ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика. Математика, 2005, № 2

УДК 517.983.2

ОБРАТИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА*

М. С. Денисов

Воронежский государственный университет

В работе обобщаются некоторые результаты о непрерывной обратимости неотрицательно гамильтоновых операторов, полученные в [1].

Пусть H — гильбертово пространство. $H^2 = H \times H$ — декартово произведение двух экземпляров H. Далее, следуя [1], будем писать:

$$H^2 = H \dot{+} H. \tag{1}$$

Рассмотрим два оператора

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \; J_1 = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейный, плотно заданный, замкнутый оператор B называется гамильтоновым, если $B = J_1 B^* J_1$; гамильтонов оператор B называется неотрицательным, если $\operatorname{Im}(J(iB)x, x) \geq 0$.

Если B — ограниченный гамильтонов оператор, представленный матрицей относительно представления (1), то он имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} A & S \\ W & -A^* \end{pmatrix} : H \dot{+} H \to H \dot{+} H, \tag{2}$$

и выполняются следующие условия:

- $A : H \to H$ — ограниченный линейный оператор;
- $W : H \to H$, $S : H \to H$ — линейные непрерывные самосопряженные операторы.

Гамильтонов оператор B неотрицателен тогда и только тогда, когда операторы S и W неотрицательны.

Непосредственно проверяется, что оператор B вида (2) с неограниченным, замкнутым, плотно заданным линейным оператором A,

$$B : D(A) \dot{+} D(A^*) \subset H^2 \to H^2$$

гамильтонов оператор при непрерывных самосопряженных S и W, и неотрицательно гамильтонов, если операторы S и W неотрицательны.

В работе [1] для неограниченных неотрицательно гамильтоновых операторов была доказана следующая теорема:

Теорема 1. см. [1] *Если оператор*

$$B = \begin{pmatrix} A & S \\ W & -A^* \end{pmatrix} : D(A) \dot{+} D(A^*) \to H \dot{+} H,$$

является неотрицательно гамильтоновым и оператор A непрерывно обратим или операторы S и W непрерывно обратимы, то B непрерывно обратим.

В данной работе получено обобщение этой теоремы. Введем некоторые определения и теоремы, которые понадобятся далее.

Пусть H — комплексное гильбертово пространство, отображение Q, $Q : H \times H \to \mathbb{C}$, со свойствами:

1. $Q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 Q(x_1, y) + \lambda_2 Q(x_2, y)$,
2. $Q(x, y) = \overline{Q(y, x)}$,

называется полуторалинейной формой или индефинитной метрикой. Будем обозначать ее $[\cdot,\cdot]$.

Гильбертово пространство H, с введенной на нем индефинитной метрикой

$$[\cdot,\cdot] : H \times H \to \mathbb{C},$$

является пространством Крейна, если $[x, y] := (Jx, y)$ для любых $x, y \in H$. Здесь $J : H \to H$ это линейный оператор со свойствами: 1) $J = J^*$, 2) $J^2 = I$, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в H.

Линейный оператор $B : D(B) \subset H \to H$, называют J-диссипативным, если $\operatorname{Im}[Bx, x] \geq 0$ для любого $x \in D(B)$.

© Денисов М. С., 2005.

* Работа поддержана грантом РФФИ № 05-01-00203-а

Линейный оператор B называют максимальным J-диссипативным, если из вложения $B \subset \tilde{B}$, где $\tilde{B}$ — J-диссипативный оператор, следует $B = \tilde{B}$.

Пусть $B : D(B) \to H, \overline{D(B)} = H$. Оператор B^c, $B^c : D(B^c) \to H$, определенный на линеале $D(B^c)$:

$$D(B^c) = \{y \in H : \exists z \in H : [Bx, y] = \\ = [x, z] \;\; \forall x \in D(B)\}$$

формулой $B^c y = z$, называют J-сопряженным к оператору B.

Далее нам понадобятся следующие известные результаты.

Утверждение 1. см. [3] гл. 3 *Пусть H — гильбертово пространство. Если $A : D(A) \to \to H$ самосопряженный неотрицательный непрерывно обратимый оператор, то $\exists \gamma > 0 : (Ax, x) \geq \gamma(x, x)$ для любого $x \in D(A)$.*

Утверждение 2. см. [2] гл. 2 *Замкнутый, J-диссипативный оператор B, $B : D(B) \to H$, максимален тогда и только тогда, когда $\overline{D(B)} = H$ и $(-B^c)$ является J-диссипативным.*

Остаточный спектр максимального J-диссипативного оператора не содержит вещественных точек.

