительно главных осей тензора деформаций [4, 8]. Анизотропия пластических свойств материала имеет место при деформировании, сопровождаемом разгрузкой на одних площадках действия экстремальных касательных напряжений и активным нагружением на других [9]. Практический интерес представляет изучение характера реакции упругопластической среды (элементарного объема) на внешние возмущения. Под реакцией подразумевают деформации, а роль внешних возмущений играют напряжения (нагрузка).

2. Рассмотрим упругопластическое тело, которое путем простого нагружения приведено в состояние, характеризующееся значением максимального касательного напряжения T, большим предела упругости T_e: $T > T_e$. В качестве характеристики материала при простом нагружении примем зависимость T от главного сдвига Γ: $T = T(\Gamma)$.

Дадим некоторое приращение тензору напряжений (или деформаций). Если направление главных осей тензора приращений напряжений не совпадает с направлением главных осей тензора деформаций, догружение является сложным.

Простейшим видом сложного догружения является «ортогональное догружение», для которого главные оси тензора приращений напряжений составляют угол $\dfrac{\pi}{4}$ с главными осями тензора деформаций [4]. При ортогональном догружении в начальный момент направления главных осей тензоров деформаций и напряжении совпадают. Из опытов А. М. Жукова и Ю. Н. Работнова, Нахди и Роули [5, 6] следует, что при ортогональном догружении направление главного сдвига тензора приращений деформаций образует конечный угол с направлением главного сдвига тензора деформаций [7]. Явление, происходящее при ортогональном догружении, можно схематически пояснить так: если элемент материала испытал пластическую деформацию при простом нагружении, т. е. при неизменном направлении главного сдвига, то в главном направлении скольжения материал ослаблен. В других плоскостях пластическое деформирование также ослабило материал: чем больший угол составляет плоскость с плоскостью главного сдвига, тем больше «модуль сдвига» в этой плоскости [8]. С другой стороны, при ортогональном догружении касательное напряжение, вызванное тензором приращений напряжений, также увеличивается с ростом этого угла. В итоге осуществляется деформация, при которой плоскость наибольшей скорости сдвига составляет конечный угол с главным направлением скольжения. После ортогонального догружения, следующего за простым, направления главных осей тензора напряжений и тензора деформации уже не совпадают [8].

3. Пусть материал подчиняется квадратичному условию пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\mathrm{T}^2. \qquad (1)$$

Тогда уравнение поверхности нагружения Σ (поверхность текучести), которая в пространстве напряжений Π отделяет область упругого деформирования от области пластического деформирования, примет вид

$$f(\sigma_{ij}) = 4T^2, \qquad (2)$$

Поверхность Σ — гладкая, выпуклая, замкнутая поверхность в пространстве напряжений, содержащая начало координат. Материал находится в упругом состоянии, если $T < \tau_s$; в пластическом состоянии при условии $T = \tau_s$. Напряженное состояние σ_{ij}^1 можно изобразить в пространстве напряжений точкой M^1 — концом вектора напряжений $\vec{\sigma}^1$. M^1 принадлежит поверхности Σ (рисунок). Следовательно, движение конца вектора $\vec{\sigma}^1$ за пределы объема, ограниченного поверхностью текучести, соответствует дополнительной пластической деформации.

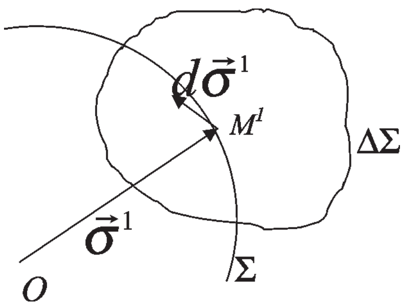

Рис.

Произведем догружение после достижения кривой «максимальное касательное напряжение — главный сдвиг» точки максимума [9]. Бесконечно малое приращение напряжения (догружение) $d\sigma_{ij}$ приводит либо к упругой деформации (разгрузке, если $d\sigma_{ij}$ направлено вовнутрь Σ), либо к продолжающейся пластической деформации (нагрузке, если $d\sigma_{ij}$ направлено вне Σ). Для получения уравнений состояния при догружении необходимо вычислить $\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}$, используя (1, 2):

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 2((\sigma_x - \sigma_y)d(\sigma_x - \sigma_y) + 4\tau_{xy}d\tau_{xy}).$$

Поскольку величина предела текучести есть величина постоянная для исследуемого материала $T = const$, то приращение правой части функции нагружения (3) равно нулю. Следовательно,

$$2((\sigma_x - \sigma_y)d(\sigma_x - \sigma_y) + 4\tau_{xy}d\tau_{xy}) = 0. \qquad (3)$$

