ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика. Математика, 2005, № 1

УДК 517.958

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА—ПЕТВИАШВИЛИ

М. В. Придущенко

Воронежский государственный технический университет

В статье строится в явном виде фундаментальное решение Коши для линеаризованного уравнения Кадомцева—Петвиашвили и исследуются некоторые его свойства, в том числе и асимптотики. Строится также решение задачи Коши для этого уравнения.

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной статьи является доказательство корректной разрешимости и построение самого решения задачи Коши для линеаризованного уравнения Кадомцева—Петвиашвили:

$$L_{\pm}u \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} - \frac{\partial^4}{\partial x^4} \pm \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u = f. \tag{1}$$

Уравнение Кадомцева—Петвиашвили (1) было выведено в 1970 году для описания волновых процессов в двухмерных диспергирующих средах (см. [1]). Следует отметить, что пространственный аналог уравнения (1) был изучен в работе [2], однако непосредственно для самого (двухмерного) уравнения (1) до настоящего момента были неизвестны на только фундаментальное решение, но и даже его асимптотики. Этот пробел восполняет данная статья.

1. ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КОШИ

Пусть R^2 есть евклидово пространство векторов $\vec{r} = (x, y)$ (или $\vec{\rho} = (\xi, \eta)$). Через $S'(R^2)$ будем обозначать, как обычно, пространство Шварца распределений умеренного роста с линейной формой $\langle \cdot ; \cdot \rangle_2$.

Определение. Фундаментальным решением Коши для уравнения (1) будем называть распределение $E^{\pm}(t, \cdot) \in S'(R^2)$, зависящее от $t > 0$ как от параметра, удовлетворяющее уравнению:

$$L_{\pm}E^{\pm}(t, \vec{r}) = 0,\ \ t > 0,\ \ \vec{r} \in R^2, \tag{2}$$

где производные по пространственным переменным $\vec{r} \in R^2$ понимаются в смысле теории распределений, а производная по переменной t — как производная по параметру, и начальному условию:

$$\left.\frac{\partial E}{\partial x}\right|_{t=+0} = \delta(\vec{r}),\ \ \vec{r} \in R^2, \tag{3}$$

где $\delta(\cdot) \in S'(R^2)$ есть δ — функция Дирака.

Теорема 1. Фундаментальное решение Коши уравнения (1) может быть представлено в следующем виде:

$$E^{+}(t, \vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{1/2}\cdot 3^{1/2}\cdot t^{2/3}} \times \\ \times G^{31}_{35}\left(\dfrac{w_+^3}{27t}\left|\begin{matrix} \frac{5}{6}; \frac{5}{24}; \frac{17}{24} \\ 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{17}{24}; \frac{5}{24}\end{matrix}\right.\right), & z_+ \ge 0; \\ \dfrac{1}{2^{3/2}\cdot 3^{1/2}\cdot \pi \cdot t^{2/3}} \times \\ \times G^{31}_{24}\left(\dfrac{w_+^3}{27t}\left|\begin{matrix} \frac{5}{6}\ \frac{3}{4} \\ 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{11}{12}\end{matrix}\right.\right), & z_+ \le 0; \end{cases} \tag{4}$$

$$E^{-}(t, \vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{1/2}\cdot 3^{1/2}\cdot t^{2/3}} \times \\ \times G^{31}_{35}\left(\dfrac{w_-^3}{27t}\left|\begin{matrix} \frac{5}{6}; \frac{1}{12}; \frac{7}{12} \\ 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{12}; \frac{1}{12}\end{matrix}\right.\right), & z_- \ge 0; \\ \dfrac{1}{2^{1/2}\cdot 3^{1/2}\cdot \pi \cdot t^{2/3}} \times \\ \times G^{30}_{13}\left(\dfrac{w_-^3}{27t}\left|\begin{matrix} \frac{5}{6} \\ 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\end{matrix}\right.\right), & z_+ \le 0; \end{cases} \tag{5}$$

