ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика. Математика, 2005, № 1

УДК 517.958

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ПОЛУГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ю. В. Засорин

Воронежский государственный университет

В статье строится в явном виде фундаментальное решение Коши для одного трехмерного нестационарного уравнения 5 порядка. С его помощью строится решение задачи Коши для этого уравнения, находятся асимптотики и направления быстрого убывания.

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью настоящей работы является изучение некоторых свойств решений задачи Коши для уравнения:

$$Pu = f(t,\vec{r}),\ t > 0,\ \vec{r} = (x,y,z) \in R^3; \qquad (1)$$

$$P \equiv \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^5}{\partial x^5} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (2)$$

Уравнение (1), (2) возникает в математических моделях волновых процессов в плазме, слабых ударных волн в диспергирующих диссипативных средах и т. п. путем добавления к одномерному уравнению Кортевега-де Фриза диссипативного члена с последующей линеаризацией и обобщением на пространственный случай (см. [1], [2]). К настоящему времени для уравнения (1), (2) не известны не только точные решения, но и даже их асимптотики. Для восполнения этого пробела в рамках настоящей работы будут получены явные формулы фундаментального решения и решения задачи Коши для уравнения (1), (2) и исследованы их свойства. В частности, будут определены направления быстрого убывания решений и установлено свойство полугруппы.

1. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1), (2):

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{t=+0} = h(\vec{r}),\ \vec{r} \in R^3; \qquad (3)$$

$$u(t,\vec{r}) = o(1),\ \vec{r} \to \infty; t \in R_+; \qquad (4)$$

где $u(t,\cdot)$, $f(t,\cdot)$, $h(\cdot) \in S'(R^3)$, причем производные по пространственным переменным $\vec{r} \in R^3$ понимаются в смысле теории распределений, а по переменной t — как производная по параметру. Дополнительно будем считать, что:

$$h(\vec{r}), f(t,\vec{r}) = O(|\vec{r}|^{-\infty}),\ \vec{r} \to \infty,\ t \in R_+. \qquad (5)$$

Несложно заметить, что в силу ограничений (4), (5) распределения u, f, продолженные нулем при $t < 0$, могут интерпретироваться и как распределения класса $\overset{\circ}{S}'(\bar{R}^4_+)$, представляющего собой пространство (см. [3]) распределений $T \in S'(R^4)$, таких, что $\text{supp}(T) \subset \bar{R}^4_+ = \{(t,\vec{r}) \in R^4 : t \ge 0,\ \vec{r} \in R^3\}$.

Теорема 1. *Решение* $u \in \overset{\circ}{S}'(\bar{R}^4_+)$ *задачи Коши (1)—(5) — единственно.*

Доказательство: Полагая распределения f и h из равенств (1) и (3) равными нулю и обозначая через $\hat{u}(p,\vec{r})$, $\text{Re}(p) \ge 0$ преобразование Лапласа распределения $u(t,\vec{r})$, получаем, в силу (1)—(3), что:

$$\hat{P}(p)\hat{u} \equiv \left[p\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^5}{\partial x^5} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\hat{u}(p,\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in R^3, \qquad (6)$$

причем $\hat{u}(p,\cdot) \in S'(R^3)$.

Обозначая через $\hat{P}(p,\vec{\rho})$, $\vec{\rho} = (\xi,\eta,\zeta)$ символ оператора $\hat{P}(p)$ из равенства (6):

$$\hat{P}(p,\vec{\rho}) \equiv -p\xi^2 + i\xi^5 - \eta^2 - \zeta^2 \qquad (7)$$

и замечая из равенства (7), что единственным вещественным нулем $\hat{P}(p,\vec{\rho})$ является точка $\vec{\rho} = \vec{0}$, немедленно получаем (см. [4]), что $\hat{u}(p,\vec{r})$ есть полином переменных $\vec{r} \in R^3$, который, в силу условия (4), тождественно равен нулю. Откуда следует, что и $u(t,\vec{r})$ равно нулю в $\overset{\circ}{S}'(\bar{R}^4_+)$. Теорема доказана.

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1), (2)

Определение. *Распределение $E(t,\vec{r}) \in \overset{\circ}{S}'(\bar{R}^4_+)$ будем называть фундаментальным решением Коши для задачи (1)—(4), если:*

$$PE(t,\vec{r}) = 0, \;\; t > 0, \vec{r} \in R^3; \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right|_{t=+0} = \delta(\vec{r}), \;\; \vec{r} \in R^3; \tag{9}$$

$$E(t,\vec{r}) = o(1), \;\; \vec{r} \to \infty; \tag{10}$$

где $\delta(\vec{r}) \in S'(R^3)$ — трехмерная дельта-функция Дирака.

