УДК 517.9

О МЕТОДЕ М. Т. НАЙЕРА ПОСТРОЕНИЯ ИНВАРИАНТНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА*

Н. Б. Ускова

Воронежский государственный технический университет

М. Т. Найером изучалась следующая задача. Рассматриваются два линейных ограниченных оператора A_0 и A, действующих в банаховом пространстве и со спектром $\sigma(A_0) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$, P_1 — спектральный проектор, построенный по спектральному множеству σ_1. Необходимо найти такой линейный ограниченный оператор R и определить с его помощью проектор $P = P_1 + RP_1$, чтобы множество $\operatorname{Ran} P$ было инвариантно относительно A. В настоящей работе усиливаются результаты М. Т. Найера по следующим направлениям: 1) вместо ограниченных операторов рассматриваются линейные замкнутые операторы A и A_0, такие что оператор $A - A_0$ допускает расширение до ограниченного оператора; 2) проведено другое доказательство основной теоремы и получены оценки на $\|R\|$ в терминах норм блоков возмущения; 3) в случае, если $\sigma_1 = \{\lambda_1\}$, λ_1 — простое изолированное собственное значение, $A_0 e_1 = \lambda_1 e_1$, выписано выражение собственного значения и соответствующего собственного вектора для A с использованием R; 4) приведено условие на $A - A_0$, при котором предъявлен спектральный проектор для оператора A.

В [1—4] М. Т. Найером рассматривалась следующая проблема. Пусть Y — комплексное банахово пространство и некоторый оператор A принадлежит банаховой алгебре $\operatorname{End} Y$ ограниченных линейных операторов, действующих в Y. Наряду с оператором A также рассматривается некоторый хорошо изученный оператор $A_0 \in \operatorname{End} Y$, спектр которого $\sigma(A_0)$ представим в виде $\sigma(A_0) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$ и $P_1 \in \operatorname{End} Y$ — спектральный проектор, построенный по спектральному множеству σ_1 оператора A_0. Обозначим $Y_1 = \operatorname{Ran} P_1$, $P_2 = I - P_1$, $Y_2 = \operatorname{Ran} P_2$, A_i, $i = 1,2$ — сужение оператора A на подпространство Y_i, $A_i = A|_{Y_i}$. Каждому оператору $Z \in \operatorname{End} Y$ поставим в соответствие матрицу $Z = (Z_{ij})$, составленную из операторов $Z_{ij} = P_i Z P_j$, $i, j = 1,2$. Необходимо найти такой ограниченный линейный оператор $R : Y_1 \to Y_2$, $R = R_{21}$ и определить с его помощью проектор $P = P_1 + RP_1 : Y \to Y$, так чтобы множество $\operatorname{Ran} P$ было инвариантно относительно A. При этом можно показать, что $\operatorname{Ran} P$ инвариантно относительно A тогда и только тогда, когда R есть решение уравнения Рикатти

$$A_2 R - R A_1 = -A_{21} + R A_{12} R. \tag{1}$$

В [4] рассматриваются условия разрешимости уравнения Рикатти (1) и соответствующие итерационные процедуры.

Приведем, в качестве примера, один из результатов статьи [4].

Теорема 1. [4] *Пусть* $\delta = \operatorname{sep}(A_1, A_2) > 0$, $\gamma = \|A_{21}\|$, $n = \|A_{12}\|$, $\varepsilon = \dfrac{n\gamma}{\delta^2}$. *Тогда при выполнении условия* $\varepsilon \in [0, 1/4]$ *уравнение Рикатти (1) имеет единственное решение, причем*

$$\|R\| \le \frac{\gamma}{\delta} g(\varepsilon), \tag{2}$$

где $g(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}, & 0 < t \le 1/4. \end{cases}$

Напомним, что величина $\operatorname{sep}(A_1, A_2)$ определяется следующим образом

$$\operatorname{sep}(A_1, A_2) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \in \sigma(T), \\ \dfrac{1}{\|T^{-1}\|}, & \text{если} \quad 0 \notin \sigma(T), \end{cases}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 04-01-00141.