Любой максимальный J-диссипативный оператор B с $\overline{D(B)} = H$ является замкнутым.

Рассмотрим оператор $B : D(B) \to H \dotplus H$:

$$B = \begin{pmatrix} A & S \\ W & -A^* \end{pmatrix} : D(A) \cap D(W) + \\ + D(A^*) \cap D(S) \to H \dotplus H,$$

который удовлетворяет условиям:

1. $\overline{D(A) \cap D(W)} = H$, $\overline{D(A^*) \cap D(S)} = H$.

2. $A : D(A) \to H$ — линейный замкнутый оператор.

3. $W : D(W) \to H$, $S : D(S) \to H$ — линейные, самосопряженные, неотрицательные операторы.

Введем на гильбертовом пространстве $H \dotplus H$ индефинитную метрику $[x, y] = (Jx, y)$, где оператор

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} : H \dotplus H \to H \dotplus H.$$

Гильбертово пространство $H \dotplus H$ с индефинитной метрикой $[x, y]$, будет пространством Крейна, так как оператор J обладает свойствами $J^2 = I$, $J = J^*$, которые проверяются непосредственно.

Заметим, что оператор $iB = i\begin{pmatrix} A & S \\ W & -A^* \end{pmatrix}$ будет J-диссипативным, а $\overline{D(iB)} = \overline{D(B)} = = H \dotplus H$.

Пусть $x = x_1 \dotplus x_2 \in D(B)$. Тогда $\mathrm{Im}[iBx, x] = = (Wx_1, x_1) + (Sx_2, x_2) \geq 0$, так как операторы W и S — неотрицательны и $x_1 \in D(A) \cap D(W)$, $x_2 \in D(A^*) \cap D(S)$.

Отметим, что $\overline{D(A) \cap D(W)} = H$ и $\overline{D(A^*) \cap D(S)} = H$ влечет

$$\overline{D(B)} = \overline{D(A) \cap D(W) + D(A^*) \cap D(S)} = H + H.$$

Для оператора B, удовлетворяющего условиям 1, 2, 3, верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть оператор B, удовлетворяет условиям 1, 2, 3. Если*

− *Оператор iB — максимально J-диссипативен,*

− *Операторы W и S — непрерывно обратимы,*

то B непрерывно обратим.

□ Достаточно показать, что оператор iB непрерывно обратим. Для этого должны выполняться два условия:

$$\|iBx\| \geq \gamma \|x\|, \text{ где } \gamma > 0.$$

$$\overline{Ran(iB)} = H \dotplus H.$$

Проверим первое условие. Так как операторы S и W — непрерывно обратимы, то из утверждения 1 получим: $(Sx_2, x_2) \geq \gamma_2 \|x_2\|^2$ и $(Wx_1, x_1) \geq \gamma_1 \|x_1\|^2$, где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$. Выберем $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$, тогда

$$\|iBx\| \|x\| \geq |[iBx, x]| \geq |\mathrm{Im}[iBx, x]| = \\ = (Wx_1, x_1) + (Sx_2, x_2) \geq \gamma(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) = \gamma \|x\|^2,$$

откуда следует $\|iBx\| \geq \gamma \|x\|$.

Проверим второе условие. Предположим противное, тогда либо $0 \in \sigma_r(iB)$, либо $0 \in \sigma_p(iB)$. Из утверждения 2, в силу максимальной J-диссипативности iB, имеем: $0 \notin \sigma_r(iB)$, а поскольку $\|iBx\| \geq \gamma \|x\|$, то $0 \notin \sigma_p(iB)$. Следовательно $\overline{Ran(iB)} = H + H$ ■.

Покажем, что если в условии теоремы 1 непрерывные операторы W и S непрерывно обратимы, то она является частным случаем теоремы 1. Для этого докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть B — неотрицательно гамильтонов оператор, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Тогда оператор iB — максимально J-диссипативен.*

□ Оператор B — замкнут. Действительно, его можно представить в виде суммы:

$$B = \begin{pmatrix} A & S \\ W & -A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & S \\ W & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь оператор $\begin{pmatrix} 0 & S \\ W & 0 \end{pmatrix}$ — непрерывен, что следует из непрерывности операторов W и S, а оператор $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$ — замкнут, что следует из замкнутости оператора A. Таким образом, оператор B замкнут, как сумма непрерывного и замкнутого операторов.