где

$$z_{\pm} = x \pm \frac{y^2}{4t}; \; w_{\pm} = |z_{\pm}|, \qquad (6)$$

а $G_{pq}^{mn}\left(z\left|\begin{matrix}\alpha_1;\ldots;\alpha_p\\ \beta_1;\ldots;\beta_q\end{matrix}\right.\right)$ — G-функция Майера, представимая в виде (см. [3]):

$$G_{pq}^{mn}\left(z|\begin{matrix}\alpha_1;\ldots;\alpha_p\\ \beta_1;\ldots;\beta_q\end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\beta_j + s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-\alpha_j - s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-\beta_j - s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(\alpha_j + s)} z^{-s} ds. \qquad (7)$$

Доказательство. Применим к (2), (3) преобразование Фурье по переменным $\vec{r} \in R^2$. Получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases}\left[(i\xi)\frac{\partial}{\partial t} - (i\xi)^4 - (\pm\eta^2)\right]\hat{E}^{\pm}(t,\vec{\rho}) = 0,\\ t>0, \vec{\rho}\in R^2,\\ (i\xi)\hat{E}^{\pm}\Big|_{t=+0} = 1.\end{cases} \qquad (8)$$

Решая задачу Коши (8), находим:

$$\hat{E}^{\pm}(t,\vec{\rho}) = \frac{1}{i\xi}\exp\left(-i\xi^3 t \pm \frac{\eta^2 t}{i\xi}\right). \qquad (9)$$

Применяя к (9) обратное преобразование Фурье по переменным $\vec{\rho} \in R^2$, получаем, что:

$$E^{\pm}(t,\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{R^2}\left[\frac{1}{i\xi}\exp\left(-i\xi^3 t \pm \frac{\eta^2 t}{i\xi}\right)\times \right.$$

$$\left.\times \exp(ix\xi + iy\eta)\right] d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\xi}\exp(-i\xi^3 t)\exp(ix\xi) I_1(t,y,\xi) d\xi, \qquad (10)$$

где

$$I_1(t,y,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\pm\frac{\eta^2 t}{i\xi}\right)\exp(iy\eta) d\eta. \qquad (11)$$

Интеграл (11) может быть вычислен в явном виде (см., напр., [4]). Он равен:

$$I_1(t,y,\xi) = (2t)^{-1/2}\xi^{1/2}\exp\left[\pm\left(i\xi\frac{y^2}{4t} - i\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Тогда (10) примет вид:

$$E^{\pm}(t,\vec{r}) = \frac{1}{2^{3/2}\pi t^{1/2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(i\xi)^{1/2}}{i\xi}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(\mp i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4}\right)\exp(i\xi z_{\pm} - i\xi^3 t)\right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2^{1/2}\pi t^{1/2}}\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\left[\frac{(i\xi)^{1/2}}{i\xi}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(\mp i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4}\right)\exp(i\xi z_{\pm} - i\xi^3 t)\right] d\xi. \qquad (12)$$

Вычислим интеграл (12) для E^{+} при $z_{+} > 0$ (в случае E^{+} при $z_{+} < 0$ и E^{-} при $z_{-}0$ интеграл вычисляется аналогичным образом).

Для вычисления интеграла (12) воспользуемся свойством преобразования Меллина $M(\cdot)$ (см. [4]):

$$M\left(\int_0^{+\infty} f_1(x\xi) f_2(\xi)\frac{d\xi}{\xi}\right)(s) =$$

$$= M\left(f_1(x)\right)(s)\cdot M\left(f_2(x)\right)(-s). \qquad (13)$$

Обозначим:

$$f_1(\xi) = \exp(i\xi w_{+})\cdot(i\xi)^{1/2},$$

$$f_2(\xi) = \exp(-i\xi^3 t),$$

где w_{+} определено формулой (6). Преобразования Меллина функций $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ вычисляются в явном виде (см. [4]). Они равны:

$$M(f_1(\xi))(s) = \exp\left(i\pi\frac{s+1}{2}\right) w_{+}^{-s-1/2}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right), \qquad (14)$$

$$M(f_2(\xi))(s) = \frac{1}{3}\exp\left(-i\pi\frac{s}{6}\right) t^{-s/3}\Gamma\left(\frac{s}{3}\right). \qquad (15)$$

