УДК 519.95

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Г. Задорожний, Е. А. Сирота

Воронежский государственный университет

Получена формула для нахождения математического ожидания и моментной функции второго порядка решения интегро-дифференциального уравнения, коэффициенты которого являются случайными процессами, заданными характеристическим функционалом.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1(t)x + \varepsilon_2\int_{t_0}^{t_1} K(t,s)x(s)ds + \varepsilon_3(t), \qquad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \qquad (2)$$

Здесь $t \in R$ — время, t_0, t_1 — заданные числа, $x : R \to R$ — искомая функция, $K(t,s)$ — заданная непрерывная функция двух переменных на квадрате $[t_0,t_1]\times[t_0,t_1]$. Обычно изучаются детерминированные уравнения, т.е. уравнения в которых коэффициенты $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — заданные детерминированные функции. Однако в реальных моделях некоторые системы подвержены влиянию случайных факторов, оказывающих существенное влияние на параметры системы.

Мы будем считать, что x_0, ε_2 являются случайными величинами, $\varepsilon_3(t)$ — случайным процессом, причем случайная величина x_0 не зависит от ε_2 и ε_3. Каждой реализации случайных величин x_0, ε_2 и случайного процесса ε_3 отвечает некоторое решение задачи (1), (2) $x(t)$. Таким образом, $x(t)$ является случайным процессом.

Мы рассмотрим задачу об отыскании важнейших характеристик этого процесса — математического ожидания $Mx(t)$ и моментной функции второго порядка $M\left(x(t)x(s)\right)$.

2. РЕШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Найдем решение задачи (1—2) в случае, когда модель является детерминированной.

Теорема 1. Пусть

1. $K(t,s)$ представимо в виде $K(t,s) = a(t)b(s)$;

2. $\varepsilon_1(t), \varepsilon_3(t), a(t), b(t)$ — детерминированные кусочно-непрерывные функции на отрезке $[t_0,t_1]$;

$$3.\ \varepsilon_2 \neq \left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t} e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds} a(\tau)b(t)d\tau dt\right]^{-1};$$

тогда

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds} + \varepsilon_2 e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}\int_{t_0}^t a(\tau)e^{-\int_{t_0}^\tau \varepsilon_1(s)ds}d\tau \times$$
$$\times\left[x_0\int_{t_0}^{t_1} b(t)e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}dt + \int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds}\varepsilon_3(\tau)d\tau dt\right]\times$$
$$\times\left(1-\varepsilon_2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t} e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds}a(\tau)b(t)d\tau dt\right)^{-1} +$$
$$+e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds}\varepsilon_3(\tau)d\tau dt \qquad (3)$$

является решением задачи (1—2).

Доказательство. В уравнении (1) сделаем замену переменных

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}V(t), \qquad (4)$$

получим

$$\varepsilon_1(t)e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}V(t) + e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}\frac{dV}{dt} = \varepsilon_1(t)e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}V(t) +$$

© Задорожний В. Г., Сирота Е. А., 2005.

$$+a(t)\varepsilon_2\int_{t_0}^{t_1} b(s)e^{\int_{t_0}^{s}\varepsilon_1(\tau)d\tau}V(s)ds+\varepsilon_3(t)$$

или

$$\frac{dV}{dt}=\varepsilon_2 a(t)e^{-\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\int_{t_0}^{t_1} b(s)e^{\int_{t_0}^{s}\varepsilon_1(\tau)d\tau}V(s)ds+e^{-\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\varepsilon_3(t).$$

Вычислим интеграл от этого равенства по промежутку $[t_0,t]$, получим

$$V(t)-V(t_0)=$$

$$=\varepsilon_2\int_{t_0}^{t} a(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}d\tau\int_{t_0}^{t_1} b(s)e^{\int_{t_0}^{s}\varepsilon_1(\tau)d\tau}V(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}\varepsilon_3(\tau)d\tau. \qquad (5)$$

Введем еще одну замену

$$\tilde V=\int_{t_0}^{t_1} b(s)e^{\int_{t_0}^{s}\varepsilon_1(\tau)d\tau}V(s)ds.$$

Умножим (5) на $b(t)e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}$ и проинтегрируем по отрезку $[t_0,t_1]$, получим

$$\tilde V=V(t_0)\int_{t_0}^{t_1} b(t)e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}dt+\varepsilon_2\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^{t} a(\tau)e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}d\tau dt\tilde V+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\varepsilon_3(\tau)d\tau dt.$$

