ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика. Математика, 2005, № 1

УДК 517.9

О СВОЙСТВАХ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА РИМАНОВЫХ МЕТРИК

И. П. Половинкин

Воронежский государственный университет

В работе рассмотрено семейство римановых метрик вида

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} x_n^{\mu} dx_i^2.$$

Получены некоторые свойства этих метрик. Система уравнений геодезических получена в виде системы первого порядка. Установлено, что нетривиальная группа изометрий существует только в случае евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского ($\mu = 0$ и $\mu = -2$ соответственно).

Пусть $R_+^{\,n} = \{(x', x_n) \in R^n : x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}),\ x_n > 0\}$, $n > 2$. Множество R_+^n, снабженное римановой метрикой

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} x_n^{\mu} dx_i^2, \ \mu \in R, \tag{1}$$

будем рассматривать как риманово пространство, которое мы обозначим через V_n.

Интерес к пространству V_n вызван следующим обстоятельством. Если положить

$$\mu = 2\gamma/(n-2), \tag{2}$$

то соответствующий метрике (1) оператор Лапласа—Бельтрами Δ_{ω} (см., напр., [2]) в координатах $(x_1, \ldots, x_n)$ будет определен формулой

$$\Delta_{\omega} u = x_n^{2\gamma/(2-n)} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma}{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \tag{3}$$

то есть с точностью до множителя совпадает с В-эллиптическим оператором

$$\Delta_{B_{\gamma}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{4}$$

Операторы вида (4) изучались И. А. Киприяновым и его учениками (см. [1] и библиографический обзор там же).

Непосредственным вычислением устанавливаются следующие факты.

Предложение 1. Символы Кристоффеля первого рода, соответствующие метрике (1), имеют вид

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{\mu x_n^{\mu-1}}{2} (\delta_{ik}\delta_{jn} + \delta_{jk}\delta_{in} - \delta_{ij}\delta_{kn}). \tag{5}$$

Здесь и далее δ_{ij} — символ Кронекера.

Предложение 2. Символы Кристоффеля второго рода, соответствующие метрике (1), имеют вид

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\mu}{2x_n} (\delta_{ik}\delta_{jn} + \delta_{jk}\delta_{in} - \delta_{ij}\delta_{kn}). \tag{6}$$

Предложение 3. Компоненты тензора Римана, соответствующего метрике (1), имеют вид

$$R_{ijk}^{l} = \left(\frac{\mu^2}{4x_n^2} - \frac{\mu}{2x_n^2}\right) \times$$
$$\times (\delta_{li}\delta_{in}\delta_{kn} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ln} - \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ln} - \delta_{lk}\delta_{in}\delta_{jn}) +$$
$$+ \frac{\mu^2}{4x_n^2} (\delta_{ij}\delta_{lk} - \delta_{ik}\delta_{lj}). \tag{7}$$

Предложение 4. Компоненты тензора Риччи, соответствующего метрике (1), имеют вид

$$R_{ij} = \frac{\mu}{4x_n^2} \Big((\mu-2)(2-n)\delta_{in}\delta_{jn} + (\mu(n-2)+2)\delta_{ij} \Big). \tag{8}$$

Предложение 5. Система уравнений геодезических пространства V_n сводится к системе первого порядка

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{C_k}{x_n^{\mu}}, \ k = 1, \ldots, n-1,$$
$$\left(\frac{dx_n}{ds}\right)^2 = \frac{C_n}{x_n^{\mu}} - \frac{B^2}{x_n^{2\mu}}, \tag{9}$$

где $B = \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} C_k^2}$.

Предложение 6. Кривизна пространства V_n вычисляется по формуле

$$R = \frac{\mu n(n-2)}{x_n^{\mu+2}} = \frac{2\gamma n}{x_n^{(2\gamma+2n-4)/(n-2)}}. \qquad (10)$$

Заметим, что кривизна (10) является постоянной в двух случаях:

1) при $\mu = 0$ $(\gamma = 0)$, то есть, если метрика (1) является евклидовой и тогда $R = 0$;

2) при $\mu = -2$ $(\gamma = 2 - n)$. При этом $R = -2n(n-2) < 0$, а пространство V_n совпадает с пространством Лобачевского.

Как известно (см. [2], [3]), в пространстве Лобачевского и в евклидовом пространстве транзитивно действует группа изометрий. Исследование совместности системы уравнений Киллинга [3] приводит к выводу, что в остальных случаях пространство V_n, порожденное метрикой (1), не обладает полноценной группой изометрий. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 7. Если $\mu \neq 0$, $\mu \neq -2$, то всякое изометрическое преобразование пространства V_n с необходимостью является изометрическим преобразованием евклидова пространства R^{n-1} переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Автор признателен профессору В. З. Мешкову и профессору Л. Н. Ляхову за внимание к работе и ряд критических замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука. Физматлит, 1997. — 208 с.

2. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. — М.: Мир, 1987. — 736 с.

3. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.