ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика. Математика, 2005, № 1

УДК 517.988.63

ОБОБЩЁННЫЙ ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. И. Перов

Воронежский государственный университет

При изучении систем уравнений (алгебраических, дифференциальных или интегральных) иногда удобно пользоваться не обычными метрическими пространствами с числовыми метриками и обычным принципом сжимающих отображений, а обобщенными метрическими пространствами, в которых расстояние между элементами измеряются с помощью векторов с неотрицательными компонентами, а в качестве констант сжатия выступают не числа, а квадратные матрицы с неотрицательными элементами, спектральный радиус которых либо меньше единицы (a-матрицы), либо равен единице (b-матрицы).

Статья содержит подробное изложение обобщенного принципа сжимающих отображений и различных его модификаций.

В статье рассматриваются обобщенные метрические пространства, когда расстояния между точками измеряются не с помощью неотрицательных чисел, а с помощью векторов с неотрицательными компонентами. Изучаются обобщенные сжимающие отображения, для которых в роли постоянной сжатия выступает не неотрицательное число, меньшее или равное единице, а матрица с неотрицательными элементами, спектральный радиус которой меньше единицы (для полных обобщенных метрических пространств) или равен единице (для компактных обобщенных метрических пространств). При этих условиях для них устанавливаются существование и единственность неподвижной точки, а также сходимость к ней последовательных приближений, сопровождаемая соответствующими оценками погрешности.

В статье приняты следующие обозначения. Вектор-строка и вектор-столбец с компонентами $a_1,\dots,a_n$ обозначаются соответственно $(a_1,\dots,a_n)$ и $col(a_1,\dots,a_n)$. Операция $*$ означает транспонирование; например, если $\mathbf{Q}=(q_{ij})$, то $\mathbf{Q}^*=(q_{ji})$. Спектральный радиус матрицы $\mathbf{Q}$ обозначается $\operatorname{spr}\mathbf{Q}$. Единичная матрица любого порядка записывается как $\mathbf{I}$. Для n-мерных вещественных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ мы пишем $\mathbf{a}\le\mathbf{b}$ или $\mathbf{a}<\mathbf{b}$ в зависимости от того $a_i\le b_i$ или $a_i<b_i$ при всех $i=1,\dots,n$. Аналогично для матриц. Если $\mathbf{Q}$ — неотрицательная квадратная матрица и $\mathbf{Qh}=\rho\mathbf{h}$, где $\mathbf{h}>0$ и $\rho=\operatorname{spr}\mathbf{Q}$, то $\mathbf{h}$ называется перроновым собственным вектором, а ρ — перроновым собственным значением. Начало и конец доказательства обозначаются значками □ и ■ соответственно.

Для удобства изложения приведем сначала вместе с доказательством обычный принцип сжимающих отображений, принадлежащий Банаху и являющийся абстрактной формой построений Каччиполли и метода последовательных приближений Пикара. Его можно найти в учебниках по математическому анализу, по функциональному анализу или по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Пусть $\mathbf{X}$ — метрическое пространство и $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — расстояние между элементами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ этого множества. Как известно, метрика (метрическая функция) $d:\mathbf{X}\times\mathbf{X}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет следующим требованиям:

1. $d(\mathbf{x},\mathbf{y})\ge 0$;
2. $d(\mathbf{x},\mathbf{y})=0\Leftrightarrow\mathbf{x}=\mathbf{y}$;
3. $d(\mathbf{x},\mathbf{y})=d(\mathbf{y},\mathbf{x})$;
4. $d(\mathbf{x},\mathbf{y})\le d(\mathbf{x},\mathbf{z})+d(\mathbf{z},\mathbf{y})$ (неравенство треугольника).

Из аксиом метрического пространства просто выводится обратное неравенство треугольника

$$\left|d(\mathbf{x},\mathbf{y})-d(\mathbf{x},\mathbf{z})\right|\le d(\mathbf{y},\mathbf{z}),$$

и неравенство четырехугольника

$$|d(\mathbf{x},\mathbf{y}) - d(\mathbf{u},\mathbf{z})| \le d(\mathbf{x},\mathbf{u}) + d(\mathbf{y},\mathbf{x}).$$

(при $\mathbf{u} = \mathbf{x}$ превращающееся в предыдущее неравенство).

Последовательность точек $\mathbf{x}_k$ метрического пространства $\mathbf{X}$ называется сходящейся к точке $\mathbf{x}$ из $\mathbf{X}$, что обозначается как $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N(\varepsilon)$, что $d(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}) < \varepsilon$ для всех номеров $k > N(\varepsilon)$. Последовательность точек $\mathbf{x}_k$ называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N(\varepsilon)$, что $d(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_l) < \varepsilon$ для всех номеров $k,l > N(\varepsilon)$. Каждая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Если в метрическом пространстве верно обратное — каждая фундаментальная последовательность является сходящейся, то оно называется полным.