Отсюда находим $\tilde V$ и, возвращаясь к равенству (5), найдем $V(t)$

$$V(t)=V(t_0)\times\left[1+\varepsilon_2\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\int_{t_0}^{t_1} b(t)e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}dt\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\varepsilon_2\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^{t} a(\tau)e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}d\tau dt\right)^{-1}\right]+$$

$$+\int_{t_0}^{t} a(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}d\tau\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\varepsilon_3(\tau)d\tau dt\times$$

$$\times\left(1-\varepsilon_2\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^{t} a(\tau)e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}d\tau dt\right)^{-1}+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\varepsilon_3(\tau)d\tau dt.$$

Подставляя последнее выражение в (4), получим (3).

Теорема доказана.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

В дальнейшем знак * обозначает свертку функций по переменной u_2 [4, стр. 108].

Пусть X — банахово пространство функций $x(t)$, определенных на отрезке T, в котором плотно множество суммируемых с квадратом функций. Напомним [2], что если приращение функционала y, определенного на банаховом пространстве X имеет вид

$$y(x+h)-y(x)=\int_T \varphi(t,x)h(t)dt+o(h),$$

где $\varphi: T\times X\to R$ и интеграл является линейным ограниченным по $h\in X$ функционалом, то $\varphi(t,x)$ называется вариационной производной и обозначается $\delta y(x)/\delta x(t)$.

Пусть ε_2 является случайной величиной, а $\varepsilon_3(t)$ является случайным процессом, которые заданы характеристическим функционалом [2]

$$\psi(u_2,u_3)=M\left(\exp\left(i\left[\varepsilon_2u_2+\int_T\varepsilon_3(s)u_3(s)ds\right]\right)\right),$$

где M — математическое ожидание по функции распределения $\varepsilon_2,\varepsilon_3$.

Введем в рассмотрение вспомогательное отображение

$$y(t,u_2,u_3)=M\left(x(t)\exp\left(i\varepsilon_2u_2+i\int_T\varepsilon_3(s)u_3(s)ds\right)\right).$$

Отметим, что если мы найдем $y(t,u_2,u_3)$, то легко найдем и математическое ожидание

$$Mx(t)=y(t,0,0).$$

Оказывается для y можно получить детерминированную задачу. Умножим (1) и (2) на $\exp\left(i\varepsilon_2u_2+i\int_T\varepsilon_3(s)u_3(s)ds\right)$ и усредним по функции распределения $x_0,\varepsilon_2,\varepsilon_3$. Полученные равенства формально можно записать с помощью отображения $y(t,u_2,u_3)$ в виде

$$\frac{\partial y(t,u_2,u_3)}{\partial t}=\varepsilon_1(t)y-$$

$$-ia(t)\int_{t_0}^{t_1} b(s)\frac{\partial y(s,u_2,u_3)}{\partial u_2}ds-i\frac{\delta\psi(u_2,u_3)}{\delta u_3(t)}, \quad (6)$$

$$y(t_0,u_2,u_3)=y_0(u_2,u_3), \quad (7)$$

где

$$y_0(u_2,u_3)=M(x_0)\psi(u_2,u_3). \quad (8)$$

Таким образом, мы получили детерминированную задачу (6), (7) для $y(t,u_2,u_3)$. Определение. Математическим ожиданием решения задачи (1), (2) называется $y(t,0,0)$, где $y(t,u_2,u_3)$ — решение задачи (6), (7).

3. РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Введем обозначения

$$B=\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^{t} a(\tau)e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds}d\tau dt;$$

$$A(t)=\int_{t_0}^{t} a(\tau)\int_{t_0}^{t_1} b(t)e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds}dtd\tau;$$

$$\varphi(t,u_2,u_3)=-i\frac{\delta\psi(u_2,u_3)}{\delta u_3(t)}.$$

Теорема 2. *Пусть*

1. $K(t,s)$ представимо в виде $K(t,s)=a(t)b(s)$;

2. $\varepsilon_1(t),a(t),b(t)$ заданные кусочно-непрерывные функции на отрезке $[t_0,t_1]$;

