ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика. Математика, 2005, № 2

УДК 517.983

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА—ДАРБУ*

А. В. Глушак, Т. Т. Каракеев

Воронежский государственный университет

Приводятся условия на входные данные, позволяющие регуляризовать задачу нахождения правой части системы уравнений Эйлера—Дарбу по дополнительной информации о решении.

Широкий класс прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений сводится к исследованию интегральных уравнений Вольтерра. Из них можно выделить классы задач, которые редуцируются к интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода. К этим классам относятся некоторые типы обратных и нелокальных краевых задач (см. [1, 2]). Среди работ, посвященных уравнениям Вольтерра третьего рода отметим работу [3], в которой доказано существование семейства многопараметрических решений линейных уравнений Вольтерра третьего рода в специальном банаховом пространстве. Исследование единственности решения и вопросы приближенного решения уравнения

$$p(x)\upsilon(x)+\int_0^x K(x,t)\upsilon(t)dt=f(x), \qquad (1)$$

в рамках теории регуляризации проведено в [4, 5]. В работе [4] доказана регуляризуемость уравнения (1) с суммируемым по t ядром $K(x,t)$ специального вида. В [5] регуляризуемость достигнута в предположении $f(x)/p(x)\to 0$ при $x\to 0$. Однако для уравнения (1) с непрерывным и липшицевым по x ядром $K(x,t)$ подход работы [4] не реализуется. Условия работы [5] сильно сужают класс уранений (1). Предлогаемый ниже метод регуляризации свободен от подобных ограничений, является вольтерровой регуляризацией и допускает применение квадратурных формул, в силу чего удается построить численное решение.

Пусть (1) является системой n уравнений, $\upsilon(x)$ — искомая вектор-функция, а известная скалярная функция $p(x)$, вектор-функция $f(x)$ и матричная функция $K(x,t)$, $(x,t)\in D=\{0\le t\le x\le 1\}$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Пусть $K_{i,j}(x,t)\in C(D)\cap Lip(x|L_K)$, $i,j=1,2,\dots,n, \lambda_1(x),\dots,\lambda_n(x)$ — собственные значения матрицы $[K(x,x)+K^*(x,x)]/2$, где $K^*(x,x)$ — матрица, сопряженная к $K(x,x)$, $0\le\lambda_0(x)=\min\{\lambda_i(x)|1\le i\le n\}$, $0<L_K=const$, $f(x)\in C_n^1[0,1]$, $p(x)\in C[0,1]$, $f(0)=p(0)=0$, $p(x)$ — неубывающая функция.

Предполагая существование непрерывного решения системы (1) покажем регуляризуемость и единственность решения системы (1) в пространствах $C_n[0,1]$ и $C_n^\gamma[0,1]$, $0<\gamma\le 1$.

Для всякого $0<C_0=const$ система (1) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений (см. [2])

$$(A\upsilon)(x)+(G\upsilon)(x)=(L\upsilon)(x)+g(x), \qquad (2)$$

где

$$(L\upsilon)(x)=\int_0^x L(x,t)\upsilon(t)dt, G(\upsilon)(x)=$$

$$=\int_0^x G(t)\upsilon(t)dt, (A\upsilon)(x)=p(x)\upsilon(x),$$

$$G(t)=C_0p_0(t)+K(t,t), L(x,t)=$$

$$=K(t,t)-K(x,t)-C_0\int_t^x K(s,t)ds,$$

$$g(x)=f(x)+C_0\int_0^x f(t)dt, p_0(x)=$$

$$=\mathrm{diag}(p_i(x))_1^n,\ \ p_i(x)\equiv p(x),\ \ i=1,\dots,n.$$

* Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ, проект № 04-01-00141.

Пусть для простоты $\upsilon(0)=0$. Тогда семейство систем уравнений

$$(\varepsilon I + A)\upsilon_\varepsilon(x) + (G\upsilon_\varepsilon)(x) = (L\upsilon_\varepsilon)(x) + g(x), \quad (3)$$

где I — единичный оператор, ε — малый параметр из интервала (0,1), является регуляризирующей для системы (2), если

$$0 < d_1 \le p(x) + \lambda_0(x). \quad (4)$$

Рассмотрим оператор H_ε, определенный следующим равенством

$$(H_\varepsilon \upsilon)(x) = -\int_0^x \frac{W_\varepsilon(x,t)}{\varepsilon + p(x)} G(t) \times \times \frac{\upsilon(t)-\upsilon(x)}{\varepsilon + p(t)} dt + \frac{W_\varepsilon(x,0)}{\varepsilon + p(x)} \upsilon(x), \quad (5)$$