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное отображение пространства $\mathbf{X}$ в себя, $\mathcal{F} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$. При этом отображении каждая точка $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ переходит в некоторую точку $\mathcal{F}\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Если окажется, что

$$\mathbf{x} = \mathcal{F}\mathbf{x}, \qquad (1)$$

то такая точка $\mathbf{x}$ называется неподвижной. Иными словами, неподвижные точки и только они могут быть решениями уравнения (1). Всякая теорема, гарантирующая существование решения уравнения (1), обычно называется принципом неподвижной точки. Различным принципам неподвижной точки посвящена обширная литература (см, например, [6], [7] и библиографию в них). Для обнаружения неподвижной точки отображения $\mathcal{F}$ часто используют метод последовательных приближений

$$\mathbf{x}_k = \mathcal{F}\mathbf{x}_{k-1},\ \ k = 1,2,\ldots, \qquad (2)$$

где начальная точка $\mathbf{x}_0$ — некоторая точка из $\mathbf{X}$. Так как $\mathcal{F}$ отображает X в себя, то процесс построения точек $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots$ можно продолжать неограниченно.

Мы остановимся на самом простом и, возможно, самом известном из принципов неподвижной точки — принципе сжимающих отображений. Действующий в метрическом пространстве $\mathbf{X}$ оператор $\mathcal{F}$ называется сжимающим, если выполнено условие

$$d(\mathcal{F}\mathbf{x},\mathcal{F}\mathbf{y}) \le q d(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \ \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{X}, \qquad (3)$$

где q — некоторое неотрицательное число, меньшее единицы,

$$0 \le q < 1, \qquad (4)$$

называемое константой сжатия.

Теорема 1 (принцип сжимающих отображений (сравни с [17, с. 390—391])). *Пусть $\mathcal{F}$ — сжимающее отображение полного метрического пространства $\mathbf{X}$ в себя (см. (3)—(4)). Тогда оно имеет единственную неподвижную точку $\tilde{\mathbf{x}}$, то есть уравнение (1) имеет единственное решение. Для любой точки $\mathbf{a}$ решение $\tilde{\mathbf{x}}$ лежит в шаре*

$$d(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{a}) \le \frac{1}{1-q} d(\mathcal{F}\mathbf{a},\mathbf{a}). \qquad (5)$$

Это решение может быть получено обычным методом последовательных приближений (2), начиная с любой точки $\mathbf{x}_0$ из $\mathbf{X}$, причем справедлива следующая оценка погрешности

$$\rho(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x}_k) \le \frac{q^k}{1-q} \rho(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_0),\ \ k = 0,1,\ldots. \qquad (6)$$

□ Покажем, что последовательность $\mathbf{x}_k$, построенная по методу последовательных приближений (2), является сходящейся. Для этого в силу полноты пространства $\mathbf{X}$ достаточно лишь проверить, что она является фундаментальной. Согласно условиям сжатия (3)—(4) имеем

$$d(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_{k-1}) = d(\mathcal{F}\mathbf{x}_{k-1},\mathcal{F}\mathbf{x}_{k-2}) \le$$
$$\le q d(\mathbf{x}_{k-1},\mathbf{x}_{k-2}) \le \ldots \le q^{k-1} d(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_0),$$

откуда для произвольных $l > k$ находим

$$d(\mathbf{x}_l,\mathbf{x}_k) \le d(\mathbf{x}_l,\mathbf{x}_{l-1}) +$$
$$+ d(\mathbf{x}_{l-1},\mathbf{x}_{l-2}) + \ldots + d(\mathbf{x}_{k+1},\mathbf{x}_k) \le$$
$$\le (q^{l-1} + \ldots + q^k)\rho(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_0),$$

и так как

$$q^{l-1} + \ldots + q^k = \frac{q^k - q^l}{1-q},$$

то получаем

$$d(\mathbf{x}_l,\mathbf{x}_k) \le \frac{q^k - q^l}{1-q} d(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_0),\ \ l > k. \qquad (7)$$

Так как $q^k, q^l \to 0$ при $k,l \to +\infty$ (напомним, что по условию (4) $0 \le q < 1$), то мы видим, что последовательность $\mathbf{x}_k$ — фундаментальная. В силу полноты пространства $\mathbf{X}$ она сходится к некоторому элементу, который мы обозначим через $\tilde{\mathbf{x}}$. Покажем, что

$\tilde{\mathbf{x}}$ является неподвижной точкой отображения $\mathcal{F}$. Действительно, так как $\mathbf{x}_k \to \tilde{\mathbf{x}}$, то в силу (2) и условия (3)

$$d(\tilde{\mathbf{x}}, \mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}) \leq d(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_k) + d(\mathbf{x}_k, \mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}) = \\ = d(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_k) + d(\mathcal{F}\mathbf{x}_{k-1}, \mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}) \leq \\ \leq d(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_k) + qd(\mathbf{x}_{k-1}, \tilde{\mathbf{x}}) \to 0$$

при $k \to +\infty$, откуда в силу неотрицательности метрики получаем $\rho(\tilde{\mathbf{x}}, \mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ и, значит, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}$. Существование неподвижной точки доказано.

Пусть $\tilde{\mathbf{y}}$ — произвольная неподвижная точка отображения $\mathcal{F}$, т.е. $\tilde{\mathbf{y}} = \mathcal{F}\tilde{\mathbf{y}}$. Тогда в силу условия (3)

$$d(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = d(\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}, \mathcal{F}\tilde{\mathbf{y}}) \leq qd(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}),$$

откуда получаем $(1-q)d(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \leq 0$, и, так как $1-q > 0$ согласно (4), то, сокращая обе части написанного неравенства на $1-q$, находим $d(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \leq 0$. В силу неотрицательности метрики $d(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = 0$, что немедленно приводит к равенству $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{y}}$. Единственность неподвижной точки установлена.