3. $B\neq 0$,

тогда

$$y(t,u_2,u_3)=y_0(u_2,u_3)e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}-\frac{1}{2}B^{-1}e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}\times$$
$$\times\Big[A(t)\left(iB^{-1}y_0(u_2,u_3)*e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2+2y_0(u_2,u_3)e^{iu_2B^{-1}}\right)+$$
$$+\int_{t_0}^t a(\tau)e^{-\int_{t_0}^\tau \varepsilon_1(s)ds}d\tau\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds}\left(iB^{-1}\varphi(\tau,u_2,u_3)*\right.$$
$$\left.*e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2+2\varphi(\tau,u_2,u_3)e^{iu_2B^{-1}}\right)d\tau dt\Big]+$$
$$+\int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds}\varphi(\tau,u_2,u_3)d\tau \quad (9)$$

является обобщенным решением задачи (6), (7).

Доказательство. Пусть $\hat{y}(t,\xi_2,u_3)=$ $=F\left[y(t,u_2,u_3)\right]$ — преобразование Фурье [3] по переменной u_2, а $F^{-1}[g]$ — обозначает обратное преобразование Фурье по переменной ξ_2. Применим к уравнениям (6), (7) преобразование Фурье по переменной u_2, получим

$$\frac{\partial\hat{y}(t,\xi_2,u_3)}{\partial t}=\varepsilon_1(t)\hat{y}(t,\xi_2,u_3)-$$
$$-a(t)\xi_2\int_{t_0}^{t_1} b(s)\hat{y}(t,\xi_2,u_3)ds+\hat{\varphi}(t,\xi_2,u_3), \quad (10)$$

$$\hat{y}(t_0,\xi_2,u_3)=\hat{y}_0(\xi_2,u_3). \quad (11)$$

Мы пришли к детерминированной задаче (10), (11) вида (1), (2).

Воспользовавшись формулой (3), получаем

$$\hat{y}(t,\xi_2,u_3)=\hat{y}_0(\xi_2,u_3)e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}-\xi_2e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}\times$$
$$\times\int_{t_0}^t a(\tau)e^{-\int_{t_0}^\tau \varepsilon_1(s)ds}d\tau\left[\hat{y}_0(\xi_2,u_3)\int_{t_0}^{t_1} b(t)e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}dt+\right.$$
$$\left.+\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds}\hat{\varphi}(\tau,\xi_2,u_3)d\tau dt\right]\times$$
$$\times\left(1+\xi_2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t} e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds}a(\tau)b(t)d\tau dt\right)^{-1}+$$
$$+e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds}\hat{\varphi}(\tau,\xi_2,u_3)d\tau dt,$$

или, используя введенные обозначения для $A(t)$ и B, получим

$$\hat{y}(t,\xi_2,u_3)=\hat{y}_0(\xi_2,u_3)e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}-\xi_2e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}\times$$
$$\times\left[\hat{y}_0(\xi_2,u_3)A(t)+\int_{t_0}^t a(\tau)e^{-\int_{t_0}^\tau \varepsilon_1(s)ds}d\tau\times\right.$$
$$\left.\times\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds}\hat{\varphi}(\tau,\xi_2,u_3)d\tau dt\right](1+\xi_2B)^{-1}+$$
$$+e^{\int_{t_0}^t \varepsilon_1(s)ds}\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t \varepsilon_1(s)ds}\hat{\varphi}(\tau,\xi_2,u_3)d\tau dt.$$

Вычислим обратное преобразование Фурье по переменной ξ_2

$$y(t,u_2,u_3)=F_{\xi_2}^{-1}\left[\widehat{y}_0(\xi_2,u_3)e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\right]-$$

$$-F_{\xi_2}^{-1}\left[\xi_2\widehat{y}_0(\xi_2,u_3)e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}A(t)\right]*F_{\xi_2}^{-1}\left[1+\xi_2B\right]^{-1}-$$

$$-F_{\xi_2}^{-1}\left[e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\xi_2\int_{t_0}^{t}a(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}d\tau\times\right.$$

$$\left.\times\int_{t_0}^{t_1}b(t)\int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\widehat{\varphi}(\tau,\xi_2,u_3)d\tau dt\right]*F_{\xi_2}^{-1}\left[1+\xi_2B\right]^{-1}+$$

$$+F_{\xi_2}^{-1}\left[e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\int_{t_0}^{t_1}b(t)\int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\widehat{\varphi}(\tau,\xi_2,u_3)d\tau dt\right].$$