Докажем далее, что $D(iB) = D((iB)^c)$.

1. $D(iB) \subset D((iB)^c)$. Пусть $y_1 \in D(A)$, $y_2 \in D(A^*)$ тогда, так как

$$[iBx, y] = i\left[\begin{pmatrix} A & S \\ W & -A^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= i\left[\begin{pmatrix} Ax_1 + Sx_2 \\ Wx_1 - A^*x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = i\left(\begin{pmatrix} Wx_1 - A^*x_2 \\ Ax_1 + Sx_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= i((Wx_1 - A^*x_2, y_1) + (Ax_1 + Sx_2, y_2)) =$$

$$= i((Wx_1, y_1) - (A^*x_2, y_1) + (Ax_1, y_2) + (Sx_2, y_2)) =$$

$$= i((x_1, Wy_1 + A^*y_2) + (x_2, Sy_2 - Ay_1)) =$$

$$= i\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Wy_1 + A^*y_2 \\ -Ay_1 + Sy_2 \end{pmatrix}\right) = i\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -Ay_1 + Sy_2 \\ Wy_1 + A^*y_2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, -i\begin{pmatrix} -Ay_1 + Sy_2 \\ Wy_1 + A^*y_2 \end{pmatrix}\right],$$

то оператор $(iB)^c$ определен для любого $y = y_1 \dotplus y_2 \in D(A) + D(A^*) = D(iB)$.

2. $D((iB)^c) \subset D(iB)$.

Предположим противное: $\exists x^* \in D((iB)^c) : x^* = x_1^* \dotplus x_2^*$, $x^* \notin D(iB)$. Тогда, по определению J-сопряженного оператора, $[iBx, x^*] = [x, z]$ для любого $x \in (D(iB))$, где $z = (iB)^c x^*$. Отсюда получим:

$$[iBx, x^*] = i\left[\begin{pmatrix} A & S \\ W & -A^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}\right] =$$

$$= i\left[\begin{pmatrix} Ax_1 + Sx_2 \\ Wx_1 - A^*x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}\right] = i\left(\begin{pmatrix} Wx_1 - A^*x_2 \\ Ax_1 + Sx_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}\right) =$$

$$= i((Wx_1 - A^*x_2, x_1^*) + (Ax_1 + Sx_2, x_2^*)) =$$

$$= i((Wx_1, x_1^*) - (A^*x_2, x_1^*) + (Ax_1, x_2^*) + (Sx_2, x_2^*)) =$$

$$= i((x_1, Wx_1^*) - (A^*x_2, x_1^*) + (Ax_1, x_2^*) + (x_2, Sx_2^*)),$$

так как операторы W и S непрерывные и самосопряженные. Таким образом:

$$i((x_1, Wx_1^*) - (A^*x_2, x_1^*) + (Ax_1, x_2^*) + (x_2, Sx_2^*)) =$$

$$= [x, z] = (x_2, z_1) + (x_1, z_2) \forall x_1 \in D(A), x_2 \in D(A^*).$$

Если $x_1 = \theta$, то $-i(A^*x_2, x_1^*) + i(x_2, Sx_2^*) = (x_2, z_1)$. Это эквивалентно тому, что равенство $(A^*x_2, x_1^*) = (x_2, Sx_2^* - iz_1)$ верно $\forall x_2 \in D(A^*)$, отсюда, по определению сопряженного оператора, $x_1^* \in D(A)$. Если $x_2 = \theta$, то $i(Ax_1, x_2^*) + i(x_1, Wx_1^*) = (x_1, z_2)$. Это эквивалентно тому, что равенство $(Ax_1, x_2^*) = (x_1, -Wx_1^* + iz_2)$ верно $\forall x_1 \in D(A)$, отсюда, по определению сопряженного оператора, $x_2^* \in D(A^*)$. Тогда $x^* = x_1^* \dotplus x_2^* \in D(A)D(A^*) = D(iB)$. Получили противоречие.