Таким образом, формула (12) с учетом (13)—(15) перепишется следующим образом:

$$E^{+}(t,\vec{r}) = \frac{1}{2^{1/2} 3\pi t^{1/2}}\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\left\{\exp\left[i\pi\left(\frac{2s}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{3}\right) w_{+}^{-s-1/2} t^{s/3}\right\} ds. \qquad (16)$$

Используя известное равенство (см., напр., [5]):

$$\cos(\pi x) = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right)},$$

перепишем (16) в виде:

$$E^{+}(t,\vec{r}) = \frac{1}{2^{1/2}t^{1/2}3}\,\frac{1}{2\pi i}\times$$
$$\times\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2s}{3}-\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{2s}{3}+\frac{1}{4}\right)}\,w_{+}^{-s-1/2}t^{s/3}ds. \tag{17}$$

Применяя формулы Гаусса—Лежандра (см., напр., [5]):

$$\Gamma(2s) = (2\pi)^{-1/2}2^{s-1/2}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma(3s) = (2\pi)^{-1}3^{s-1/2}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(s+\frac{2}{3}\right),$$

получаем:

$$E^{+}(t,\vec{r}) = \frac{1}{2^{1/2}3t^{1/2}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\times$$
$$\times\int_{-i\infty}^{+i\infty}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{s}{3}+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{s}{3}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{3}-\frac{3}{8}\right)\Gamma\left(\frac{s}{3}+\frac{1}{8}\right)}\times\right.$$
$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{s}{3}+\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{3}\right)}{\Gamma\left(-\frac{s}{3}+\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{3}+\frac{5}{8}\right)}\times$$
$$\left.\times 3^{s}w_{+}^{-s-1/2}t^{s/3}\right]ds. \tag{18}$$

Производя в (18) замену $u = \frac{s}{3}+\frac{1}{6}$, с учетом (7) получаем:

$$E^{+}(t,\vec{r}) = \frac{1}{2^{1/2}\cdot 3^{1/2}\cdot t^{2/3}}\times$$
$$\times G_{35}^{31}\left(\frac{w_{+}^{3}}{27t}\middle|\begin{matrix}\frac{5}{6};\frac{5}{24};\frac{17}{24}\\ 0;\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{17}{24};\frac{5}{24}\end{matrix}\right).$$

Теорема доказана.

2. СВОЙСТВА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КОШИ

Пользуясь свойствами G-функций Майера (см. [3]), на основании формул (4), (5) получим асимптотики фундаментального решения Коши:

$$E^{+}(t,\vec{r}) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}t^{\frac{2}{3}}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\omega_{+}^{\frac{1}{12}}\cos\left(2\omega_{+}^{\frac{1}{2}}+\dfrac{\pi}{6}\right)\times\right. \\ \times\left\{1+O\left(\omega_{+}^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}+\Gamma\begin{bmatrix}\frac{1}{6};\frac{1}{2};\frac{5}{6}\\ \frac{-7}{24};\frac{5}{24};\frac{3}{8};\frac{7}{8}\end{bmatrix}\times \\ \left.\times\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{6}\right)_k\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{5}{6}\right)_k\left(\frac{31}{24}\right)_k\left(\frac{17}{24}\right)_k}{\left(\frac{3}{8}\right)_k\left(\frac{7}{8}\right)_k k!}\cdot\frac{(-1)^k}{\omega_{+}^{k+\frac{1}{6}}}\right], \\ \qquad z_{+}\to+\infty; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}3^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}t^{\frac{2}{3}}}\cdot\omega_{+}^{-\frac{1}{2}}\cos\left(2\omega_{+}^{\frac{1}{2}}\right)\left\{1+O\left(\omega_{+}^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}, \\ \qquad z_{+}\to-\infty; \end{cases} \tag{19}$$