где

$$W_\varepsilon(x,t) = \exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right)$$

— матричная функция, удовлетворяющая неравенству Важевского [6, с. 149]

$$\|W_\varepsilon(x,t)\| \le \exp\left(-\int_t^x \frac{\lambda(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right)\sqrt{n}, \quad \lambda(s) = p(s) + \lambda_0(s), \quad (6)$$

а норма матрицы определена равенством

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

Умножим обе части системы (3) на $(\varepsilon + p(x))^{-1}$, и сведем ее к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\upsilon_\varepsilon(x) = (H_\varepsilon[L\upsilon_\varepsilon])(x) + (H_\varepsilon g)(x).$$

Однозначную разрешимость этой системы легко показать, используя схему доказательства применяемую ниже для доказательства леммы 1 и теоремы 1.

Лемма 1. Пусть выполнены условие 1, неравенство (4) и, кроме того, $\upsilon(0)=0$, $\upsilon(x) \in C_n^\gamma[0,1]$, $0<\gamma\le 1$ и $\|G(x)\| \le C_1\lambda(x)$, $0<C_1 = \mathrm{const}$. Тогда имеет место оценка

$$\|\varepsilon(H_\varepsilon \upsilon)(x)\|_{C_n} \le d_0(C_1 d_2 + d_3)\sqrt{n}\, d_1^{-\gamma}\varepsilon^\gamma, \quad (7)$$

где $d_0 = \sup\limits_{(x,s)\in[0,1]} \{\|\upsilon(x)-\upsilon(s)\| / |x-s|^\gamma\}$, $d_2 = \Gamma(\gamma+1), d_3 = \sup\limits_{\sigma\ge 0}(\sigma^\gamma e^{-\sigma})$.

Доказательство. Для второго выражения из (5) получим оценку

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)ds}{\varepsilon + p(s)}\right)\|\upsilon(x)\| \le$$
$$\le \frac{\varepsilon d_0 \sqrt{n} x^\gamma}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\frac{d_1 x}{\varepsilon + p(x)}\right) \le d_1^{-\gamma} d_0 d_3 \sqrt{n}\varepsilon^\gamma.$$

Первое выражение в (5) умножим на малый параметр ε и используем неравенство (4). Тогда

$$\left\|\varepsilon \int_0^x \frac{W_\varepsilon(x,t)G(t)}{\varepsilon + p(x)} \frac{u(x)-u(t)}{\varepsilon + p(t)} dt\right\| \le$$
$$\le \int_0^x \exp\left(-\int_t^x \frac{\lambda(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right)\left(\int_t^x \frac{\lambda(s)}{\varepsilon + p(s)} ds\right)^\gamma \times$$
$$\times C_1 \sqrt{n} d_0 d_1^{-\gamma} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + p(t))^{1-\gamma}} \times$$
$$\times \frac{\lambda(t)}{\varepsilon + p(t)} dt \le d_0 C_1 d_2 d_1^{-\gamma} \sqrt{n}\varepsilon^\gamma.$$

Из полученных неравенств следует оценка (7), и лемма тем самым доказана.

Теорема 1. Пусть выполнены условие 1, неравенство (4), $\|G(x)\| \le C_1\lambda(x)$ и система (2) имеет решение $\upsilon(x) \in C_n^\gamma[0,1]$, $0<\gamma\le 1$, $\upsilon(0)=0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение системы (3) равномерно сходится к решению системы (2), причем

$$\|\upsilon_\varepsilon(x) - \upsilon(x)\|_{C_n} \le d_4 \varepsilon^\gamma, \quad (8)$$

$d_4 = d_1^{-\gamma} d_0 \sqrt{n}(C_1 d_2 + d_3)\exp((L_K + C_0 K_1)C_2 / d_1)$,
$K_1 = \max\limits_{(x,t)\in D} \|K(x,t)\|$, $C_2 = (2C_1 + e^{-1})\sqrt{n}$.