где $T : \mathrm{End}\, Y_{21} \to \mathrm{End}\, Y_{21}$, $T(B) = A_2B - BA_1$, $B \in \mathrm{End}\, Y_{21}$, $\mathrm{End}\, Y_{21} = \{X \in \mathrm{End}\, Y : P_2XP_1 = X\}$.

Данная заметка посвящена улучшению и конкретизации результатов из [4] по следующим направлениям. Во-первых, отметим, что оператор A является, по сути, возмущением оператора A_0 с известным спектром, известным спектральным проектором и известной величиной $\mathrm{sep}(A_{01}, A_{02})$. Поэтому в используемых М. Т. Найером выкладках и оценках удобнее и информативнее использовать не неизвестную величину $\mathrm{sep}(A_1, A_2)$, а величину $\mathrm{sep}(A_{01}, A_{02})$. Во-вторых, будет приведено другое доказательство разрешимости уравнения (1) и получена оценка на $\|R\|$, типа оценки (2) в терминах норм матричных элементов возмущения $A_0 - A$. В-третьих, оценку на $\|R\|$ можно конкретизировать и улучшать в случаях, если A_0 — самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H = Y$ или A_0 — нормальный оператор. Кроме того, непосредственная проверка показывает, что если (λ_1, e_1) — собственная пара оператора A_0, т.е. $A_0e_1 = \lambda_1 e_1$, $\|e_1\| = 1$, $\sigma_1 = \{\lambda_1\}$, $\dim P_1 = 1$, f_1 – функционал из Y^*, обладающий свойством $f_1(e_1) = (e_1, f_1) = 1$, $Y_2 \subset \mathrm{Ker}\, f_1$, $P_1x = (x, f_1)e_1$, то пара $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{e}_1)$, где $\tilde{e}_1 = (I + R)e_1$, $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 - ((A_0 - A)e_1, f_1) - (A_{12}Re_1, f_1)$ есть собственная пара оператора A. Этим обусловливается важность изучения разрешимости уравнения (1) и оценок оператора R в проблеме собственных значений и собственных векторов. Также очевидно, что P в общем случае не есть спектральный проектор для оператора A, в конце статьи будет указано условие на возмущение и выписан вид соответствующего спектрального проектора. И, наконец, вместо ограниченных операторов A и A_0 можно рассматривать линейные замкнутые операторы $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset Y \to Y$, $A : \mathcal{D}(A_0) \subset Y \to Y$, такие что оператор $A_0 - A$ допускает расширение до оператора из $\mathrm{End}\, Y$.

Пусть $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset Y \to Y$ — линейный замкнутый оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве Y и имеющий область определения $\mathcal{D}(A_0)$, $\sigma(A_0) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$, причем σ_1 — компакт, $P_1 = P(\sigma_1, A)$, $P_2 = I - P_1$. Представим изучаемый оператор $A : \mathcal{D}(A_0) \subset Y \to Y$ в виде $A = A_0 - B$, считая A_0 невозмущенным оператором и $B = A_0 - A$ — оператором-возмущением, причем допускающим ограниченное расширение до оператора из $\mathrm{End}\, Y$. Это расширение обозначим тем же символом B.

При этом очевидно, что $B_{21} = -A_{21}$, $B_{12} = -A_{12}$, $A_1 = A_{01} - B_{11}$, $A_2 = A_{02} - B_{22}$, $B_{11} = A_{01} - A_1$, $B_{22} = A_{02} - A_2$. Следовательно, уравнение Рикатти (1) принимает вид

$$A_{01}R - RA_{02} = B_{22}R - RB_{11} - RB_{12}R + B_{21}. \quad (3)$$

Введем необходимые обозначения и сформулируем и докажем аналог теоремы 1. Обозначим символом $\tilde{b}_{22}$ норму оператора $XT^{-1}B_{22}X : \mathrm{End}\, Y_{21} \to \mathrm{End}\, Y_{21}$, символом $\tilde{b}_{12}$ — норму оператора $XT^{-1}B_{12}X : \mathrm{End}\, Y_{21} \to \mathrm{End}\, Y_{21}$,

$$b_{ij} = \|B_{ij}\|, \quad \gamma = \|T^{-1}\| = \frac{1}{\mathrm{sep}(A_{01}, A_{02})}.$$

