УДК 517.9:532

# НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ ДАННЫХ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ*

**Д. А. Воротников**

*Воронежский государственный университет*

Данная работа посвящена продолжению начатых в [1] исследований начальной задачи для уравнений движения широкого класса несжимаемых нелинейных вязкоупругих сред во всем двумерном или трехмерном пространстве. Основным результатом этой работы является теорема о непрерывной зависимости решений данной задачи от начальных данных и данного поля внешних сил.

## 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы будем использовать следующие обозначения, большинство из которых стандартны.

Обозначим через $\mathbb{R}^{n\times n}$ пространство матриц порядка $n\times n$ со скалярным произведением для $A=(A_{ij})$, $B=(B_{ij})$

$$(A,B)_{\mathbb{R}^{n\times n}}=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}B_{ij},$$

а через $\mathbb{R}_S^{n\times n}$ — его подпространство симметричных матриц.

Обозначим через $\mathbb{R}^{n\times n\times n}$ пространство упорядоченных наборов из $n$ матриц порядка $n\times n$ со скалярным произведением для $A=(A_1,\ldots,A_n)$, $B=(B_1,\ldots,B_n)$

$$(A,B)_{\mathbb{R}^{n\times n\times n}}=\sum_{i=1}^{n}(A_i,B_i)_{\mathbb{R}^{n\times n}}.$$

Символом $\operatorname{grad}p$ будем обозначать градиент $\left(\frac{\partial p}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial p}{\partial x_n}\right)$ функции $p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Символом $\nabla u$ будем обозначать матрицу Якоби от вектор-функции $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Символом $\nabla\tau$ будем обозначать упорядоченный набор матриц Якоби столбцов матрицы-функции $\tau:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times n}$. Символом $\Delta$ будем обозначать оператор Лапласа $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Частную производную от функции, зависящей от матричного аргумента $\xi=(\xi_{ij})$, по компоненте $\xi_{ij}$ будем обозначать $\frac{\partial}{\partial\xi_{ij}}$.

Мы будем использовать функциональные пространства типа Соболева $H_V^m=\{u\in H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n),\operatorname{div}u=0\}$ и $H_M^m=H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}_S^{n\times n})$. Скалярное произведение и евклидову норму в обоих пространствах будем обозначать $(\cdot,\cdot)_m,\|\cdot\|_m$. Напомним, что скалярное произведение в этих пространствах можно определить равенством

$$(u,v)_m=((I-\Delta)^{\frac{m}{2}}u,(I-\Delta)^{\frac{m}{2}}v)_{L_2}.$$

Соответствующую евклидову норму в обоих пространствах будем обозначать $\|\cdot\|_m$.

Символ $P$ ниже будет обозначать проектор Лере,

$$Pu=u-\Delta^{-1}\operatorname{grad}(\operatorname{div}u).$$

Это ортогональный проектор из $H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ на $H_V^m$.

Символами $C([0,T];X)$, $L_2(0,T;X)$ и т.п. обозначаются банаховы пространства непрерывных, суммируемых с квадратом и т.п. функций на промежутке $[0,T]$ со значениями в некотором банаховом пространстве $X$.

## 2. НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

В этой работе исследуется следующая начальная задача для уравнений движения несжимаемой нелинейной вязкоупругой среды во всем пространстве ([1], см. также [2, 3])



* Работа поддержана грантами №04-01-00081 РФФИ и VZ-010-0 Минобразования и науки РФ и CRDF.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+\operatorname{grad}p-\operatorname{Div}(\Psi(\mathcal{E})+\tau)=f_0, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div}u=0, \quad (2.2)$$

$$\tau+\lambda\frac{\mathcal{D}_a\tau}{\mathcal{D}t}+\beta(\tau,\mathcal{E})=2\eta_1\mathcal{E}, \quad (2.3)$$

$$(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$$

Здесь $u$ — неизвестный вектор скорости, $p$ — неизвестное давление, $\tau$ — неизвестный тензор касательных напряжений, $f_0$ — поле внешних сил (все они зависят от точки $x$ пространства $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$ и момента времени $t$), $\mathcal{E}=\mathcal{E}(u)=(\mathcal{E}_{ij})$, $\mathcal{E}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ — тензор скоростей деформации, $\lambda>0$ — время релаксации, $\eta_1>0$ — вязкость. Плотность среды считается равной единице. Дивергенция $\operatorname{Div}$ от тензора это вектор с координатами $(\operatorname{Div}\sigma)_j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}$. Выражение $\frac{\mathcal{D}_aA}{\mathcal{D}t}$ есть объективная (олдройдовская) производная тензора [3, 4]. Для функции $A(x,t)$ со значениями во множестве матриц $n\times n$ она определяется по формуле