Доказательство. Произведем в (3) подстановку $\upsilon_\varepsilon(x) = \upsilon(x) + \eta_\varepsilon(x)$. Тогда относительно $\eta_\varepsilon(x)$ получим систему уравнений

$$(\varepsilon I + A)\eta_\varepsilon(x) + (G\eta_\varepsilon)(x) = (L\eta_\varepsilon)(x) - \varepsilon\upsilon(x).$$

Разделим обе части этой системы на $\varepsilon + p(x)$ и, используя резольвенту ядра $(-G(t)/(\varepsilon + p(x))$, с учетом (5) получим

$$\eta_\varepsilon(x) = (H_\varepsilon[L\eta_\varepsilon])(x) - \varepsilon(H_\varepsilon \upsilon)(x). \quad (9)$$

Так как имеет место условие 1 и неравенство (4), то для матричной функции $L(x,t)$ верна оценка

$$\|L(x,s) - L(t,s)\| \le d_1^{-1}(L_K + C_0 K_1)(\varphi(x) - \varphi(t)),$$

$$\varphi(x) = \int_0^x \lambda(s) ds.$$

Поэтому, учитывая (6), получим

$$\|(H_\varepsilon[L\eta_\varepsilon])(x)\| \le \left(C_1 \frac{2\sqrt{n}}{\varepsilon + p(x)} \times \right.$$

$$\times \int_0^x \exp\left(-\int_t^x \frac{\lambda(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) \lambda(t) \frac{\varphi(x) - \varphi(t)}{\varepsilon + p(t)} dt +$$

$$\left. + \frac{\sqrt{n}\varphi(x)}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{\lambda(s)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) \right) d_1^{-1} \times$$

$$\times (L_K + C_0 K_1) \int_0^x \|\eta_\varepsilon(t)\| dt.$$

Следовательно, из (9) имеем

$$\|\eta_\varepsilon(x)\| \le C_2 d_1^{-1} (L_K + C_0 K_1) \times$$

$$\times \int_0^x \|\eta_\varepsilon(t)\| dt + \|\varepsilon(H_\varepsilon \upsilon)(x)\|_{C_n}.$$

Откуда с помощью неравенства Гронуолла—Беллмана [6, с. 108] и леммы 1 получим оценку (8). Таким образом, $\upsilon_\varepsilon(x) \to \upsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по x. Теорема доказана.

Следствие 1. При выполнении условия 1 и неравенства (4) решение системы (2) единственно в пространстве $C_n^\gamma[0,1]$, $0 < \gamma \le 1$.

Справедлива следующая (см. [4]) лемма.

Лемма 2. Если выполнено условие 1, неравенство (4) и $\upsilon(x) \in C_n[0,1]$, $\upsilon(0) = 0$, то

$$\|\varepsilon(H_\varepsilon \upsilon)(x)\|_{C_n} \le d_5 [\|\upsilon(x)\|_{C_n} \varepsilon^{1-\sigma} + \omega(\bar\varepsilon)],$$

где $\omega(\bar\varepsilon) = \sup\limits_{|\rho-\zeta|\le\bar\varepsilon} \left\{ \|\upsilon(\varphi^{-1}(\rho)) - \upsilon(\varphi^{-1}(\zeta))\| / \rho \right\}$,

$\zeta \in [0, \varphi(1)]$, $0 < \sigma < 1$, $\varphi^{-1}(\rho)$ — функция, обратная к функции $\varphi(x), \bar\varepsilon = \varepsilon^\sigma$, $0 < d_5 = const$.

Теорема 2. Пусть выполнены условие 1, неравенство (4), $\|G(x)\| \le C_1 \lambda(x)$ и система (2) имеет решение $\upsilon(x) \in C_n[0,1]$, $\upsilon(0) = 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение системы (3) равномерно сходится к решению системы (2), причем

$$\|\upsilon_\varepsilon(x) - \upsilon(x)\|_{C_n} \le \left(\|\upsilon(x)\|_{C_n} \varepsilon^{1-\sigma} + \omega(\varepsilon^\sigma) \right) \sqrt{n} d_6 d_5,$$

где $\omega_{\bar\upsilon}(\bar\varepsilon)$ определена в лемме 2, $d_6 = \exp((L_K + C_0 K_1) C_2 / d_1)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, с той лишь разницей, что вместо леммы 1 следует использовать лемму 2.

Следствие 2. При выполнении условия 1 и неравенства (4) решение системы (2) единственно в пространстве $C_n[0,1]$.

Из теорем 1, 2 следует, что семейство систем (3) является регуляризирующим по М. М. Лаврентьеву (см. [7, с. 49]) для системы (2).

В качестве приложения рассмотрим обратную задачу восстановления правой части системы уравнений Эйлера—Дарбу.