Теорема 2. *Пусть операторы $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset Y \to Y$ и $A : \mathcal{D}(A_0) \subset Y \to Y$ такие, что оператор B допускает расширение до ограниченного оператора из $\mathrm{End}\, Y$ и выполнено условие*

$$\tilde{b}_{22} + \gamma b_{11} + 2\sqrt{\gamma b_{21}\tilde{b}_{12}} < 1. \quad (4)$$

Тогда существует такой линейный ограниченный оператор $R = R_{21}$, являющийся решением уравнения (3), что множество $\mathrm{Ran}\, P$, $P = P_1 + RP_1$, $P^2 = P$ инвариантно относительно оператора A. причем решение уравнения (3) может быть найдено по методу простых итераций

$$A_{02}R^{(k+1)} - R^{(k+1)}A_{01} =$$
$$= B_{22}R^{(k)} - R^{(k)}B_{11} - R^{(k)}B_{12}R^{(k)} + B_{21},$$
$$R^{(0)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

При этом имеет место оценка

$$\|R\| \le \frac{2\gamma b_{21}}{1 - (\gamma b_{11} + \tilde{b}_{22}) + ((1 - (\gamma b_{11} + \tilde{b}_{22}))^2 - 4\gamma\tilde{b}_{12}b_{21})^{1/2}} = \phi_1. \quad (5)$$

Замечание. Если

1) $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset H \to H$ — самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H = Y$, то
$$\gamma \le \frac{\pi}{2}(\mathrm{dist}(\sigma_1, \sigma_2))^{-1};$$

2) A_0 — нормальный оператор, то
$$\gamma \le b(\mathrm{dist}(\sigma_1, \sigma_2))^{-1};$$

3) A_0 — нормальный оператор, причем существуют такие числа a и ρ, что $\sigma(A_{01}) \in B(a, \rho)$, $\sigma(A_{02}) \in \mathbb{C} \setminus B(a, \rho + \delta)$, где $\delta > 0$, то

$$\gamma \le (\operatorname{dist}(\sigma_1, \sigma_2))^{-1};$$

Отметим, что наименьшее значение константы b неизвестно (см., например, [5, 6]), известны лишь ее оценки: $b < 5$ [6] или $b < 2,91$ [5].

Доказательство. Перепишем уравнение (3) в виде

$$R = T^{-1}(B_{22}R - RB_{11} - RB_{12}R + B_{21}) \qquad (6)$$

и применим к (6) принцип сжимающих отображений [7, 8]. Найдем сначала такой шар $B(0, r\gamma b_{21})$ с центром в нуле и радиусом $r\|T^{-1}B_{21}\| \le r\gamma b_{21}$, чтобы отображение, определяемое правой частью уравнения (6) переводило его в себя. Таким образом, для $X \in B(0, r\gamma b_{21})$ должно выполняться условие $T^{-1}(B_{12}X - XB_{11} - XB_{12}X + B_{21}) \in B(0, r\gamma b_{21})$, или

$$\tilde{b}_{22} r\gamma b_{21} + \gamma b_{11} r\gamma b_{21} + \tilde{b}_{21} r^2\gamma^2 b_{21}^2 + \gamma b_{21} \le r\gamma b_{21}.$$

Тогда имеем следующее квадратное неравенство относительно r:

$$r^2\tilde{b}_{21}\gamma b_{21} + r(\tilde{b}_{22} + \gamma b_{11} - 1) + 1 \le 0. \qquad (7)$$

Условие (4) и есть условие разрешимости неравенства (7). Оценка же (5) немедленно следует из неравенства $\|R\| \le r\gamma b_{21}$. Легко проверить сжимаемость рассматриваемого отображения в указанном шаре с константой сжатия $q = 1 - \sqrt{(\tilde{b}_{22} + \gamma b_{11} - 1)^2 - 4\tilde{b}_{21}\gamma b_{21}}$. Отметим также, что для решения R уравнения (6) имеет место оценка

$$\left\|R^{(k)} - R\right\| \le \frac{q^k}{1-q}\left\|T^{-1}B_{21}\right\|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $R^{(k)}$ — k-тое приближение к решению R уравнения (6).