$$\frac{\mathcal{D}_aA}{\mathcal{D}t}=\frac{\partial A}{\partial t}+ \\ +\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial A}{\partial x_i}+AW-WA-a(\mathcal{E}A+A\mathcal{E}). \quad (2.4)$$

В этом выражении $W=(W_{ij})$, $W_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ — тензор завихренности, $a$ — некоторое число. Кроме того, $\Psi$ и $\beta$ в (2.1) и (2.4) суть известные нелинейные матрицы-функции, вообще говоря, произвольные. Однако из принципа объективности поведения материала следует (см. [5] и [6], § 1 главы VI), что без ограничения общности модели эти функции всегда могут быть представлены в виде

$$\Psi(\mathcal{E})=\varphi_1\mathcal{E}+\varphi_2\mathcal{E}^2, \quad (2.5)$$

$$\beta(\tau,\mathcal{E})=\alpha_0I+\alpha_1\mathcal{E}+\alpha_2\mathcal{E}^2+\alpha_3\tau+\alpha_4\tau^2+ \\ +\alpha_5(\mathcal{E}\tau+\tau\mathcal{E})+\alpha_6(\mathcal{E}^2\tau+\tau\mathcal{E}^2)+ \\ +\alpha_7(\mathcal{E}\tau^2+\tau^2\mathcal{E})+\alpha_8(\mathcal{E}^2\tau^2+\tau^2\mathcal{E}^2), \quad (2.6)$$

где $\varphi_i$ и $\alpha_j$ суть произвольные скалярные функции следующих аргументов

$$\varphi_i=\varphi_i(\operatorname{Tr}(\mathcal{E}^2),\det\mathcal{E}),\ i=1,2,$$

$$\alpha_j=\alpha_j(\operatorname{Tr}\mathcal{E}^2,\operatorname{Tr}\mathcal{E}^3,\operatorname{Tr}(\tau),\operatorname{Tr}(\tau^2),\operatorname{Tr}(\tau^3),\operatorname{Tr}(\tau\mathcal{E}), \\ \operatorname{Tr}(\tau^2\mathcal{E}),\operatorname{Tr}(\tau\mathcal{E}^2),\operatorname{Tr}(\tau^2\mathcal{E}^2)),\ j=0,\dots,8.$$

Давление $p$ вообще может быть определено с точностью до константы. Для определенности накладывается условие

$$\int_{\Omega}p(x)dx=0. \quad (2.7)$$

где $\Omega$ — фиксированная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.

Начальные условия имеют вид:

$$u(0,x)=a(x),\tau(0,x)=\tau_0(x),\ x\in\mathbb{R}^n. \quad (2.8)$$

Обозначим $\eta_0=\frac{\varphi_1(0,0)}{2}$. Будем предполагать, что $\eta_0>0$. Это естественное условие, поскольку $\eta_0$ по физическому смыслу является характеристикой вязкости.

Ниже мы будем предполагать также, что коэффициенты $\varphi_i$, $\alpha_j$ есть соответственно $C^4$- и $C^3$-гладкие функции своих аргументов, причем

$$\alpha_0(\theta)=\alpha_1(\theta)=\alpha_3(\theta)=0,\ \frac{\partial\alpha_0(\theta)}{\partial Tr(\tau)}=0$$

($\theta$ обозначает точку $(0,0,0,0,0,0,0,0,0)$). Это также естественное предположение в рассматриваемой модели, поскольку в ней функции $\beta$ отвечают за «нелинейные» эффекты, т.е. эффекты не ниже второго порядка. Поэтому коэффициенты $\alpha_1$ и $\alpha_3$ при членах первого порядка $\mathcal{E}$ и $\tau$ должны сами быть «первого порядка», т.е. обращаться в нуль в точке $\theta$, а коэффициент $\alpha_0$ при члене нулевого порядка $I$, должен быть второго порядка, т.е. должен обращаться в $\theta$ в нуль и иметь в $\theta$ нулевую частную производную по своему «линейному» аргументу $\operatorname{Tr}(\tau)$ (по поводу наложенных условий см. также замечания в [1], Subsection 2.2).