Пусть $\mathbf{a}$ — произвольная точка из $\mathbf{X}$. Тогда из

$$d(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) \leq d(\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}, \mathcal{F}\mathbf{a}) + d(\mathcal{F}\mathbf{a}, \mathbf{a})$$

в силу (3) и (4) получаем

$$(1-q)d(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) \leq d(\mathcal{F}\mathbf{a}, \mathbf{a})$$

откуда немедленно вытекает оценка (5).

Если в оценке (7) устремить l к бесконечности, то мы придем к оценке (6). ■

В приложениях принципа сжимающих отображений полезно знать следующее утверждение. Пусть оператор $\mathcal{F}$ является сжимающим не на всем пространстве $\mathbf{X}$, а только на некотором замкнутом шаре $\mathbf{S}(\mathbf{a}, r)$ с центром в точке $\mathbf{a}$ и радиуса r,

$$d(\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathcal{F}\mathbf{y}) \leq qd(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S}(\mathbf{a}, r), \qquad (8)$$

где q — некоторое неотрицательное число, меньшее единицы,

$$0 \leq q < 1. \qquad (9)$$

Покажем, что при выполнении условия

$$d(\mathbf{a}, \mathcal{F}\mathbf{a}) \leq (1-q)r \qquad (10)$$

отображение $\mathcal{F}$ переводит шар $\mathbf{S}(\mathbf{a}, r)$ в себя. В самом деле, если $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq r$, то в силу (8)—(10)

$$d(\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq d(\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathcal{F}\mathbf{a}) + d(\mathcal{F}\mathbf{a}, \mathbf{a}) \leq \\ \leq qd(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + d(\mathcal{F}\mathbf{a}, \mathbf{a}) \leq qr + (1-q)r = r,$$

и наше утверждение доказано. Поэтому в соответствии с теоремой 1 отображение $\mathcal{F}$ в шаре $\mathbf{S}(\mathbf{a}, r)$ имеет единственную неподвижную точку, она может быть получена методом последовательных приближений и справедлива указанная выше оценка погрешности. Конечно, во всех этих рассуждениях предполагается, что $\mathbf{X}$ — полное метрическое пространство или хотя бы шар $\mathbf{S}(\mathbf{a}, r)$, рассматриваемый сам по себе, является полным метрическим пространством.

В применениях принципа сжимающих отображений заметное место занимают случаи, когда либо пространство $\mathbf{X}$, либо оператор $\mathcal{F}$ оказываются компактными. Напомним, что метрическое пространство $\mathbf{X}$ называется компактным, если из любой последовательности его точек $\mathbf{x}_k$ всегда можно извлечь подпоследовательность $\mathbf{x}_{kj}$, сходящуюся к некоторому элементу из $\mathbf{X}$. Компактное метрическое пространство всегда полно. Отображение $\mathcal{F}: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ называется компактным, если на любом ограниченном множестве $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{X}$ его значения лежат в некотором компактном множестве пространства $\mathbf{X}$ (то есть замечание $\overline{\mathcal{F}M}$ есть компактное множество). Обычно в этом случае еще предполагается, что оператор $\mathcal{F}$ непрерывен.

Оказывается, что если метрическое пространство $\mathbf{X}$ компактно, то утверждение принципа сжимающих отображений остается справедливым кроме оценок (5) и (6), при более слабом ограничении (сравни с (3)—(4))

$$d(\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathcal{F}\mathbf{y}) < qd(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ при } \forall \mathbf{x}\mathbf{y} \in \mathbf{X}, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \qquad (11)$$

где

$$q = 1. \qquad (12)$$

Теорема 2. *Пусть оператор $\mathcal{F}$ — отображение компактного метрического пространства $\mathbf{X}$ в себя, удовлетворяющее условиям (11)—(12). Тогда оператор $\mathcal{F}$ имеет в $\mathbf{X}$ единственную неподвижную точку и эта точка может быть получена методом последовательных приближений (2).*

□ Рассмотрим на $\mathbf{X}$ функционал (М. Г. Крейн)

$$J(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathcal{F}\mathbf{x}).$$

В силу неравенства четырехугольника и условий (11)—(12) он удовлетворяет условию Липшица

$$\left|J(\mathbf{x})-J(\mathbf{y})\right|=\left|d(\mathbf{x},\mathcal{F}\mathbf{x})-d(\mathbf{y},\mathcal{F}\mathbf{y})\right|\le$$
$$\le d(\mathbf{x},\mathbf{y})+d(\mathcal{F}\mathbf{x},\mathcal{F}\mathbf{y})\le 2d(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

и потому непрерывен. Так как непрерывный функционал на компактном множестве ограничен и достигает своих точных верхней и нижней граней (теорема Вейерштрасса), то функционал J в некоторой точке $\tilde{\mathbf{x}}\in\mathbf{X}$ достигает минимума. Покажем, что $\tilde{\mathbf{x}}$ — неподвижная точка отображения $\mathcal{F}$. Действительно, если на мгновение допустить, что $\tilde{\mathbf{x}}\ne\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}$, то в силу условий (11)—(12) получаем

$$J(\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}})=d(\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}},\mathcal{F}(\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}))<d(\tilde{\mathbf{x}},\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}})=J(\tilde{\mathbf{x}}),$$

что находится в явном противоречии с определением точки минимума. Следовательно, $\tilde{\mathbf{x}}=\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}$, и существование неподвижной точки установлено.