Следствие. *Пусть операторы* $A : \mathcal{D}(A_0) \subset \subset Y \to Y$ *и* $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset Y \to Y$ *удовлетворяют условию теоремы 2. Пусть* (λ_1, e_1) *— собственная пара оператора* A_0, *причем* λ_1 *— простое изолированное собственное значение,* $P_1 = P(\{\lambda_1\}, A_0)$, $f_1 \in Y^*$, $f_1(e_1) = (e_1, f_1) = 1$, $Y_2 = \operatorname{Im}(I - P_1) \subset \operatorname{Ker} f_1$, $P_1x = (x, f_1)e_1$, $x \in Y$. *Тогда собственное значение* $\tilde{\lambda}_1$ *и собственный вектор* $\tilde{e}_1$ *оператора* A *находятся по формулам*

$$\tilde{e}_1 = (I + R)e_1,$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 - ((A_0 - A)e_1, f_1) - (B_{12}Re_1, f_1).$$

При этом соответствующие приближения к $\tilde{e}_1$ *и* $\tilde{\lambda}_1$ *считаются по формулам*

$$\tilde{e}_1^{(k)} = (I + R^{(k)})e_1,$$

$$\tilde{\lambda}_1^{(k)} = \lambda_1 - ((A_0 - A)e_1, f_1) - (B_{12}R^{(k)}e_1, f_1),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $R^{(k)}$ *—* k*-тое приближение к решению уравнения (6) по методу простых итераций,* $R^{(0)} = 0$, *причем* $\|\tilde{e}_1 - e_1\| \le \phi_1$

$$\left|\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1 + ((A_0 - A)e_1, f_1)\right| \le b_{12}\phi_1.$$

Перейдем теперь к проблеме нахождения спектрального проектора оператора A.

Определение 1. *Два оператора* $A_1 : \mathcal{D}(A_i) \subset Y \to Y$ *называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор* $U \in \operatorname{End} Y$, *такой что* $U\mathcal{D}(A_2) = \mathcal{D}(A_1)$ *и* $A_1Ux = UA_2x \quad \forall x \in \mathcal{D}(A_2)$. *Оператор* U *называется оператором преобразования оператора* A_1 *в оператор* A_2.

Из подобия операторов следует, что спектральные проекторы P_1 оператора A_1 и $\tilde{P}_1$ оператора A_2 связаны равенством $\tilde{P}_1 = UP_1U^{-1}$. Поэтому для выражения спектрального проектора $\tilde{P}_1$ оператора $A = A_0 - (A_0 - A) = A_0 - B$ через спектральный проектор P_1 оператора A_0 необходимо знать оператор преобразования U оператора A в оператор $A_0 - \tilde{X}$, причем оператор $\tilde{X}$ должен быть таким, чтобы для оператора $A_0 - \tilde{X}$ проектор P_1 также оставался спектральным проектором. Методом построения оператора преобразования U будет метод подобных операторов [9—11].

Определение 2. *Пусть* M *— линейное многообразие операторов из* $\operatorname{End} Y$, $J : M \to M$, $\Gamma : M \to M$ *— линейные операторы. Тройку* (M, J, Γ) *назовем допустимой тройкой для оператора* A_0, *а* M *— допустимым пространством возмущений, если*

1) M *— банахово пространство со своей нормой, непрерывно вложенное в* $\operatorname{End} Y$, *т.е.* $\|X\| \ge \operatorname{const}\|X\|_\infty$ *(здесь* $\|X\|$ *— норма оператора* X *как элемента пространства* M, $\|X\|_\infty$ *— норма оператора* X *как элемента пространства* $\operatorname{End} Y$ *);*

2) J *и* Γ *— непрерывные операторы, причем* J *— проектор;*

3) $(\Gamma X)\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_0)$ *и* $A_0\Gamma X - \Gamma XA_0 = X - JX \quad \forall X \in M$;

4) $X(\Gamma Z)$, $(\Gamma Z)Y \in M$, $\forall X, Z \in M$ *и существует такая постоянная* $\gamma > 0$, *что* $\|\Gamma\| \le \gamma$, $\max\{\|X(\Gamma Z)\|, \|(\Gamma X)Z\|\} \le \gamma\|X\| \cdot \|Z\| \quad \forall X, Z \in M$.