Введем следующие обозначения

$$\eta=\frac{\eta_1}{\lambda};$$

$$\Phi_{ij}(\mathcal{E})=\Psi_{ij}(\mathcal{E})-2\eta_0\mathcal{E}_{ij};$$

$$g(\nabla u,\tau)=\tau W-W\tau-a(\mathcal{E}\tau+\tau\mathcal{E})+\frac{\beta(\tau,\mathcal{E}(u))}{\lambda};$$

$$(\tilde{A}(u)v)_j = \sum_{i,k,l=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(\mathcal{E}(u))\frac{\partial \mathcal{E}_{kl}(v)}{\partial x_i}, j = 1,\dots,n;$$
$$A(u)v = -P\tilde{A}(u)v + v - \eta_0 \Delta v;$$
$$F_1(u,v) = -P\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i};$$
$$F(u,\tau) = -\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \tau}{\partial x_i};$$
$$\tilde{F}(u) = F_1(u,u) + u;$$
$$G(u,\tau) = -g(\nabla u, \tau);$$
$$N_1(\tau) = P(\operatorname{Div}\tau);$$
$$N_2(u) = 2\eta\mathcal{E}(u);$$
$$A_0 = A(a);$$
$$f = Pf_0.$$

Рассмотрим задачу

$$\frac{du}{dt} + A(u)u = \tilde{F}(u) + N_1(\tau) + f; \qquad (2.9)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\lambda} = F(u,\tau) + N_2(u) + G(u,\tau); \qquad (2.10)$$

$$u(0) = a, \tau(0) = \tau_0. \qquad (2.11)$$

Следующая теорема является следствием теорем 3.1 и 2.1 из [1].

**Теорема 2.1.** *Пусть* $a \in H_V^3$, $\tau_0 \in H_M^3$, $f \in L_1(0,T;H_V^3) \cap L_2(0,T;H_V^2)$. *Тогда существует такая константа* $K_1 > 0$, *не зависящая от* $T$, *что при*

$$\|a\|_3 + \|\tau_0\|_3 + \|f\|_{L_1(0,T;H^3)} < K_1 \qquad (2.12)$$

задача (2.9)—(2.11) имеет единственное решение в классе

$$u \in L_2(0,T;H_V^4) \cap C([0,T];H_V^3) \cap W_2^1(0,T;H_V^2); \qquad (2.13)$$

$$\tau \in L_\infty(0,T;H_M^3) \cap C([0,T];H_M^2) \cap C^1([0,T];H_M^1), \qquad (2.14)$$

и существует такая функция

$$p \in L_2(0,T;H_{loc}^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})), \qquad (2.15)$$

что тройка $(u,\tau,p)$ является единственным решением задачи (2.1)—(2.8).

## 3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

В этом пункте доказывается непрерывная зависимость решений начальной задачи для уравнений движения нелинейной вязкоупругой среды от данных задачи.

**Теорема 3.1.** *Пусть тройки* $(a_k, \tau_{0k}, f_k)$, $i = 0,1,2,\dots$ *удовлетворяют условиям теоремы 2.1, включая оценку (2.12), а* $(u_k, \tau_k)$ *— соответствующие решения задачи (2.9)—(2.11) (и, следовательно, задачи (2.1)—(2.8)). Пусть при* $k \to \infty$

$$a_k \to a_0 \text{ в } H_V^3,$$
$$\tau_{0k} \to \tau_{00} \text{ в } H_M^3,$$
$$f_k \to f_0 \text{ в } L_1(0,T;H_V^3)$$

*Тогда*

$$u_k \to u_0 \text{ в } C([0,T];H_V^2) \text{ и в } L_p(0,T;H_{V,loc}^3),$$
$$\tau_k \to \tau_0 \text{ в } C([0,T];H_M^2) \text{ и в } C([0,T];H_{M,loc}^{3-\delta})$$

*для всех* $1 \le p < \infty, \delta > 0$.