Постановка задачи. Пусть V_n — пространство вектор-функций $U(x,y)$ из класса $C_n(\bar\Omega) \cap C_n^{1,1}(\Omega)$, $\Omega = \{0 < x < y < 1\}$, удовлетворяющих условиям

$$U(0,y) = \psi(y), U(x,1) = \tau(x), \tag{10}$$

и пусть F_n — пространство непрерывных вектор-функций $f_0(x,y)$ представимых в виде

$$f_0(x,y) = -\beta_2 b(y)\upsilon(y) - (y-x)^{\beta_0-\beta_1} K(y,x)\upsilon(x), \quad \beta_2 = 1 + \beta_1 - \beta_0, \tag{11}$$

где $K(y,x)$ — "$n \times n$" матричная функция, $L_0 = \partial^2 / \partial x \partial y - \beta_1 (y-x)^{-1} \partial / \partial y$.

Требуется найти такую пару (U, f_0), что функции $U \in V_n, f_0 \in F_n$ и удовлетворяют системе

$$(L_0 U)(x,y) = f_0(x,y) / (y-x)^{\beta_0}, \quad 1 < \beta_1 < \beta_0 < 2, \tag{12}$$

если $K(y,x)$ удовлетворяет условию 1, а скалярная функция $b(y)$ и вектор-функции $\psi(y), \tau(x)$ подчинены следующему условию.

Условие 2. Пусть $\psi(y) \in C_n^2(0 < y \le 1)$, $\tau(x) \in C_n^1(0 \le x < 1)$, $b(y) \in C[0,1]$.

Известно (см. [1]), что решение задачи (10)—(12) представимо в виде

$$U(x,y) = \tau(x) - \int_y^1 \left(\eta^{\beta_1} \psi'(\eta) + \int_0^x (\eta - t)^{\beta_1-\beta_0} f_0(t,\eta) dt \right) \times (\eta - x)^{-\beta_1} d\eta \equiv (Bf_0)(x,y),$$

причем, принадлежность $U(x,y) \in V_n$ возможна тогда и только тогда, когда

$$\int_0^x (x-t)^{\beta_1-\beta_0} f_0(t,x) dt + x^{\beta_1} \psi'(x) = 0. \tag{13}$$

Обратная задача восстановления правой части дифференциальных уравнений кроме краевых условий должна содержать еще некоторую дополнительную информацию о решении. В большинстве работ задается след решения задачи [8, с. 34]. В случае обратной задачи (10)—(12) в качестве дополнительной информации можно использовать условие (13), выполнение которого обеспечивает непрерывность решения задачи $U(x,y)$ в области $\bar{\Omega}$.

Из (13), учитывая представление (11), получим систему интегральных уравнений Вольтерра третьего рода вида (1), где $p(x)=x^{\beta_1}b(x)$, $f(x)=x^{\beta_1}\psi'(x)$. Очевидно, при этом выполняется условие 1. Тогда система вида (1), эквивалентная обратной задаче (10)—(12) регуляризуема и справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены условие 2, неравенство (4), $\|G(x)\|\le C_1\lambda(x)$ и система (1) с ядром $K(x,t)$, удовлетворяющим условию 1 при $p(x)=x^{\beta_1}b(x)$, $f(x)=x^{\beta_1}\psi'(x)$ имеет решение $\upsilon(x)\in C_n[0,1]$. Тогда имеет место равномерная сходимость $U_\varepsilon(x,y)\to U(x,y)$ при $\varepsilon\to 0$, где $U_\varepsilon(x,y)=(Bf_{0,\varepsilon})(x,y)$, при этом решение обратной задачи (10)—(12) единственно в V_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифференц. уравнения. — 1974. — Т. 10, № 1. — С. 100—111.

2. *Каракеев Т.Т.* Регуляризация нелокальной граничной задачи для псевдопараболических уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. — Бишкек : Илим, 2003. — Вып. 32. — С. 179—183.

3. *Магницкий Н.А.* Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1979. — Т. 19, № 4. — С. 970—989.

4. *Асанов А., Ободоева Г.* Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям — Фрунзе: Илим, 1994. — Вып. 25. — С. 65—74.

5. *Янно Я.* Регуляризация одного уравнения Вольтерра I рода равносильного уравнению III рода // Учен. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1987. — Вып. 762. — С. 16—30.

6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

7. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 287 с.

8. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. — М: Наука, 1988. — 288 с.