Далее, используя свойства преобразования Фурье [3], находим

$$F_{\xi_2}^{-1}\left[\xi_2\widehat{y}_0(\xi_2,u_3)e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}A(t)\right]=$$

$$=ie^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}A(t)F_{\xi_2}^{-1}\left[-i\xi_2\widehat{y}_0(\xi_2,u_3)\right]=$$

$$=ie^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}A(t)\frac{\partial y_0(\xi_2,u_3)}{\partial u_2};$$

$$F_{\xi_2}^{-1}\left[1+\xi_2B\right]^{-1}=F_{\xi_2}^{-1}\left[\frac{1}{B(\xi_2+B^{-1})}\right]=$$

$$=B^{-1}F_{\xi_2}^{-1}\left[\frac{1}{\xi_2+B^{-1}}\right]=-\frac{1}{2}iB^{-1}\exp\left[iu_2B^{-1}\right]\operatorname{sign}u_2;$$

$$F_{\xi_2}^{-1}\left[e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\xi_2\int_{t_0}^{t}a(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}d\tau\times\right.$$

$$\left.\times\int_{t_0}^{t_1}b(t)\int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\widehat{\varphi}(\tau,\xi_2,u_3)d\tau dt\right]=$$

$$=ie^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\int_{t_0}^{t}a(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}d\tau\times$$

$$\times F_{\xi_2}^{-1}\left[-i\xi_2\int_{t_0}^{t_1}b(t)\int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\widehat{\varphi}(\tau,\xi_2,u_3)d\tau dt\right]=$$

$$=ie^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\int_{t_0}^{t}a(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}d\tau\int_{t_0}^{t_1}b(t)\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\frac{\partial\varphi(\tau,u_2,u_3)}{\partial u_2}d\tau dt.$$

Таким образом,

$$y(t,u_2,u_3)=y_0(u_2,u_3)e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}-\frac{1}{2}e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial y_0(u_2,u_3)}{\partial u_2}A(t)+\int_{t_0}^{t}a(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}d\tau\times\right.$$

$$\left.\times\int_{t_0}^{t_1}b(t)\int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\frac{\partial\varphi(\tau,u_2,u_3)}{\partial u_2}d\tau dt\right]*$$

$$*B^{-1}e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2+e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}\varphi(\tau,u_2,u_3)d\tau.$$

Преобразуем выражение

$$\frac{\partial y_0(u_2,u_3)}{\partial u_2}*\exp\left(iu_2B^{-1}\right)\operatorname{sign}u_2=$$

$$=y_0(u_2,u_3)*\left[iB^{-1}\exp\left(iu_2B^{-1}\right)\operatorname{sign}u_2+\right.$$

$$\left.+2\exp\left(iu_2B^{-1}\right)\delta(u_2)\right]=$$

$$=iB^{-1}y_0(u_2,u_3)*\exp\left(iu_2B^{-1}\right)\operatorname{sign}u_2+$$

$$+2y_0(u_2,u_3)\exp\left(iu_2B^{-1}\right).$$

Аналогично

$$\frac{\partial\varphi(\tau,u_2,u_3)}{\partial u_2}*\exp\left(iu_2B^{-1}\right)\operatorname{sign}u_2=$$

$$=\varphi(\tau,u_2,u_3)*\left[iB^{-1}\exp\left(iu_2B^{-1}\right)\operatorname{sign}u_2+\right.$$

$$\left.+2\exp\left(iu_2B^{-1}\right)\delta(u_2)\right]=$$

$$=iB^{-1}\varphi(\tau,u_2,u_3)*\exp\left(iu_2B^{-1}\right)\operatorname{sign}u_2+$$

$$+2\varphi(\tau,u_2,u_3)\exp\left(iu_2B^{-1}\right).$$

Подставляя последние выражения в формулу для $y(t,u_2,u_3)$, получаем (9). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2, тогда обобщенное математическое ожидание $Mx(t)$ задачи (1), (2) может быть найдено в виде*

$$M(x(t))=M(x_0)e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}-\frac{1}{2}B^{-1}e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\times$$

$$\times\left[M(x_0)A(t)\left(iB^{-1}\left(\psi(u_2,u_3)*e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2\right)\Big|_{u_2=0,u_3=0}+2\right)+\right.$$

$$+\int_{t_0}^{t}a(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}d\tau\int_{t_0}^{t_1}b(t)e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}\left(iB^{-1}\left(\varphi(\tau,u_2,u_3)*e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2\right)\Big|_{u_2=0,u_3=0}+\right.$$
$$\left.+2M\left(\varepsilon_3(\tau)\right)\right)d\tau dt\Big]+e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}M\left(\varepsilon_3(\tau)\right)d\tau.$$