Соотношение (3) означает, что догружение лежит в касательной плоскости поверхности нагружения — это есть условие ортогонального догружения [10]. Уравнение (3) можно записать в конечных приращениях:

$$(\sigma_x - \sigma_y)\Delta(\sigma_x - \sigma_y) + 4 \cdot \tau_{xy}\Delta\tau_{xy} = 0. \qquad (4)$$

Система уравнений равновесия в состоянии ортогонального догружения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\tau_{xy}}{\partial y} &= F_1(x,y); \\ \frac{\partial \Delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\sigma_y}{\partial y} &= F_2(x,y), \end{aligned} \qquad (5)$$

где

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) &= F_1; \\ -\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right) &= F_2. \end{aligned} \qquad (6)$$

На поверхности нагружения Σ напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} известны, следовательно, в начале процесса догружения величины σ_x, σ_y, τ_{xy} удовлетворяют уравнениям равновесия элементарного объема сплошной среды. Тогда, правая часть обоих уравнений обращается в нуль в начальный момент времени процесса догружения:

$$\left.\left(\frac{\partial \Delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\tau_{xy}}{\partial y}\right)\right|_{t=0} = 0;$$

$$\left.\left(\frac{\partial \Delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\sigma_y}{\partial y}\right)\right|_{t=0} = 0.$$

Перепишем систему уравнений равновесия элементарного объема упругопластической среды, принимая во внимание соотношение (4):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial(\Delta\sigma_x)}{\partial x}+H\frac{\partial(\Delta\sigma_x)}{\partial y}-H\frac{\partial(\Delta\sigma_y)}{\partial y}=\\
=F_1+\frac{(\Delta\sigma_x-\Delta\sigma_y)}{4\tau_{xy}}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+4H\cdot\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right);\\
H\frac{\partial(\Delta\sigma_x)}{\partial x}-H\frac{\partial(\Delta\sigma_y)}{\partial x}+\frac{\partial(\Delta\sigma_y)}{\partial y}=\\
=F_2+\frac{(\Delta\sigma_x-\Delta\sigma_y)}{4\tau_{xy}}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+4H\cdot\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\right);
\end{gathered}
\tag{7}
$$

где введено обозначение $\dfrac{(\sigma_x-\sigma_y)}{-4\cdot\tau_{xy}}=H$, величины F_1, F_2 вычисляются согласно (6). Строго говоря, H есть функция координат точки M^1 поверхности нагружения: $H=H(x,y)$. Система (7) есть система двух квазилинейных неоднородных дифференциальных уравнения первого порядка функций $\Delta\sigma_x=\Delta\sigma_x(x,y)$, $\Delta\sigma_y=\Delta\sigma_y(x,y)$ двух независимых переменных x,y.

Пусть вдоль некоторой линии $x=x(s)$, $y=y(s)$ в плоскости xy заданы значения $\Delta\sigma_x$ и $\Delta\sigma_y$: $\Delta\sigma_x=\Delta\sigma_x(s)$, $\Delta\sigma_y=\Delta\sigma_y(s)$. Введем в рассмотрение четырехмерное пространство $x,y,\Delta\sigma_x,\Delta\sigma_y$. Уравнения $\Delta\sigma_x=\Delta\sigma_x(s)$, $\Delta\sigma_y=\Delta\sigma_y(s)$, $x=x(s)$, $y=y(s)$ представляют в нем некоторую кривую L; решение же уравнений $\Delta\sigma_x=\Delta\sigma_x(x,y)$, $\Delta\sigma_y=\Delta\sigma_y(x,y)$ образуют некоторую поверхность — интегральную поверхность.

Так как вдоль L $\Delta\sigma_x$ и $\Delta\sigma_y$ известны, то дополнительными уравнениями будут условия существования полного дифференциала функций $\Delta\sigma_x$ и $\Delta\sigma_y$:

$$
\begin{gathered}
d(\Delta\sigma_x)=\frac{\partial\Delta\sigma_x}{\partial x}dx+\frac{\partial\Delta\sigma_x}{\partial y}dy,\\
d(\Delta\sigma_y)=\frac{\partial\Delta\sigma_y}{\partial x}dx+\frac{\partial\Delta\sigma_y}{\partial y}dy
\end{gathered}
\tag{8}
$$

вдоль L уравнения (7, 8) образуют систему неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно первых частных производных компонент тензора приращений напряжений.