Единственность неподвижной точки непосредственно вытекает из условий (11)—(12): если $\tilde{\mathbf{x}}=\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\mathbf{y}}=\mathcal{F}\tilde{\mathbf{y}}$, причем $\tilde{\mathbf{x}}\ne\tilde{\mathbf{y}}$, то

$$d(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{y}})=d(\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}},\mathcal{F}\tilde{\mathbf{y}})<d(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}})$$

и получаем противоречие.

Доказательство сходимости последовательных приближений $\mathbf{x}_k$ к точке $\tilde{\mathbf{x}}$ также не вызывает труда. Так как

$$d(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x}_k)=d(\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}},\mathcal{F}\mathbf{x}_{k-1})<d(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x}_{k-1}),\ \ k=1,2,\ldots,$$

(мы считаем, что ни одна точка $\mathbf{x}_k$ не совпадает с $\tilde{\mathbf{x}}$ — ибо тогда сходимость очевидна), то убывающая последовательность положительных чисел $\rho(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x}_k)$ имеет предел, который мы обозначим через c; ясно, что $c\ge 0$. Покажем, что $c=0$. Предположим обратное: пусть $c>0$. Тогда непрерывный функционал $H(\mathbf{x})=d(\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}},\mathcal{F}\mathbf{x})/\rho(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x})$, рассматриваемый на компактном множестве $\mathbf{K}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{X}:d(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x})\ge c\}$, достигает максимума в некоторой точке и в силу условий(11)—(12) этот максимум $\tilde{q}$ меньше единицы. Так как $d(\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}},\mathcal{F}\mathbf{x})\le\tilde{q}d(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x})$ на $\mathbf{K}$ (здесь $\tilde{\mathbf{x}}$ фиксировано), то

$$d(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x}_k)=d(\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}},\mathcal{F}\mathbf{x}_{k-1})\le$$
$$\le\tilde{q}d(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x}_{k-1})\le\ldots\le\tilde{q}^k d(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x}_0)$$

(подчеркнем, что по предположению все $\mathbf{x}_k$ лежат в $\mathbf{K}$), откуда следует, что $d(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x}_k)\to 0$, а это находится в противоречии с положительностью числа c. ■

Материал статьи, кроме теоремы 1 (и, возможно, теоремы 2) не излагается ни в одном университетском учебнике по математике, хотя, как нам кажется, он был бы крайне полезен при изучении систем (именно систем!) уравнений.

Подробное изложение доказательств теорем 1 и 2, объясняемое методическими причинами, позволяет показать какие происходят изменения в доказательствах при переходе от числовой метрики и векторной и от констант сжатия к неотрицательным матрицам. Отметим попутно, что доказательство теоремы 2, приведенное в учебнике [4, с. 565], ошибочно.

Перейдем к изложению обобщенного принципа сжимающих отображений. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными положениями теории неотрицательных матриц Перрона—Фробениуса—Виландта [1], [3], [10].

Множество $\mathbf{X}$ назовем обобщенным метрическим пространством [15], если каждой паре точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из этого пространства поставлен в соответствие вектор $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=$ $=col(\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ldots,\rho_n(\mathbf{x},\mathbf{y}))$ из вещественного n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, причем выполнены следующие условия:

1. $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\ge 0$;
2. $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=0\Leftrightarrow\mathbf{x}=\mathbf{y}$;
3. $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=\rho(\mathbf{y},\mathbf{x})$;
4. $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\le\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})+\rho(\mathbf{z},\mathbf{y})$ (обобщенное неравенство треугольника).

При выполнении высказанных требований векторную функцию $\rho:\mathbf{X}\times\mathbf{X}\to\mathbb{R}^n$ назовем обобщенной метрикой. Если $n=1$, то мы получаем обычное метрическое пространство, о котором мы говорили в начале статьи.

На обобщенные метрические пространства естественным образом переносятся основные определения теории обычных метрических пространств (открытые и замкнутые шары, сходящиеся и фундаментальные последовательности, полные и компактные пространства и т.д.), только под ε нужно теперь понимать вектор $\varepsilon=col(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ с положительными компонентами: $0<\varepsilon\in\mathbb{R}^n$.

Мы скажем, что отображение $\mathcal{F}:\mathbf{X}\to\mathbf{X}$ есть обобщенное сжимающее отображение, если выполнено условие

$$\rho(\mathcal{F}\mathbf{x},\mathcal{F}\mathbf{y})\le\mathbf{Q}\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \ \forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{X},\qquad(13)$$