Доказательство. Поскольку

$$\varphi\left(\tau,u_2,u_3\right)=-i\frac{\delta\psi(u_2,u_3)}{\delta u_3(\tau)}\bigg|_{u_2=0,u_3=0}=M\left(\varepsilon_3\left(\tau\right)\right),$$

$y_0\left(u_2,u_3\right)=M\left(x_0\right)\psi\left(u_2,u_3\right)$, то, полагая $u_2=0,u_3=0$ в формуле (9), получаем формулу для математического ожидания.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ МОМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аналогичным способом можно найти и вторую моментную функцию [5] для решения задачи (1), (2).

Введем в рассмотрение вспомогательное отображение

$$z(t,s,u_2,u_3)=$$
$$=M\left(x(t)x(s)\exp\left(i\varepsilon_2u_2+i\int_T\varepsilon_3(s)u_3(s)ds\right)\right).$$

Отметим, что если мы найдем $z(t,s,u_2,u_3)$, то легко найдем и моментную функцию второго порядка

$$M\left(x(t)x(s)\right)=y(t,s,0,0).$$

Оказывается для z можно получить детерминированную задачу. Умножим (1) и (2) на $x(s)\exp\left(i\varepsilon_2u_2+i\int_T\varepsilon_3(s)u_3(s)ds\right)$ и усредним по функции распределения $x_0,\varepsilon_2,\varepsilon_3$. Полученные равенства можно записать с помощью отображения $z(t,s,u_2,u_3)$ в виде

$$\frac{\partial z(t,s,u_2,u_3)}{\partial t}=\varepsilon_1(t)z-$$
$$-ia(t)\int_{t_0}^{t_1}b(s_1)\frac{\partial z(s,s_1,u_2,u_3)}{\partial u_2}ds_1-i\frac{\delta y\left(s,u_2,u_3\right)}{\delta u_3\left(t\right)},\quad(12)$$

$$z(t_0,s,u_2,u_3)=$$
$$=M\left(x_0x(s)\exp\left(i\varepsilon_2u_2+i\int_T\varepsilon_3(s)u_3(s)ds\right)\right).\quad(13)$$

Таким образом, мы получили детерминированную задачу (12), (13) для $z\left(t,s,u_2,u_3\right)$.

5. РЕШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ МОМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Введем обозначение

$$\varphi_1\left(t,s,u_2,u_3\right)=-i\frac{\delta y\left(s,u_2,u_3\right)}{\delta u_3\left(t\right)}.$$

Правая часть начального условия (13) неизвестна, следовательно, решение задачи (12), (13), пока, не может быть найдено. Построим дополнительную задачу для нахождения начального условия. Положим в (12) и (13) $s=t_0$, получим

$$\frac{\partial z(t,t_0,u_2,u_3)}{\partial t}=\varepsilon_1(t)z-$$
$$-ia(t)\int_{t_0}^{t_1}b(s_1)\frac{\partial z(t_0,s_1,u_2,u_3)}{\partial u_2}ds_1+\varphi_1\left(t,t_0,u_2,u_3\right),\quad(14)$$

$$z(t_0,t_0,u_2,u_3)=M(x_0{}^2)\psi(u_2,u_3).\quad(15)$$

Задача (14), (15) аналогична задаче (6), (7). Используя (9), получаем решение задачи (14), (15)

$$z(t,t_0,u_2,u_3)=M(x_0{}^2)\psi(u_2,u_3)e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(\eta)d\eta}-$$
$$-\frac{1}{2}B^{-1}e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(\eta)d\eta}\Big[M(x_0{}^2)A(t)\left(iB^{-1}\psi(u_2,u_3)*e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2+\right.$$
$$\left.+2\psi(u_2,u_3)e^{iu_2B^{-1}}\right)+\int_{t_0}^{t}a(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}d\tau\int_{t_0}^{t_1}b(\eta)\times$$
$$\times\int_{t_0}^{\eta}e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\left(iB^{-1}\varphi_1\left(\tau,t_0,u_2,u_3\right)*e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2+\right.$$
$$\left.+2\varphi_1\left(\tau,t_0,u_2,u_3\right)e^{iu_2B^{-1}}\right)d\tau d\eta\Big]+$$
$$+\int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(\eta)d\eta}\varphi_1\left(\tau,t_0,u_2,u_3\right)d\tau.$$