При доказательстве теоремы нам понадобятся результаты Симона ([7], Следствия 4 и 6) о компактности вложения пространств функций на отрезке $[0,T]$ со значениями в банаховых пространствах. Мы приведем их для удобства читателя.

**Лемма 3.1.** *Пусть* $X \subset Y \subset Z$ *— банаховы пространства, причем вложение* $X \subset Y$ *компактно, а* $Y \subset Z$ *непрерывно. Пусть* $F$ *— множество функций на отрезке* $[0,T]$ *со значениями в* $X$.

a) Если $F$ ограничено в $L_\infty(0,T;X)$, а множество $\left\{\frac{du}{dt}\middle| u \in F\right\}$ ограничено в $L_p(0,T;Z)$, $p > 1$, то $F$ относительно компактно в $C([0,T];Y)$.

b) Если $F$ ограничено в $L_p(0,T;Y)$, $p > 1$ и в $L_{1,loc}(0,T;X)$, а множество $\left\{\frac{du}{dt}\middle| u \in F\right\}$ ограничено в $L_{1,loc}(0,T;Z)$, то $F$ относительно компактно в $L_q(0,T;Y)$ для всякого $q < p$.

*Доказательство теоремы.* Очевидно, найдутся последовательности, удовлетворяющие следующим условиям

$$a_{m,k} \underset{m\to\infty}{\to} a_k \text{ в } H_V^3, a_{m,k} \in H_V^4,$$
$$\tau_{0m,k} \underset{m\to\infty}{\to} \tau_{0k} \text{ в } H_M^3, \tau_{0m,k} \in H_M^4,$$
$$f_{m,k} \underset{m\to\infty}{\to} f_k \text{ в } L_1(0,T;H_V^3),$$
$$f_{m,k} \in L_1(0,T;H_V^3) \cap C^1([0,T];H_V^2)$$

и без ограничения общности все тройки $(a_{m,k}, \tau_{0m,k}, f_{m,k})$ удовлетворяют оценке (2.19).

Введем операторы

$$A_\varepsilon(\tau) = \frac{\tau}{\lambda} - \varepsilon\Delta\tau, \varepsilon > 0. \qquad (3.1)$$

Рассмотрим задачи

$$\frac{du}{dt} + A(u)u = \tilde{F}(u) + N_1(\tau) + f_{m,k}; \qquad (3.2)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + A_{\frac{1}{m}}\tau = F(u,\tau) + N_2(u) + G(u,\tau); \qquad (3.3)$$

$$u(0) = a_{m,k}, \tau(0) = \tau_{0m,k} \qquad (3.4)$$

при каждом натуральном $m$ и всех $k$. По теореме 4.1 [1] при достаточно малом $K_1$ такие задачи имеют единственное решение

$$u_{m,k} \in C^1([0,T];H_V^2) \cap C([0,T];H_V^4),$$

$$\tau_{m,k} \in C^1([0,T];H_M^2) \cap C([0,T];H_M^4).$$

Зафиксируем произвольное $k$. Из результатов [1] (Subsection 5.1), следует, что

1) $u_{m,k} \to u_k$ в $C([0,T];H_V^2)$,

2) $\tau_{m,k} \to \tau_k$ в $C([0,T];H_M^2)$,

3) последовательности $\frac{du_{m,k}}{dt}$, $\frac{d\tau_{m,k}}{dt}$ ограничены (и даже фундаментальны) соответственно в $L_1(0,T;H_V^0)$ и $C([0,T];H_M^1)$,

4) $u_{m,k} \to u_k$ при в $L_\infty(0,T;H_V^3)*$ — слабо при $m \to \infty$,

5) $\{u_{m,k}\}$ есть ограниченная последовательность в $L_2(0,T;H_V^4)$,

6) $\tau_{m,k} \to \tau_k$ в $L_\infty(0,T;H_M^3)*$ — слабо.

Так как соболевское пространство $H^4(B)$ вложено в $H^3(B)$ компактно для любого шара $B$ в $\mathbb{R}^n$, то из леммы 3.1, b) следует, что без ограничения общности $u_{m,k}|_B \to u_k|_B$ в $L_p(0,T;H^3(B,\mathbb{R}^n))$ при $m \to \infty$ сильно для любого $1 \le p < \infty$ и для любого шара $B$.