Зафиксируем некоторую допустимую для оператора A_0 тройку (M, J, Γ) и возмутим оператор A_0 некоторым оператором $B \in M$. Будем искать оператор преобразования U оператора $A_0 - B$ в оператор $A_0 - JX$ в виде $U = I + \Gamma X$, где X − подлежащий определению оператор из M. Тогда из равенства

$$(A_0 - B)(I + \Gamma X) = (I + \Gamma X)(A_0 - JX),$$

с учетом п. 3 определения 1 (подробности см. в [9—11]) следует, что операторы $A_0 - B$ и $A_0 - JX$ подобны, если X есть решение рассматриваемого в M нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - \Gamma XJB - \Gamma XJ(B\Gamma X) + B. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие*

$$\varepsilon = 4\gamma \|J\| \cdot \|B\| < 1. \tag{9}$$

Тогда оператор $A_0 - B$ подобен оператору $A - JX$, где X есть решение нелинейного операторного уравнения (8), причем

$$\|X\| \le 2\|B\|(1 - 2\varepsilon + (1 - 4\varepsilon)^{1/2})^{-1} = f_0(\varepsilon),$$

$$\|X - B\| \le \varepsilon\|B\|(4 + 2\varepsilon)(1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon + (1 - 4\varepsilon)^{1/2})^{-1},$$

и его можно найти методом простых итераций, отправляясь от $X^{(0)} = 0$.

Введем используемую далее допустимую тройку для оператора A_0. Пусть $M = \mathrm{End}\, Y$, $JX = P_1XP_1 + P_2XP_2$, $X \in M$. Разложим пространство M в прямую сумму подпространств $M = M_{11} \oplus M_{12} \oplus M_{21} \oplus M_{22}$, где $M_{ij} = \{X \in M, P_iXP_j = X\}$. Будем определять оператор Γ на операторных блоках X_{ij}, $i, j = 1, 2$ оператора X следующим образом. Положим $\Gamma X_{11} = \Gamma X_{22} = 0$ и из п. 3 определения 1 получаем систему уравнений для нахождения X_{12} и X_{21} :

$$\begin{cases} A_{01}\Gamma X_{12} - \Gamma X_{12}A_{02} = X_{12} \\ A_{02}\Gamma X_{21} - \Gamma X_{21}A_{01} = X_{21}. \end{cases} \tag{10}$$

В [9, с. 108] доказано, что уравнения (10) разрешимы и представлен явный вид операторов ΓX_{12} и ΓX_{21}.

Теорема 4. *Пусть операторы $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset Y \to Y$ и $A : \mathcal{D}(A_0) \subset Y \to Y$ такие что оператор $B = A_0 - A$ допускает расширения до оператора из $\mathrm{End}\, Y$ и*

$$4\|A_0 - A\|\|J\|\gamma < 1. \tag{11}$$

Тогда для спектрального проектора $\tilde{P}_1$ оператора A справедливо равенство

$$\tilde{P}_1 = (I + \Gamma X)P_1(I + \Gamma X)^{-1}, \tag{12}$$

где X — решение уравнения (8), причем имеет место оценка

$$\left\|\tilde{P}_1 - P\right\|_1 \le 2\gamma\|P_1\|\frac{f_0(\varepsilon)}{1 - \gamma f_0(\varepsilon)}, \tag{13}$$

где величина $f_0(\varepsilon)$ введена в теореме 3.