Из определения отображения $z(t,s,u_2,u_3)$ следует, что

$$z(t,t_0,u_2,u_3)=z(t_0,t,u_2,u_3).$$

При $t=s$ получаем

$$z(s,t_0,u_2,u_3)=z(t_0,s,u_2,u_3).$$

$$z(t_0,s,u_2,u_3)=M(x_0{}^2)\psi(u_2,u_3)e^{\int_{t_0}^{s}\varepsilon_1(\eta)d\eta}-$$
$$-\frac{1}{2}B^{-1}e^{\int_{t_0}^{s}\varepsilon_1(\eta)d\eta}\Big[M(x_0{}^2)A(s)\big(iB^{-1}\psi(u_2,u_3)\times$$
$$\times e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2+2\psi(u_2,u_3)e^{iu_2B^{-1}}\big)+\int_{t_0}^{s}a(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}d\tau\times$$
$$\times\int_{t_0}^{t_1}b(\eta)\int_{t_0}^{\eta}e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\big(iB^{-1}\varphi_1(\tau,t_0,u_2,u_3)*e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2+$$
$$+2\varphi_1(\tau,t_0,u_2,u_3)e^{iu_2B^{-1}}\big)d\tau d\eta\Big]+$$
$$+\int_{t_0}^{s}e^{\int_{\tau}^{s}\varepsilon_1(\eta)d\eta}\varphi_1(\tau,t_0,u_2,u_3)d\tau.$$

Таким образом, мы получаем выражение для начального условия (13)

Теорема 4. *Пусть*

1. $K(t,s)$ представимо в виде $K(t,s)=a(t)b(s)$;

2. $\varepsilon_1(t),a(t),b(t)$ заданные кусочно-непрерывные функции на отрезке $[t_0,t_1]$;

3. $B\neq 0$,

тогда

$$z(t,s,u_2,u_3)=z(t_0,s,u_2,u_3)e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}-$$
$$-\frac{1}{2}B^{-1}e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\Big[A(t)\big(iB^{-1}z(t_0,s,u_2,u_3)\times$$
$$\times e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2+2z(t_0,s,u_2,u_3)e^{iu_2B^{-1}}\big)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}a(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}d\tau+\int_{t_0}^{t_1}b(t)\int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\big(iB^{-1}\varphi_1(\tau,s,u_2,u_3)\times$$
$$\times e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2+2\varphi_1(\tau,s,u_2,u_3)e^{iu_2B^{-1}}\big)d\tau dt\Big]+$$
$$+\int_{t_0}^{t}e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\varphi_1(\tau,s,u_2,u_3)d\tau \qquad (17)$$

является обобщенным решением задачи (12), (13).

Доказательство. Задача (12), (13) аналогична задаче (6), (7). Используя (9), приходим к решению (17). Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы 4, тогда обобщенная вторая моментная функция $M(x(t)x(s))$ решения задачи (1), (2) может быть найдена в виде*

$$M(x(t)x(s))=z(t_0,s,0,0)e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}-\frac{1}{2}B^{-1}e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\times$$
$$\Big[A(t)\int_{t_0}^{t_1}b(t)\Big(iB^{-1}\big(z(t_0,s,u_2,u_3)*e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2\big)\Big|_{u_2=0,u_3=0}+$$
$$+2z(t_0,s,0,0)\Big)+\int_{t_0}^{t}a(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}d\tau\int_{t_0}^{t_1}b(t)e^{\int_{t_0}^{s}\varepsilon_1(s_1)ds_1}\times$$
$$\times\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}\left(B^{-1}\left(\frac{\delta y(s,u_2,u_3)}{\delta u_3(\tau)}*e^{iu_2B^{-1}}\operatorname{sign}u_2\right)\Big|_{u_2=0,u_3=0}+\right.$$
$$\left.+2\frac{\delta y(s,u_2,u_3)}{\delta u_3(\tau)}\Big|_{u_2=0,u_3=0}\right)d\tau dt\Big]-$$
$$-ie^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds}\frac{\delta y(s,u_2,u_3)}{\delta u_3(\tau)}\Big|_{u_2=0,u_3=0}d\tau.$$

Доказательство. Полагая $u_2=0,u_3=0$ в формуле (17), получаем формулу для обобщенной моментной функции второго порядка.