Далее, так как $H^3(B)$ вложено в $H^{3-\delta}(B)$ компактно для любого $\delta > 0$ и для любого шара $B$, то из леммы 3.1, a) следует, что без ограничения общности $\tau_{m,k}\big|_B \to \tau_k\big|_B$ в $C([0,T];H^{3-\delta}(B,\mathbb{R}_S^{n\times n}))$ сильно.

Зафиксируем произвольный шар $B$ в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\rho(u^1,\tau^1;u^2,\tau^2)$ выражение

$$\left\|u^1 - u^2\right\|_{C([0,T];H_V^2)} + \left\|(u^1 - u^2)\big|_B\right\|_{L_p(0,T;H^3(B))} +$$

$$+\left\|\tau^1 - \tau^2\right\|_{C([0,T];H_M^2)} + \left\|(\tau^1 - \tau^2)\big|_B\right\|_{C([0,T];H^{3-\delta}(B))},$$

а через $\rho(a^1,\tau_0^1,f^1;a^2,\tau_0^2,f^2)$ выражение

$$\left\|a^1 - a^2\right\|_{H_V^3} + \left\|\tau_0^1 - \tau_0^2\right\|_{H_M^3} + \left\|f^1 - f^2\right\|_{L_1(0,T;H_V^3)}$$

для любых $u^1,\tau^1,u^2,\tau^2,a^1,a^2,\tau_0^1,\tau_0^2,f^1,f^2$, для которых эти выражения имеют смысл.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $u_{m,k} \to u_k$ $C([0,T];H_V^2)$ и в $L_p(0,T;H^3(B))$, $\tau_{m,k} \to \tau_k$ в $C([0,T];H_M^2)$ и в $C([0,T];H^{3-\delta}(B))$, то найдется число $L(k)$ такое, что если $m \ge L(k)$, то

$$\rho(u_{m,k},\tau_{m,k};u_k,\tau_k) \le \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3.5)$$

Из условия теоремы следует, что найдется $M(k)$ такое, что если $m \ge M(k)$, то

$$\rho(a_{m,k},\tau_{0m,k},f_{m,k};a_k,\tau_{0k},f_k) \le \frac{1}{k}.$$

Обозначим $P(k) = \max(L(k),M(k))$. Тогда

$$\rho(a_{P(k),k},\tau_{0P(k),k},f_{P(k),k};a_0,\tau_{00},f_0) \le$$
$$\le \rho(a_{P(k),k},\tau_{0P(k),k},f_{P(k),k};a_k,\tau_{0k},f_k) +$$
$$+\rho(a_k,\tau_{0k},f_k;a_0,\tau_{00},f_0) \le$$
$$\le \frac{1}{k} + \rho(a_k,\tau_{0k},f_k;a_0,\tau_{00},f_0) \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Это влечет (в силу [1], Subsection 5.1), что

$$\rho(u_{P(k),k},\tau_{P(k),k};u_0,\tau_0)k \to \infty \to 0.$$

Тогда найдется $N$ такое, что если $k > N$, то

$$\rho(u_{P(k),k},\tau_{P(k),k};u_0,\tau_0) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь из (3.5) и неравенства треугольника получаем

$$\rho(u_k,\tau_k;u_0,\tau_0) \le \varepsilon.$$

Мы доказали, что $\rho(u_k,\tau_k;u_0,\tau_0) \underset{k\to\infty}{\to} 0$, что с учетом произвольности шара $B$ влечет утверждение теоремы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G.* On the solvability of the initial-boundary value problem for the motion equations of nonlinear viscoelastic medium in the whole space // Nonl. Anal. TMA. — 2004. — V. 58. — P. 631—656.

2. *Guillope C., Saut J.C.* Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law// Nonl. Anal. TMA. — 1990. — V. 15, № 9. — P. 849—869.

3. *Guillope C., Saut J.C.* Mathematical problems arising in differential models for viscoelastic fluids // Mathematical Topics in Fluid Mechanics. — Longman, Harlow, 1993. — P. 64—92.

4. *Oldroyd J.G.* On the formation of rheological equations of state// Proc. R. Soc. Lond., 1950, A200, 523—541.

5. *Астарита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. — 309с.

6. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. —592с.

7. *Simon J.* Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ // Ann. Mat. Pura Appl., 1987, v. 146, P. 65—96.