где $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ есть некоторая вещественная квадратная неотрицательная $n \times n$ — матрица, спектральный радиус которой меньше единицы,

$$0 \le \mathbf{Q}, \quad \operatorname{spr} \mathbf{Q} < 1 \tag{14}$$

(сравни с определением (3)—(4)). Посмотрим как работает условие сжатия в новой ситуации. Пусть $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\mathbf{y}}$ — неподвижные точки оператора $\mathcal{F}$, т.е. $\tilde{\mathbf{x}} = \mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\mathbf{y}} = \mathcal{F}\tilde{\mathbf{y}}$. Тогда в силу (13) имеем $\rho(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \rho(\mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}, \mathcal{F}\tilde{\mathbf{y}}) \le \mathbf{Q}\rho(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, откуда приходим к неравенству $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\rho(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \le 0$. Условие $sprQ < 1$ (см. (14)) говорит о том, что матрица $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$ имеет обратную, причем согласно разложению [10, с. 173]

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \ldots + \mathbf{Q}^k + \ldots \quad \ge 0 \tag{15}$$

обратная матрица неотрицательна. Умножая обе части неравенства $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\rho(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \le 0$ слева на неотрицательную матрицу $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$, получаем $\rho(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \le 0$, откуда следует, что $\rho(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = 0$. Так как обобщенная метрика является определенной, то из последнего неравенства вытекает, что $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{y}}$. Единственность неподвижной точки доказана.

Скажем несколько слов о том как практически проверять условие (14). Конечно, оно заведомо выполнено, если норма матрицы $\mathbf{Q}$ (при каком-либо выборе матричной нормы) меньше единицы

$$\|\mathbf{Q}\| < 1. \tag{16}$$

Так будет, например, если выполнено первое или последнее из условий (в каждом из них i меняется от 1 до n)

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} < 1,$$
$$q_{ii} + \left(\sum_{j \ne i} q_{ij}\right)^{1-\alpha} \left(\sum_{j \ne i} q_{ji}\right)^{\alpha} < 1, \tag{17}$$
$$\sum_{j=1}^{n} q_{ji} < 1.$$

Среднее условие не вытекает из сказанного; если остальные условия говорят о том, что норма матрицы Q меньше единицы в равномерной норме или когда норма вектора есть сумма модулей его компонент (эти же условия можно получить из рассмотрения кругов Гершгорина [14], построенных по строкам или по столбцам матрицы $\mathbf{Q}$), то выделенное нами (среднее) условие вытекает из рассмотрения кругов Островского [14]. В нем суммирование распространено на все индексы $j = 1, \ldots, n$, кроме $j = i$, и $0 < \alpha < 1$. Формально при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ мы получаем первое и последнее условие соответственно.

Оказывается, что для проверки условия (14) можно предложить критерий, напоминающий хорошо известный критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Мецлер [1, с. 335, упр. 1] доказал, что спектральный радиус неотрицательной матрицы $\mathbf{Q}$ менее единицы (т.е выполнено требование (14)) в том и только в том случае, если положительны все главные миноры матрицы $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$. Итак, нужно проверить $2^n - 1$ детерминантных неравенств. Однако, это число может быть значительно снижено. Как вытекает из леммы Д. М. Котелянского [3, с. 369—371] достаточно ограничиться положительностью последовательных главных миноров матрицы $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$, т.е. проверкой на положительность всего n детерминантных неравенств. Таким образом, спектральный радиус неотрицательной матрицы $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ меньше единицы, т.е. выполнено требование (14), тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$1 - q_{11} > 0, \begin{vmatrix} 1 - q_{11} & -q_{12} \\ -q_{21} & 1 - q_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots,$$
$$\begin{vmatrix} 1 - q_{11} & -q_{12} & \cdots & -q_{1n} \\ -q_{21} & 1 - q_{22} & \cdots & -q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -q_{n1} & -q_{n2} & \cdots & 1 - q_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{18}$$

Теорема 3 (обобщенный принцип сжимающих отображений [15]). *Пусть $\mathcal{F}$ — обобщенное сжимающее отображение полного обобщенного метрического пространства* $\mathbf{X}$ *в себя (см. (13)—(14)). Тогда оно имеет единственную неподвижную точку* $\tilde{\mathbf{x}}$, *то есть уравнение (1) имеет единственное решение. Для любой точки* $\mathbf{a}$ *решение* $\tilde{\mathbf{x}}$ *лежит в шаре*

$$\rho(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) \le (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \rho(\mathcal{F}\mathbf{a}, \mathbf{a}). \tag{19}$$

Это решение может быть получено обычным методом последовательных приближений (2),начиная с любой точки $\mathbf{x}_0$ *из* **X**, *причем справедлива следующая оценка погрешности*

$$\rho(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_k) \le (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}^k \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0), \; k = 1, 2, \ldots. \quad (20)$$

□ Пусть $\mathbf{x}_0$ — произвольная точка пространства $\mathbf{X}$. По формуле (2) построим последовательность $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots$. Покажем, что последовательность $\mathbf{x}_k$ является фундаментальной. Действительно, в силу (13) имеем

$$\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) = \rho(\mathcal{F}\mathbf{x}_{k-1}, \mathcal{F}\mathbf{x}_{k-2}) \le$$
$$\le \mathbf{Q}\rho(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-2}) \le \ldots \le \mathbf{Q}^{k-1}\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0),$$

откуда при произвольных $l > k$ находим

$$\rho(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_k) \le \rho(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_{l-1}) + \rho(\mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_{l-2}) + \ldots$$
$$\ldots + \rho(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) \le (\mathbf{Q}^{l-1} + \ldots + \mathbf{Q}^k)\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0),$$