Доказательство. Из (12) следует, что

$$\tilde{P}_1 = P_1 + \Gamma XP_1(I + \Gamma X)^{-1} + P_1((I + \Gamma X)^{-1} - I),$$

следовательно

$$\left\|\tilde{P}_1 - P_1\right\| \le 2\gamma\|X\|\frac{\|P_1\|}{1 - \gamma\|X\|} \le 2\gamma\frac{\|P_1\| f_0(\varepsilon)}{1 - \gamma f_0(\varepsilon)}.$$

Замечание. Уравнения (3) и (8) связаны следующим образом. Применим к (8) справа проектор P_2, а слева проектор P_1 и получим следующее уравнение относительно X_{21} :

$$\begin{aligned} X_{21} = B_{22}\Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21})B_{11} - \\ -(\Gamma X_{21})B_{12}\Gamma X_{21} + B_{21}. \end{aligned} \tag{14}$$

При этом если вместо X_{21} подставить в (14) его выражение из (10), то мы получим в точности уравнение (3). Однако условие (4) теоремы 2, гарантирующее разрешимость уравнения (3) слабее условия (11) теоремы 4 и оно, вообще говоря, не гарантирует подобие операторов $A_0 - B$ и $A_0 - JX$. Условия же теоремы 1, предложенное М. Т. Найером, жестче условия (4) теоремы 2 и оно получено в явном виде, в условиях подобия операторов $A_0 - B$ и $A_0 - JX$.

Для иллюстрации доказанных теорем рассмотрим следующий модельный пример.

Пусть $Y = L_2[0, 2\pi]$. Рассмотрим оператор

$$A_0 - B, \quad \text{где} \quad A_0 = -\frac{d^2}{dt^2}, \quad (B_n)(t) = q(t)u(t),$$

$q(t) \in L_\infty[0, 2\pi]$ с областью определения $\mathcal{D}(A_0)$, задаваемой граничными условиями: $u(0) = u(2\pi)$, $u'(0) = u'(2\pi)$. Тогда собственное число $\lambda_0 = 0$ самосопряженного оператора A_0 является простым, остальные собственные числа $\lambda_n = n^2$, $n \ge 1$ — двукратны, а соответствующие собственные функции имеют вид

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots. \text{ Пусть } \sigma_1 = \{n^2\},$$

$\sigma_2 = \sigma(A_0) \setminus \{n^2\}$, $P_1x = (x, e_{-n})e_{-n} + (x, e_n)e_n$. Посчитаем величины, используемые в оценках теоремы 2. Так как A_0 — самосопряженный оператор, то $\gamma \le \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\mathrm{dist}(\sigma_1, \sigma_2)} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{2n - 1}$.

Далее, без ограничения общности, можно считать, что функция q такая, что $\int_0^{2\pi} q(t)\,dt = 0 = q_0$. Оператор B_{11} на векторах $x \in \mathcal{D}(A_0)$ действует следующим образом:

$$B_{11}x = P_1BP_1x = (x, e_{-n})[(Be_{-n}, e_n)e_{-n} + (Be_{-n}, e_n)e_n] +$$
$$+(x, e_n))[(Be_n, e_n)e_n + (Be_n, e_{-n})e_{-n}] =$$
$$= \hat{q}(-2n)(x, e_{-n}) + \hat{q}(2n)(x, e_n),$$

где символом $\hat{q}(k)$ обозначен k-ый коэффициент Фурье разложения функции q в ряд по собственным функциям невозмущенного оператора A_0. Поэтому $b_{11} = \|B_{11}\| = \max\{|\hat{q}(-2n)|, |\hat{q}(2n)|\}$, кроме того $b_{21} = \|B_{21}\| \le \|q\|_2$, $\tilde{b}_{22} \le \gamma b_{22} \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{2n-1}\|q\|_2$. Величину $\tilde{b}_{12}$ также можно оценить неравенством $\tilde{b}_{12} \le \gamma b_{12}$, но можно получить другую оценку для нее, используя матрицы операторов в базисе из собственных векторов оператора A_0. Непосредственной проверкой легко убедиться, что матрица оператора $T(B)$ имеет вид

$$T(B) = (t_{ij}) = \begin{cases} (\lambda_i - \lambda_j)b_{ij}, & \text{при } \ |i| \ne |j|, \\ 0, & \text{при } \ |i| = |j|. \end{cases}$$