$$E^{-}(t,\vec{r}) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}t^{\frac{2}{3}}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\omega_{-}^{-\frac{1}{2}}\cos\left(2^{\frac{1}{2}}\omega_{-}^{\frac{1}{2}}-\dfrac{\pi}{6}\right)\times\right. \\ \times\left\{1+O\left(\omega_{-}^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}+\Gamma\begin{bmatrix}\frac{1}{6};\frac{1}{2};\frac{5}{6}\\ \frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{3}{4}\end{bmatrix}\times \\ \left.\times\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{6}\right)_k\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{5}{6}\right)_k}{k!}\cdot\frac{(-1)^k}{\omega_{-}^{k+\frac{1}{6}}}\right], \quad z_{-}\to+\infty; \\ \dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}t^{\frac{2}{3}}}\cdot\omega_{-}^{\frac{1}{12}}\exp\left(-2^{\frac{3}{2}}\omega_{-}^{\frac{1}{4}}\right)\times \\ \times\cos\left(2^{\frac{3}{2}}\omega_{-}^{\frac{1}{4}}+\dfrac{\pi}{4}\right)\left\{1+O\left(\omega_{-}^{-\frac{1}{4}}\right)\right\}, z_{-}\to-\infty; \end{cases} \tag{20}$$

где $\omega_{\pm} = \frac{(w_{\pm})^3}{27t}$,

$$\Gamma\begin{bmatrix}\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\\ \beta_1;\beta_2;\beta_3;\beta_4\end{bmatrix} = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\beta_3)\Gamma(\beta_4)},$$

а $(a)_k$ — символ Похгаммера (см., напр., [5]):

$$(a)_k = a\cdot(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+k-1).$$

Из асимптотических разложений (19), (20) следует, в частности, что:

$$\frac{\partial E^{\pm}}{\partial x}(t,\vec{r}) = o(1),\ \ \vec{r}\to\infty. \tag{21}$$

Кроме того, непосредственной проверкой можно установить, что:

$$E^{\pm}\Big|_{t=+0} = \mp\theta(\mp x)\otimes\delta(y),\ (x,y)\in R^2, \qquad (22)$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда, и

$$L_{\pm}E^{\pm} = \delta(t)\otimes\delta(\vec{r}),\ t\in R,\ \vec{r}\in R^2. \qquad (23)$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения (1):

$$L_{\pm}u = f(t,\vec{r}),\ t > -,\ \vec{r}\in R^2, \qquad (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=+0} = h(\vec{r}),\ \vec{r}\in R^2, \qquad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = o(1),\ \vec{r}\to\infty, \qquad (26)$$

где $f(t,\cdot)$, $h(\cdot)\in S'(R^2)$, причем:

$$f(t,\vec{r}),\ h(\vec{r}) = O(|\vec{r}|^{-\infty}),\ \vec{r}\to\infty. \qquad (27)$$

Теорема 2. *Задача Коши (24)—(26) корректно разрешима в классе $S'(R^2)$, а ее решение $u(t,\cdot)\in S'(R^2)$ единственно с точностью до распределения $1(x)\otimes v(t,y)$ и может быть представлено в следующем виде:*

$$u = h * E^{\pm} + \int_0^t E(t-\tau,\vec{r}) * f(\tau,\vec{r})d\tau, \qquad (28)$$

где символ «∗» означает свертку по пространственным координатам $\vec{r}\in R^2$.

Доказательство. Единственность решения задачи (24)—(26) доказывается точно так же, как и для пространственного случая уравнения Кадомцева—Петвиашвили (см., напр., [2]). Справедливость равенств (24)—(26) устанавливается непосредственной проверкой на основании (21)—(23), (28) с учетом ограничений (27). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Докл. АН СССР. 1970. — Т. 192, № 4. — С. 734—756.

2. *Засорин Ю. В., Придущенко М. В.* Точные решения пространственного уравнения Кадомцева—Петвиашвили // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — 2002, № 2. — С. 63—64.

3. *Маричев О. И.* Метод взятия интегралов от специальных функций. — М.: Наука и техника, 1978. — 310 с.

4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. — М.: Наука, 1969. — 344 с.

5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1973. — 296 с.