По теореме 2 получим, что оператор iB максимально J-диссипативен, так как:

$$\mathrm{Im}[-(iB)^c x, x] = \mathrm{Im}(-[x, iBx]) =$$

$$= \mathrm{Im}[iBx, x] \geq 0 \forall x \in D((iB)^c).$$

Следствие 1. *Если оператор B неотрицательно гамильтонов, и операторы W, S — непрерывно обратимы, то оператор B непрерывно обратим.*

□ Заметим, что если B — неотрицательно гамильтонов, то выполнены условия 1, 2, 3, теоремы 2.

Действительно:

$$\overline{D(A)} = \overline{D(A) \cap D(W)} = H,$$

$$\overline{D(A^*)} = \overline{D(A^*) \cap D(S)} = H,$$

так как операторы W и S заданы на все пространстве. A — замкнутый оператор, S и W — линейные, самосопряженные, неотрицательные операторы. По теореме 2 оператор B непрерывно обратим, так как операторы S и W непрерывно обратимы и, по лемме 1, оператор iB максимально J-диссипативный. Получим утверждение теоремы 1 как частный случай теоремы 2 для ограниченных, заданных на всем пространстве операторов W и S. ■

Теорема 3. *Пусть оператор B — неотрицательно гамильтонов. Если оператор A непрерывно обратим, то оператор B непрерывно обратим.*

□ Достаточно показать, что оператор iB непрерывно обратим. Для этого должны выполняться два условия:

$$\|iBx\| \geq \gamma \|x\| \text{ где } \gamma > 0.$$

$$\overline{Ran(iB)} = H \dot{+} H.$$

Проверим первое условие. Предположим противное: $\exists x_n : \|x_n\| = 1$ и $Bx_n \to \theta$. Из неравенства

$$\|iBx_n\| \geq \|[iBx_n, x_n]\| =$$
$$= ((\mathrm{Re}[iBx_n, x_n])^2 + (\mathrm{Im}[iBx_n, x_n])^2)^{1/2}$$

следует, что $\mathrm{Im}[iBx_n, x_n] \to 0$.

Пользуясь утверждением 2.14, [см. [2], гл. 2] так как $D(iB) = D((iB)^c)$, (см. доказательство леммы 1) получим

$$\mathrm{Im}[iBx_n, x_n] = [(iB)_I x_n, x_n] \forall x_n \in D(iB),$$

Здесь оператор $(iB)_I = (iB - (iB)^c)/2i : D(iB) \to \to H \dot{+} H$.

Рассмотрим оператор $C = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} : H \dot{+} H \to \to H \dot{+} H$. Он самосопряжен, ограничен и неотрицателен, так как операторы S и W самосопряженные, ограниченные и неотрицательные. Тогда существует ограниченный самосопряженный оператор $C^{1/2}$. Так как $C|_{D(iB)} = J(iB)_I$, получим:

$$(J(iB)_I x_n, x_n) = (Cx_n, x_n) =$$
$$= (C^{1/2}x_n, C^{1/2}x_n) = \|C^{1/2}x_n\|^2 \to 0,$$

откуда $J(iB)_I x_n = Cx_n \to \theta$.

Из самосопряженности оператора $J(iB)_R = J(iB + (iB)^c)/2$, которая проверяется непосредственно, и неравенства:

$$\|J(iB)_R\|^2 = (J(iB)_R x, J(iB)_R x) =$$
$$= \|iA^* x_2\|^2 + \|iAx_1\|^2 = \|A^* x_2\|^2 + \|Ax_1\|^2 \geq$$
$$\geq \gamma_1 \|x_1\|^2 + \gamma_2 \|x_2\|^2 \geq$$
$$\geq \min\{\gamma_1, \gamma_2\} \|x\|^2 \; \forall x \in (D(iB)),$$

которое следует из непрерывной обратимости оператора A, получим, что $J(iB)_R$ — непрерывно обратим. Из равенства $iB = (iB)_R + i(iB_I)$ следует $J(iB) = J(iB)_R + iJ(iB_I)$. Поэтому $J(iB)_R x_n = J(iB)x_n - iJ(iB_I)x_n \to 0$, где $\|x_n\| = 1$. Получили противоречие.