Следовательно,

$$T^{-1}(B) = \begin{cases} \dfrac{b_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, & |i| \ne |j|, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь произвольные $x \in Y$ и $X \in \operatorname{End} Y$, удовлетворяющие условиям $\|x\|_2 \le 1$, $\|X\| \le 1$, тогда для оценки нормы оператора $X \to T^{-1}(B_{12}X)$ надо оценить норму $\|T^{-1}B_{12}Xx\|_2 \le \|T^{-1}B_{12}\|$, причем матрица оператора $T^{-1}B_{12} = T^{-1}P_1BP_2$ имеет вид

$$(T^{-1}B_{12})_{il} = \begin{cases} \dfrac{\hat{q}(n-l)}{\lambda_n - \lambda_l}, & \text{при } |n| \ne |l|, \ i = n, \\ \dfrac{\hat{q}(n+l)}{\lambda_n - \lambda_l}, & \text{при } |n| \ne l, \ i = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

поэтому $\tilde{b}_{12} \le \sqrt{\sum_{|n|\ne|l|} \frac{|\hat{q}(n-l)|^2 + |\hat{q}(n+l)|^2}{(\lambda_n - \lambda_l)^2}}$.

Следовательно, условие (4) переписывается в виде

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n-1}(\|q\|_2 + \max\{|\hat{q}(-2n)|, |\hat{q}(2n)|\}) +$$
$$+2\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n-1}\|q\|_2 \sqrt{\sum_{|n|\ne|l|} \frac{|\hat{q}(n-l)|^2 + |\hat{q}(n+l)|^2}{(n^2 - l^2)^2}}} < 1,$$

так как все величины, входящие в оценку (5) известны, то ее тоже легко выписать.

Для рассматриваемого оператора $A_0 - B$ условие (11) применимости теоремы 4 имеет вид

$$\frac{2\pi\|q\|_2}{2n-1} < 1,$$

функция f_0 имеет вид

$$f_0(a) = 2\|q\|_2 \left(1 - \frac{\pi\|q\|_2}{2n-1} + \left(1 - \frac{2\pi\|q\|_2}{2n-1}\right)^{1/2}\right),$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2(2n-1)}, \quad P_1x = (x, e_{-n})e_{-n} + (x, e_n)e_n, \quad \|P_1\| \le 1,$$

и оценка (13) принимает вид

$$\|\tilde{P}_1 - P\|_1 \le \frac{2\pi}{2n-1}\frac{f_0(\varepsilon)}{1 - \dfrac{\pi f_0(\varepsilon)}{2(2n-1)}}.$$

Явно выписать условие теоремы 1 и получаемую там оценку не представляется возможным. Так как величина $\operatorname{sep}(A_1, A_2)$ неизвестна, хотя оценки для величин $\|A_{21}\|$ и $\|A_{12}\|$ получены выше и равны соответственно b_{21} и b_{12}.

Отметим, что полученные оценки могут быть положены в основу обоснования сходимости проекционных методов в проблеме собственных значений и собственных векторов для вполне непрерывных операторов с выводом приводимых в [12] оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nair M.T.* Approximation of spectral sets and spectral subspaces in Banach spaces / J. Indian Math. Soc. 1989, № 54, P. 1—14.

2. *Nair M.T.* On iterative refinements for spectral sets and spectral subspaces / Numer. Funct. Anal. Optim. 1989, № 10, P. 1019—1037.

3. *Nair M.T.* Computable error estimates for Newton's iterations for refining invariant subspaces / Indian J. pure and Appl. Math. 1990, № 21, P. 1049—1054.

4. *Nair M.T.* An iterative procedure for solving the Riccati equation $A_2R - RA_1 = A_3 + RA_4R$ / Studia Math. 2001, 147 (1), P. 15—26.

5. *Bhatia R., Rosenthal P.* How and why to solve the operator equation $AX - XB = Y$ // Bull. London Math. Soc. 1997, 29. P. 1—21.

6. *Баскаков А.Г.* Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. матем. журн. — 1983. — Т. 24, № 1. — С. 21—39.

7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

8. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.

9. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Учебное пособие / Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1987. — 165 с.

10. *Баскаков А.Г.* Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / Изв. акад. наук СССР. Сер. матем. Т. 50, № 3. — 1986. С. 435—457.

11. *Ускова Н.Б.* К теории возмущений в квантовой механике / Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика. № 2, 2002. С. 111—115.

12. *Красносельский М.А. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.