6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Пусть ε_2 и $\varepsilon_3(t)$ независимы.

I. Посчитаем математическое ожидание случайного процесса $x(t)$ задачи (1)—(2) в случае, когда случайная величина ε_2 распределена нормально, т.е. характеристическая функция $\psi\ \ (u_2)$ имеет вид

$$\psi(u_2)=\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}u_2^2+i\xi u_2\right).$$

Преобразуем выражение, содержащее свертку в формуле для математического ожидания

$$\psi(u_2)*\exp(iu_2B^{-1})\operatorname{sign}u_2=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(u_2-\tau)^2+i\xi(u_2-\tau)\right)\times$$
$$\times\exp(i\tau B^{-1})\operatorname{sign}\tau d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(u_2-\tau)^2\right)\times$$
$$\times\exp(i\xi u_2)\exp(-i\xi\tau)\exp(i\tau B^{-1})\operatorname{sign}\tau d\tau=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(u_2-\tau)^2\right)\exp(i\xi u_2)\times$$
$$\times\exp\left(i\tau\left(B^{-1}-\xi\right)\right)\operatorname{sign}\tau d\tau=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(u_2-\tau)^2\right)(\cos\xi u_2+i\sin\xi u_2)\times$$
$$\times\left(\cos\left(B^{-1}-\xi\right)\tau+i\sin\left(B^{-1}-\xi\right)\tau\right)\operatorname{sign}\tau d\tau=$$
$$=\cos\xi u_2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(u_2-\tau)^2\right)\cos\left(B^{-1}-\xi\right)\tau\operatorname{sign}\tau d\tau+$$
$$+i\cos\xi u_2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(u_2-\tau)^2\right)\sin\left(B^{-1}-\xi\right)\tau\operatorname{sign}\tau d\tau+$$
$$+i\sin\xi u_2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(u_2-\tau)^2\right)\cos\left(B^{-1}-\xi\right)\tau\operatorname{sign}\tau d\tau-$$
$$-\sin\xi u_2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(u_2-\tau)^2\right)\sin\left(B^{-1}-\xi\right)\tau\operatorname{sign}\tau d\tau.$$

где $\xi = M\varepsilon_2, \sigma = \sqrt{D\varepsilon_2}$.

Посчитаем теперь

$$\left(\psi(u_2) * \exp\left(iu_2B^{-1}\right)\operatorname{sign} u_2\right)\Big|_{u_2=0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau^2\right)\cos\left(B^{-1}-\xi\right)\tau \operatorname{sign}\tau d\tau +$$

$$+ i\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau^2\right)\sin\left(B^{-1}-\xi\right)\tau \operatorname{sign}\tau d\tau =$$

$$= i\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau^2\right)\sin\left(B^{-1}-\xi\right)\tau \operatorname{sign}\tau d\tau =$$

$$= -2i\int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau^2\right)\sin\left(\xi - B^{-1}\right)\tau d\tau.$$

$$Mx(t) = e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\left[M(x_0)\left(1-\frac{A(t)}{B}\right)- \right.$$

$$-M(x_0)\frac{A(t)}{B^2}\int_{-\infty}^{0}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau^2\right)\sin\left(\xi - B^{-1}\right)\tau d\tau -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} b(t)\int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t}\varepsilon_1(s)ds}\left(\frac{1}{B}M\varepsilon_3(\tau)+\frac{1}{B^2}M\varepsilon_3(\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{0}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}s^2\right)\sin\left(\xi - B^{-1}\right)sds\right)d\tau dt +$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{\tau}\varepsilon_1(s)ds} M\varepsilon_3(\tau)d\tau\right].$$

Пусть $\varepsilon_1 = 0.0001, a(t) = e^{-t}, b(t) = e^{t}, \xi = 0.01$, $M\varepsilon_3(t) = -0.01t, t_0 = 0, t_1 = 1$.

На рис. 1 построены графики решения детерминированной задачи (график представлен пунктирным крестом) и графики математического ожидания решения задачи в случаях, когда

1) $\sigma = 1$;

2) $\sigma = 0.1$;

3) $\sigma = 0.001$.