Теорема 2. *Фундаментальное решение Коши для задачи (1)—(4) есть регулярное распределение класса $\overset{\circ}{S}'(\bar{R}^4_+)$ следующего вида:*

$$E(t,\vec{r}) = -3^{-1/3}4^{-1}\pi^{-1}t^{-4/3}\theta(t)\cdot\exp(\omega_1)Ai(\omega_2), \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (x + r^4/72t^3)r^2/12t^2,\\ \omega_2 &= (x + r^4/48t^3)\cdot(3t)^{-1/3},\end{aligned} \quad r^2 = y^2 + z^2; \tag{12}$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда, $Ai(\cdot)$ — функция Эйри первого рода (см. [5]):

$$Ai(\omega) = \pi^{-1}\int_0^{+\infty} Cos(3^{-1}\xi^3 + \xi\omega)d\xi. \tag{13}$$

Доказательство: Применим к распределению $E(t,\vec{r})$ прямое преобразование Фурье по пространственным переменным $\vec{r} \in R^3$. Обозначая через $\hat{E}(t,\vec{\rho})$, $\vec{\rho} = (\xi,\eta,\zeta)$ Фурье-образ, получаем, что равенства (8) и (9) преобразуются в равенства

$$\left[-\xi^2\frac{\partial}{\partial t} + i\xi^5 - \eta^2 - \zeta^2\right]\hat{E} = 0, \;\; t > 0; \tag{14}$$

$$-\xi^2\hat{E}\Big|_{t=+0} = 1(\vec{\rho}), \;\; \rho \in R^3, \tag{15}$$

соответственно. Решая задачу Коши (13), (15), получаем, что:

$$\begin{gathered}\hat{E}(t,\vec{\rho}) = -\xi^2\cdot\theta(t)\cdot\exp\left[(i\xi^3 - \xi^{-2}\rho^2)t\right],\\ \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2.\end{gathered} \tag{16}$$

Восстановим распределение $E(t,\vec{r})$ применением к $\hat{E}(t,\vec{\rho})$ обратного преобразования Фурье:

$$E(t,\vec{r}) = (2\pi)^{-3}\int_{R^3}\hat{E}(t,\vec{\rho})\exp\left[i\vec{r}\cdot\vec{\rho}\right]d\vec{\rho}. \tag{17}$$

Однако, в силу равенства (16) следует, что интеграл Фурье (17) расходится из-за наличия несуммируемой особенности на гиперплоскости $\{\xi = 0\}$ у распределения $\hat{E}(t,\vec{\rho})$. Регуляризуем интеграл (17) путем сведения к повторному:

$$\begin{gathered}E(t,\vec{r}) = -(2\pi)^{-3}\theta(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i(\xi^3 t + x\xi)\right]\xi^{-2}d\xi\times\\ \times I(t,y,z,\xi),\end{gathered} \tag{18}$$

$$I(t,y,z,\xi) = \int_{R^2}\exp\left[-\xi^{-2}\rho^2 t + iy\eta + iz\zeta\right]d\eta d\zeta. \tag{19}$$

В интеграле (19) перейдем к интегрированию в полярной системе координат (ρ,φ):

$$I(t,y,z,\xi) = \int_0^{+\infty}\exp\left[-\xi^2\rho^2 t\right]\rho d\rho\cdot I_1(y,z,\xi), \tag{20}$$

$$I_1(y,z,\xi) = \int_0^{2\pi}\exp\left[i(y\rho Cos\varphi + z\rho Sin\varphi)\right]d\varphi. \tag{21}$$

Интеграл (21) вычисляется непосредственно (см. [6]). Он равен:

$$I_1(y,z,\xi) = 2\pi J_0(r\rho), \;\; r = \sqrt{y^2 + z^2}, \tag{22}$$

где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя 1-го рода.

Объединяя (20) и (22), получаем, что:

$$I(t,y,z,\xi) = 2\pi\int_0^{+\infty}\exp\left[-\xi^{-2}\rho^2 t\right]J_0(r\rho)\rho d\rho. \tag{23}$$

Интеграл (23) также может быть вычислен непосредственно (см. [7]) и равен:

$$I(t,y,z,\xi) = \pi\xi^2 t^{-1}\cdot\exp\left[-\xi^2 r^2/4t\right]. \tag{24}$$

Объединяя равенства (18) и (24), получаем, что:

$$\begin{gathered}E(t,\vec{r}) =\\ = -2^{-3}\pi^{-2}t^{-1}\theta(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i(\xi^3 t + x\xi) - \frac{\xi^2 r^2}{4t}\right]d\xi.\end{gathered} \tag{25}$$

Отметим, что интеграл (25) уже не имеет несуммируемой особенности при $\xi = 0$. Для его вычисления заменим переменную интегрирования ξ на $\xi - iy^2/12t^2$, после чего интеграл примет следующий вид:

$$E(t,\vec{r}) = -2^{-2}\pi^{-1}t^{-1}\theta(t)\exp(\omega_1)I_2(t,\omega_2), \tag{26}$$

$$I_2(t,\omega_2) = (2\pi)^{-1}\int_\Gamma\exp\left[i(\xi^3 t + \omega_2\xi)\right]d\xi, \tag{27}$$