Проверим второе условие. Если $\overline{Ran(iB)} \neq H \dot{+} H$, то либо $0 \in \sigma_r(iB)$, либо $0 \in \sigma_p(iB)$. Так как по лемме 1 оператор iB максимально J-диссипативный, то $0 \notin \sigma_r(iB)$, а из доказанного ранее первого условия следует, что $0 \notin \sigma_p(iB)$. Таким образом, $\overline{Ran(iB)} = H \dot{+} H$. ■

Заметим, что в общем случае, когда оператор B удовлетворяет условиям 1, 2, 3, и iB максимально J-диссипативный, если операторы S и W не обязательно непрерывны, то непрерывная обратимость оператора A не влечет непрерывной обратимости B.

Ниже мы приводим пример, где $A = I$, S — непрерывен, W — неограничен и непрерывно обратим, а B не является непрерывно обратимым.

Пусть оператор T — симметрический с $\overline{D(T)} = H$, но не самосопряженный и $(Tx, x) \geq \gamma(x, x)$ для любого $x \in D(T)$, где $\gamma > 0$.

Рассмотрим полярное разложение оператора T:

$$T = V|T|,$$

где $|T| = (T^*T)^{1/2}$ — самосопряженный, а V — изометрический операторы. Оператор $|T|$ непрерывно обратим и $|T|^{-1}$ — самосопряженный, неотрицательный, так как $|T|$ самосопряжен и $(Tx, x) \geq \gamma(x, x)$.

Рассмотрим оператор B, имеющий следующий вид:

$$B = \begin{pmatrix} I & |T|^{-1} \\ W & -I \end{pmatrix} : D(W) + H \to H \dot{+} H,$$

где $I : H \to H$ — тождественный оператор, оператор W является самосопряженным, равномерно положительным расширением оператора T. Оператор iB — замкнут, что проверяется непосредственно. Оператор iB является J-диссипативным, так как операторы $|T|^{-1}$ и W самосопряженные неотрицательные. Оператор iB максимальный J-диссипативный. Это следует из замкнутости оператора iB и утверждения 2, так как $\overline{D(iB)} = H$ и $D(iB) = D((iB)^c)$.

Предположим, что оператор

$$B = \begin{pmatrix} I & |T|^{-1} \\ W & -I \end{pmatrix} : D(W) \dot{+} H \to H \dot{+} H$$

непрерывно обратим. Из этого следует, что если $Bx_n \to \theta$, то $x_n \to \theta$ при $n \to \infty$.

Пусть $x_n = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|T|^{-1}x_n^2 \\ x_n^2 \end{pmatrix}$ тогда:

$$Bx_n = \begin{pmatrix} I & |T|^{-1} \\ W & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -|T|^{-1}x_n^2 \\ x_n^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -|T|^{-1}x_n^2 + |T|^{-1}x_n^2 \\ -W|T|^{-1}x_n^2 - x_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ -(W|T|^{-1} + I)x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Покажем существование последовательности $\{x_n^2\}_{n=0}^{\infty} : \|x_n^2\| = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, такой, что $(W|T|^{-1} + I){x_n}^2 \to \theta$ при $n \to \infty$.

Так как $|T|$ непрерывно обратим, то $V = T\,|T|^{-1}$ и, из изометричности оператора V, следует, что $-1 \in \sigma(T\,|T|^{-1})$. Из того, что $Ran|\,T\,|^{-1} = D(|\,T\,|) = D(T)$, получим $W|T|^{-1} = T|T|^{-1}$, так как $W|_{D(T)} = T$. Следовательно $-1 \in \sigma(W\,|T|^{-1})$, то есть существует последовательность $\{x_n^2\}_{n=0}^{\infty} : \|x_n^2\| = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, такая, что $(W\,|T|^{-1} + I)x_n^2 \to \theta$ при $n \to \infty$.

Таким образом

$$Bx_n = \begin{pmatrix} \theta \\ -(W\,|T|^{-1} + I){x_n}^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix}, \text{ но}$$

$$\|x_n\|^2 = \|x_n^1\|^2 + \|x_n^2\|^2 =$$

$$= \|-|T|^{-1}\, x_n^{22}\|^2 + \|x_n^2\|^2 \geq \|x_n^2\|^2 = 1 \nrightarrow 0,$$

получили противоречие.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курина Г.А.* Обратимость неотрицательных гамильтоновых операторов в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения, Т. 37, № 6, 2001.

2. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С* Основы теориия линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М. Наука 1986. 352 с.

3. *Плеснер А. И.* Спектральная теория линейных операторов. М. Наука 1965. 624 с.