II. Посчитаем математическое ожидание случайного процесса $x(t)$ задачи (1)—(2) в случае, когда случайная величина ε_2 описывается распределением Лапласа т.е. характеристическая функция $\psi(u_2)$ имеет вид

$$\psi(u_2) = \frac{\exp\left(i\xi u_2\right)}{1+0.5\sigma u_2^{\,2}}.$$

Преобразовать выражение, содержащее свертку в формуле для математического ожидания аналитически не удалось. Поэтому выражение

$$\psi\left(u_2\right) * \exp\left(iu_2B\right)\operatorname{sign} u_2\Big|_{u_2=0}$$

было посчитано численно с помощью математического пакета Maple V Release 4.

Также как и в предыдущем случае, полагаем

$$\varepsilon_1 = 0.0001, a(t) = e^{-t}, b(t) = e^{t}, \xi = 0.01,$$
$$M\varepsilon_3(t) = -0.01t, t_0 = 0,\ t_1 = 1.$$

На рис. 2 построены графики решения детерминированной задачи (график представлен пунктирным крестом) и графики математического ожидания решения задачи в случаях, когда

4) $\sigma = 1$;

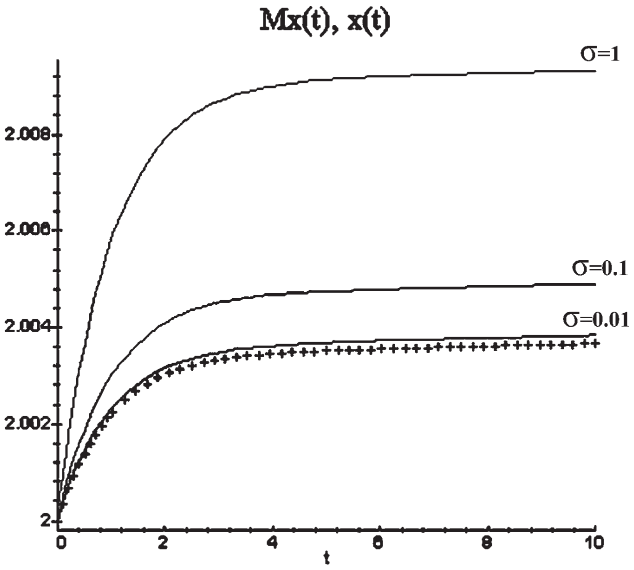

Рис. 1

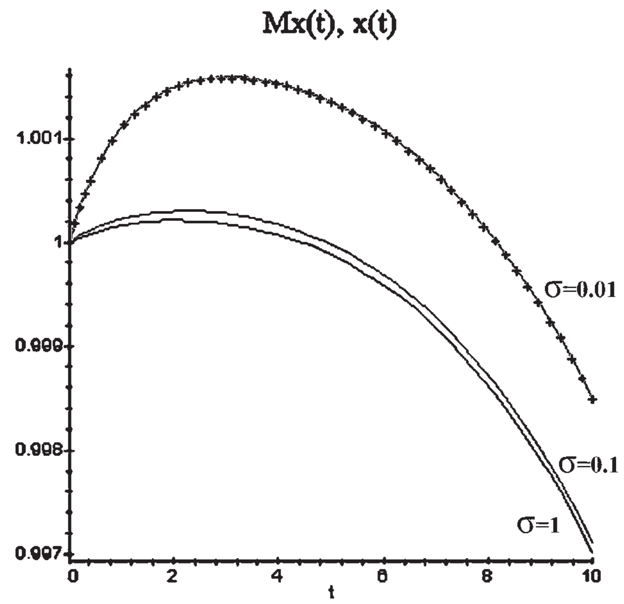

Рис. 2

5) $\sigma = 0.1$;

6) $\sigma = 0.001$.

Графики подтверждают ожидаемый результат, т.е. при уменьшении дисперсии график математического ожидания приближается к графику решения детерминированной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. — М.: Прогресс, 1975. — 605 с.

2. *Задорожний В.Г.* Дифференциальные уравнения с вариационными производными / В. Г. Задорожний. – Воронеж, 2000. — 368 с.

3. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1976. — 280 с.

4. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов — М.: Наука, 1965. — 327 с.

5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1968. — 720 с.