где автомодельные переменные ω_1, ω_2 определены равенствами (12), а в качестве $\Gamma \subset C$ можно взять любой контур, гомотопный вещественной оси. Поэтому интеграл (27) можно представить в виде:

$$I_2(t,\omega_2) = \pi^{-1} \int_0^{+\infty} Cos(\xi^3 t + \omega_2 \xi) d\xi. \quad (28)$$

Заменяя в интеграле (28) переменную интегрирования ξ на $(3t)^{-1/3}\xi$ и сравнивая с равенством (13), немедленно получаем, что:

$$I_2(t,\omega_2) = (3t)^{-1/3} Ai(\omega_2). \quad (29)$$

Теперь, объединяя равенства (26) и (29), устанавливаем справедливость равенства (11).

Остается проверить выполнение свойства (10). Пользуясь асимптотическими свойствами функции Эйри $Ai(\cdot)$ (см. [5]), получаем, что:

$$E(t,\vec{r}) \sim \begin{cases} (2^3 3^{5/12} \pi^{3/2} t^{5/4} x^{1/4})^{-1} \times \\ \times \exp[-(2/3^{3/2} t^{1/2} x^{3/2} + (12t^2)^{-1} x r^2 - \\ -(2^4 3^{3/2} t^{7/2})^{-1} x^{1/2} r^4 + (2^5 3^3 t^5)^{-1} r^6], \\ x \to +\infty; \\ (2^2 3^{5/12} \pi^{3/2} t^{5/4} \mid x \mid^{1/4})^{-1} e^{\omega_1} \times \\ \times Cos((2/3)\omega_2^{3/2} - \pi/4), \\ x \to -\infty; \\ (\pi^{3/2} t^{1/2} r)^{-1} \exp[-(2^6 3^2 t^5)^{-1} r^6], \\ r \to +\infty. \end{cases} \quad (30)$$

Откуда и следует непосредственно справедливость условия (10). Теорема доказана.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО СВОЙСТВА

Остановимся сначала на некоторых свойствах фундаментального решения Коши $E(t,\vec{r})$. Из равенств (11), (12) непосредственной проверкой можно установить, что:

$$E|_{t=+0} = -x \otimes \delta(y) \otimes \delta(z), \ \vec{r} \in R^3; \quad (31)$$

$$\left.\frac{\partial E}{\partial x}\right|_{t=+0} = -\theta(-x) \otimes \delta(y) \otimes \delta(z), \ \vec{r} \in R^3; \quad (32)$$

$$PE(t,\vec{r}) = \delta(t) \otimes \delta(\vec{r}), \ (t,\vec{r}) \in R^4. \quad (33)$$

Далее, из равенства (16) непосредственно следует, что:

$$E(t',\vec{r}) * \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(t'',\vec{r}) = E(t'+t'',\vec{r}), \quad (34)$$

где $t',t'' > 0$, а символ «$*$» означает свертку по пространственным переменным $\vec{r} \in R^3$.

Теперь, на основании Теоремы 1 и равенств (9), (10), (33) несложно установить справедливость следующего утверждения:

Теорема 3. *Задача Коши (1)—(5) корректно разрешима в классе* $\overset{\circ}{S}'(\bar{R}^4_+)$, *а ее решение* $u(t,\vec{r})$ *может быть представлено равенством:*

$$u(t,\vec{r}) = E(t,\vec{r}) * h(\vec{r}) + \int_0^t E(t-\tau,\vec{r}) * f(\tau,\vec{r}) d\tau. \quad (35)$$

Замечания. 1. Свойства (31), (32) легко позволяют конструировать решения задачи Коши для уравнения (1), (2) и с начальными условиями иного типа, нежели (3) (например, когда условие накладывается на само решение u или на его первую производную $\partial u/\partial x$).

2. Из равенств (34), (35) немедленно следует справедливость группового свойства решения задачи Коши (1)—(5):

$$u(t',\vec{r}) * \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(t'',\vec{r}) = u(t'+t'',\vec{r}), \ t',t'' > 0.$$

3. Наконец, из ограничений (5), асимптотических равенств (30) и представления (35) следует, что:

$$u(t,\vec{r}) \sim \begin{cases} O(|x|^{-\infty}), & x \to \pm\infty; \\ O(r^{-\infty}), & r \to +\infty. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буллаф Р., Кодри Ф.* Солитоны. — М.: Мир, 1983. — 408 с. Пер. с англ.: *Bullough R. K., Caudrey P.J.* Solitons. — Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New York. 1980.

2. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988. — 694 с.

3. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965. — 379 с.

4. *Засорин Ю.В.* О поведении на бесконечности решений некоторых классов дифференциальных уравнений и теоремы единственности. // Корректные краевые задачи для классических уравнений мат. физики: Сб. научн. тр. / АН СССР. Сиб. отделение. Ин-т математики — 1984. — С. 74—80.

5. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990. — 528 с.

6. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 800 с.

7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. — М.: Наука, 1970. — 328 с.