Система (7) принадлежит к гиперболическому типу и имеет два семейства вещественных характеристик

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(\Delta\sigma_x-\Delta\sigma_y)}{2\cdot\Delta\tau_{xy}}\left(1\pm\frac{T}{\tau_{xy}}\right).$$

Введем в рассмотрение представление тензора $\Delta\sigma$ в виде:

$$
\begin{gathered}
\Delta\sigma_x=\sigma^*-T\cos 2\theta^*,\\
\Delta\sigma_y=\sigma^*+T\cos 2\theta^*,\\
\Delta\tau_{xy}=-T\,\mathrm{tg}\,2\theta^*\sin 2\theta^*.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Подставляя (9) в (4), и учитывая выражение компонент тензора напряжений идеальной пластичности:

$$
\begin{gathered}
\sigma_x=\sigma-T\sin 2\theta,\\
\sigma_y=\sigma+T\sin 2\theta,\\
\tau_{xy}=T\cos 2\theta,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где θ — угол наклона касательной к линии — характеристике α, отсчитываемый в положительном направлении от оси x, получим связь углов θ^* и θ:

$$\theta^*=\theta+\frac{\pi n}{2}.$$

Таким образом, угол наклона касательной к α-линии — характеристике в состоянии ортогонального догружения отличается от аналогичного угла наклона касательной к одноименной характеристике в исходном пластическом состоянии на величину $\pi n/2$. Окончательно уравнения характеристик могут быть записаны в виде

$$\frac{dy}{dx}=tg\theta^*,\quad \frac{dy}{dx}=-ctg\theta^*. \tag{11}$$

Решение системы гиперболического типа (7) относительно приращений напряжений в случае ортогонального догружения тесно связано с характеристическими линиями, определяемыми дифференциальными уравнениями (11) и покрывающими область деформирования криволинейной ортогональной сеткой. Таким образом, для известного пластического состояния с характеристиками

$$\frac{dy}{dx}=tg\theta,\quad \frac{dy}{dx}=-ctg\theta.$$

и соответствующими соотношениями вдоль характеристик

$$\sigma - 2k\theta = const = \xi,$$
$$\sigma + 2k\theta = const = \eta$$

на каждом шаге догружения построение поля характеристик сводится, по определению догружения, к построению ортогонального семейства линий скольжения для исходного состояния.

Не трудно показать, что теоремы Генки, аналогичные теоремам теории пластичности, будут справедливы для исследуемой системы уравнений (7).

В простейшем случае, если величина угла $2\theta^*$, характеризующего напряженное состояние при ортогональном догружении, постоянна во всей области $\Delta\Sigma$, правые части уравнений характеристик есть константы:

$$\frac{dy}{dx} = C_1, \quad \frac{dy}{dx} = C_2,$$
$$C_1 = tg\theta^*, \quad C_2 = -ctg\theta^*.$$

Следовательно, характеристиками состояния догружения в рассматриваемом частном случае служат два ортогональных семейства параллельных прямых

$$y = C_1 x + C_3 \text{ и } y = C_2 x + C_4.$$

Исследование состояния сложного нагружения дополняется изучением соотношений вдоль характеристик поверхности догружения, как особых решений системы (7). Полученная в данной работе связь характеристик напряженного состояния пластического континуума (4), указывает на соотношение ортогональности исходного напряженного состояния и догружения, если рассматривать ортогональность главных направлений основного состояния и догружения. Этот результат демонстрирует утверждение: догружение в пластической области идеально-пластического тела всегда происходит как «ортогональное». Такое состояние называют «нейтральным догружением» [3, 4], при котором развитие деформаций идет по логарифмическим спиралям или по иным характеристикам. Неупругое деформирование материала существенно определяется видом достигнутого напряженного состояния. Пластическая деформация является результатом последовательного наложения состояний полной и неполной пластичности со сменой площадок главного сдвига. Решение системы (7) с привлечением условий совместности на характеристиках (11) позволит вычислить реальные величины приращений напряжений при ортогональном догружении и оценить прочность материала при заданных внешних воздействиях.

Автор искренне благодарит академика РАН Е. И. Шемякина за постановку задачи, обсуждение результатов статьи и помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 05-01-00749).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аннин Б.Д., Жигалкин В.М.* Поведение материалов в условиях сложного нагружения. — Новосибирск, Изд. Сибирского отделения РАН, 1999. 342 с.

2. *Христианович С.А.* Механика сплошной среды. — М.: Наука. 1981. 483 с.

3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.

4. *Христианович С.А., Шемякин Е.И.* О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении // МТТ, 1969, №5, С. 138—149.

5. *Жуков А.М., Работнов Ю.Н.* Исследование пластической деформации при сложном нагружении // Инженерный сборник. — 1954. — Т. 18.

6. *Naghdi P.M., Rowley J.C.* An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity. J. Mech. Phys. Solids, 1954, Vol. 3.

7. *Шемякин Е.И.* Об одном эффекте сложного нагружения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1996, № 5, С. 32—38.

8. *Христианович С.А.* Плоская задача математической теории пластичности// Матем. сб. 1936. 1 (43), № 4. 511—534.

9. *Шемякин Е.И.* Синтетическая теория прочности. Ч. I // Физическая мезомеханика. 1999. 2, № 2. С. 63—69.

10. Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1 — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 445 с., Т. 2 — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.