и так как в силу условия (14)

$$\mathbf{Q}^{l-1} + \cdots + \mathbf{Q}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{Q}^k - \mathbf{Q}^l)$$

что легко проверяется умножением обеих частей равенства слева на $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$, приходим к основной оценке

$$\rho(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_k) \le (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\{\mathbf{Q}^k - \mathbf{Q}^l\}\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0). \quad (21)$$

Так как $\mathbf{Q}^k, \mathbf{Q}^l \to 0$ при $k, l \to \infty$, то в силу (21) последовательность (2) является фундаментальной. Ввиду полноты пространства $\mathbf{X}$ она сходится к некоторой точке $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}$. Так как отображение $\mathcal{F}$ непрерывно (даже равномерно непрерывно), то, совершая предельный переход в (2), получаем, что $\tilde{\mathbf{x}} = \mathcal{F}\tilde{\mathbf{x}}$. Существование неподвижной точки доказано. Единственность была проверена нами выше. Локализацонный результат (19) может быть получен теми же рассуждениями, что и неравенство (5). Оценка (20) немедленно следует из (21) при $l \to \infty$. ■

Теорема 3 была сформулирована и доказана мною в 1964 г. [15]. Теперь это утверждение в том или ином виде хорошо известно. На основании [5] можно утверждать, что оно первоначально было сформулировано и доказано (даже значительно более общем виде) И. Шрёдером в 1956 г. Главным в нашей статье в изложении теоремы 3 и сопровождающего ее материала является привлечение теоремы Мецлера и леммы Д. М. Котелянского (см. выше) для получения критериев (т.е. необходимых и достаточных условий) того, что спектральный радиус неотрицательной $n \times n$-матрицы меньше единицы. Самое удивительное, что ни в книге [5], ни в книге [13] в главах, посвященных изучению систем уравнений, нет ни слова об этих критериях, как нет и использования в какой-либо степени теории неотрицательных матриц Перрона—Фробениуса—Виландта. Многочисленные результаты по оценке спектрального радиуса можно найти в книге [8], но и там нет упоминания ни о теореме Мецлера, ни о лемме Д. М. Котелянского.

В приложениях обобщенного принципа сжимающих отображений может быть известно, что отображение $\mathcal{F}$ является сжимающим не на всем пространстве $\mathbf{X}$, а только на некотором замкнутом шаре $\mathbf{S}(\mathbf{a}, \mathbf{r})$ с центром в точке $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$, и радиусом $\mathbf{r}$, $0 < \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$,

$$\rho(\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathcal{F}\mathbf{y}) \le \mathbf{Q}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \quad (22)$$

где $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ есть некоторая неотрицательная $n \times n$ — матрица, спектральный радиус которой меньше единицы,

$$0 \le \mathbf{Q}, \;\; \operatorname{spr}\mathbf{Q} < 1. \quad (23)$$

Покажем, что при выполнении дополнительные условия

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\rho(\mathcal{F}\mathbf{a}, \mathbf{a}) \le \mathbf{r} \quad (24)$$

отображение $\mathcal{F}$ в шаре $\mathbf{S}(\mathbf{a}, \mathbf{r})$ имеет единственную неподвижную точку (локальный принцип обобщенных сжимающих отображений).

Отметим, что при $n = 1$ условия (22)—(24) превращаются в условия (8)—(10).

□ Единственность неподвижной точки была установлена нами выше. Докажем ее существование. Рассмотрим последовательные приближения $\mathbf{x}_k$, вычисляемые по формуле (2) с фиксированным начальным условием $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$. Проверим методом математической индукции что все приближения $\mathbf{x}_k$ могут быть построены, лежат в шаре $\mathbf{S}(\mathbf{a}, \mathbf{r})$, причем при $k = 1, 2, \ldots$ справедливы оценки

$$\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) \le \mathbf{Q}^{k-1}\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0);$$

$$\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) \le (\mathbf{I} + \ldots + \mathbf{Q}^{k-1})\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0).$$

Действительно, при $k = 1$ написанные выше неравенства выполнены со знаком равенства (мы помним, что $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$). Проведем шаг индукции, считая, что для номеров, меньших k, написанные выше неравенства уже установлены. Мы имеем в силу условия (22)

$$\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) = \rho(\mathcal{F}\mathbf{x}_{k-1}, \mathcal{F}\mathbf{x}_{k-2}) \le$$
$$\le \mathbf{Q}\rho(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-2}) \le \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{k-2}\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) =$$
$$= \mathbf{Q}^{k-1}\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0);$$

Аналогично

$$\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) \le \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) + \rho(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{a}) \le$$
$$\le \mathbf{Q}^{k-1}\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) + (\mathbf{I} + \ldots + \mathbf{Q}^{k-2})\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) =$$
$$= (\mathbf{I} + \ldots + \mathbf{Q}^{k-2} + \mathbf{Q}^{k-1})\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0).$$

В силу условий (23) и (24) (мы помним, что $\mathbf{x}_1 = \mathcal{F}\mathbf{a}$)

$$\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) \le (\mathbf{I} + \ldots + \mathbf{Q}^{k-1})\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) \le$$
$$\le (\mathbf{I} + \ldots + \mathbf{Q}^{k-1} + \mathbf{Q}^{k} + \ldots)\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) =$$
$$= (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\rho(\mathcal{F}\mathbf{a}, \mathbf{a}) \le \mathbf{r}$$

(мы воспользовались формулой (15)) и точка $\mathbf{x}_k$ лежит в шаре $\mathbf{S}(\mathbf{a}, \mathbf{r})$. Теперь доказательство утверждения завершается очевидным образом. ■

Нетрудно видеть, что при $n = 1$ обобщенный принцип сжимающих отображений (теорема 3) превращается в обычный принцип сжимающих отображений (теорему 1). Интересное, возможно, в том, что и наоборот в свою очередь обобщенный принцип сжимающих отображений может быть получен из обычного принципа сжимающих отображений, кроме оценок (19) и (20).

Для того чтобы обосновать высказанное выше утверждение докажем предварительно лемму 1. В интересах дальнейшего изложения теории обобщенных сжимающих отображений приведем одно определение из [15]. Неотрицательная квадратная $n \times n$ — матрица $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ называется a — матрицей, если положительны все главные миноры матрицы $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$, где $\mathbf{I}$, напоминаем, есть единичная $n \times n$ — матрица. Как мы говорили выше, последнее требование равносильно тому, что $\operatorname{spr}\mathbf{Q} < 1$ (см. условие (14)), причем можно ограничиться положительностью последовательных главных миноров матрицы $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$ (см. неравенства (18)).

Лемма 1. *Для того чтобы неотрицательная матрица $\mathbf{Q}$ была a — матрицей (т.е. удовлетворяла требованию (14)) необходимо и достаточно существование такой строки $\mathbf{l}$ с положительными компонентами и такого числа q, $0 < q < 1$, что*

$$\mathbf{l}\mathbf{Q} \le q\mathbf{l},\ \mathbf{l} > \mathbf{0},\ 0 < q < 1. \qquad (25)$$

□ Необходимость. Пусть неотрицательная матрица $\mathbf{Q}$ является a — матрицей. Тогда $\operatorname{spr}\mathbf{Q} < 1$. Предположим сперва, что матрица $\mathbf{Q}$ неразложима. Тогда по теореме Фробениуса, примененной к неотрицательной неразложимой матрице $\mathbf{Q}^*$, (правый) перронов собственный вектор $\mathbf{l}^*$ матрицы $\mathbf{Q}^*$ положителен и $\mathbf{Q}^*\mathbf{l}^* = q\mathbf{l}^*$, где $q = \operatorname{spr}\mathbf{Q}^* (= \operatorname{spr}\mathbf{Q}) < 1$ есть перроново собственное значение матрицы $\mathbf{Q}^*$. Применяя операцию $*$, получаем

$$\mathbf{l}\mathbf{Q} = q\mathbf{l},\ l > \mathbf{0},\ 0 < q = \operatorname{spr}\mathbf{Q} < 1, \qquad (26)$$

и (25) имеет место, причем в первом соотношении стоит знак равенства.

Пусть теперь $\mathbf{Q}$ — произвольная матрица. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ будем иметь $0 < q_\varepsilon = \operatorname{spr}\mathbf{Q}_\varepsilon < 1$, где $\mathbf{Q}_\varepsilon = (q_{ij} + \varepsilon)$. Матрица $\mathbf{Q}_\varepsilon$ уже неразложима (она даже положительна, $\mathbf{Q}_\varepsilon > \mathbf{0}$) и по предыдущему существует такой положительный вектор (столбец) $\mathbf{l}_\varepsilon^*$, что $\mathbf{Q}_\varepsilon^*\mathbf{l}_\varepsilon^* = q_\varepsilon\mathbf{l}_\varepsilon^*$. Применяя операцию $*$, получаем

$$\mathbf{l}_\varepsilon\mathbf{Q}_\varepsilon = q_\varepsilon\mathbf{l}_\varepsilon,\ \mathbf{l}_\varepsilon > \mathbf{0},\ 0 < q_\varepsilon < 1,$$

и, значит, $\mathbf{l}_\varepsilon\mathbf{Q} < \mathbf{l}_\varepsilon\mathbf{Q}_\varepsilon = q_\varepsilon\mathbf{l}_\varepsilon$. Мы видим, что имеет место (22) при $\mathbf{l} = \mathbf{l}_\varepsilon$ и $q = q_\varepsilon$. Необходимость доказана.

Достаточность. Введем в $\mathbb{R}^n$ норму, положив $\|\xi\| = \mathbf{l}|\xi|$, где строка $\mathbf{l}$ взята из (25), а $|\xi|$ обозначает неотрицательный вектор-столбец с компонентами $|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|$. Тогда

$$\|\mathbf{Q}\xi\| = \mathbf{l}|\mathbf{Q}\xi| \le \mathbf{l}\mathbf{Q}|\xi| \le q\mathbf{l}|\xi| = q\|\xi\|,$$

откуда в силу произвольности $\xi \in \mathbb{R}^n$ получаем $\|\mathbf{Q}\| \le q$. Так как всегда $\operatorname{spr}\mathbf{Q} \le \|\mathbf{Q}\|$, а в силу (25) имеем $\operatorname{spr}\mathbf{Q} \le q < 1$, то $\mathbf{Q}$ является a — матрицей. Достаточность доказана. ■

Вернемся к теореме 3: Введем в $\mathbf{X}$ числовую метрику

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{l}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \qquad (27)$$

где строка $\mathbf{l}$ взята из (25) (требование $\mathbf{l} > 0$ нужно было нам для того, чтобы метрика $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ была определенной: из $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ должно следовать $\mathbf{x} = \mathbf{y}$). Из (13) в силу (25) получаем

$$d(\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathcal{F}\mathbf{y}) = \mathbf{l}\rho(\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathcal{F}\mathbf{y}) \le$$
$$\le \mathbf{l}\mathbf{Q}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le q\mathbf{l}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = qd(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

т.е.

$$d(\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathcal{F}\mathbf{y}) \le qd(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

причем

$0 \le q < 1.$

Мы видим, что выполнены условия (3)—(4) и оператор $\mathcal{F}$ оказывается сжимающим в метрике (27). Способ введения метрики по правилу (27) заимствован нами из статьи Э. М. Мухамадиева и В. Я. Стеценко [11]. В нашей статье [15] метрика в X строилась, исходя из некоторого скалярного произведения.

Пусть в условиях теоремы 3 матрица $\mathbf{Q}$ неразложима. Тогда в метрике (27), где положительная сторона $\mathbf{l}$ взята из (26), справедлива следующая оценка погрешности (сравни с (5))

$$d(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_k) \le \frac{q^k}{1-q} d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0), \tag{28}$$

где $q = \operatorname{spr}\mathbf{Q} (< 1)$ есть перроново собственное значение матрицы $\mathbf{Q}$, а $\mathbf{l}$ есть левый перронов соответственный вектор.

Заключительную часть статьи мы хотим посвятить построению аналога теоремы 2 для обобщенных компактных метрических пространств.

Несколько изменяя данное нами первоначально в [15] определение, неотрицательную матрицу $\mathbf{Q}$ назовем b — матрицей, если неотрицательны все главные миноры матрицы $\mathbf{I}-\mathbf{Q}$, если хотя бы один из этих главных миноров равен нулю и если в случае обращения в нуль любого из указанных выше главных миноров, для которого существует (правый) собственный вектор с положительными компонентами, равны нулю все элементы выбранных столбцов матрицы $\mathbf{Q}$, не лежащие на выбранных сторонах (речь идет о столбцах и строках, на пересечении которых лежит рассматриваемый главный минор).

В определении b — матрицы (сравни с определением a — матрицы) первое требование равносильно тому, что $\operatorname{spr}\mathbf{Q} \le 1$ [3, с. 368], второе требование говорит о том, что $\operatorname{spr}\mathbf{Q} = 1$ и, наконец третье требование носит совершенно специфический характер, вызванный особенностями задачи. Последнее объясняет почему $\mathbf{Q}$ может быть b — матрицей, в то время как $\mathbf{Q}^*$ таковой не является (не смотря на то, что $\operatorname{spr}\mathbf{Q} = \operatorname{spr}\mathbf{Q}^* = 1$). Примерами b — матриц могут служить

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1/2 \end{pmatrix}$$

не является b-матрицей.

Лемма 2. *Для того чтобы неотрицательная матрица* $\mathbf{Q}$, *для которой* $\operatorname{spr}\mathbf{Q} = 1$, *была* b*-матрицей необходимо и достаточно существование такой строки* $\mathbf{l}$ *с положительными элементами, что*

$$\mathbf{l}\mathbf{Q} \le \mathbf{l}, \ \mathbf{l} > 0. \tag{29}$$

□ Необходимость. Пусть неотрицательная матрица $\mathbf{Q}$ является b — матрицей. Тогда, как мы уже говорили выше, можно написать

$$0 \le \mathbf{Q}, \ \operatorname{spr}\mathbf{Q} = 1. \tag{30}$$

Если матрица $\mathbf{Q}$ неразложима, то неразложима и матрица $\mathbf{Q}^*$. По теореме Фробениуса, примененной к $\mathbf{Q}^*$, она имеет положительный перронов собственный $\mathbf{l}^*$, отвечающий перронову собственному значению $1 = \operatorname{spr}\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{Q}^*\mathbf{l}^* = \mathbf{l}^*$. После применения операции $*$ к обеим частям написанного равенства получаем $\mathbf{l}\mathbf{Q} = \mathbf{l}, \ \mathbf{l} > 0$ и (29) выполнено (даже со знаком равенства в первом соотношении).

Теперь рассмотрим случай, когда матрица $\mathbf{Q}$ разложима. Тогда разложима и матрица $\mathbf{Q}^*$, и из рассмотрения нормальной формы разложимой матрицы $\mathbf{Q}^*$ [3, с. 373] для матрицы $\mathbf{Q}$ получаем представление в виде блочной верхней треугольной матрицы

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{Q}_{1,p+1} & \dots & \mathbf{Q}_{1s} \\ 0 & \mathbf{Q}_2 & \dots & 0 & \mathbf{Q}_{2,p+1} & \dots & \mathbf{Q}_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_p & \mathbf{Q}_{p,p+1} & \dots & \mathbf{Q}_{ps} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{Q}_{p+1} & \dots & \mathbf{Q}_{p+1,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_s \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Здесь диагональные блоки $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_s$ — неразложимые квадратные матрицы, а в каждом ряду

$$\mathbf{Q}_{1,j}, \mathbf{Q}_{2,j}, \dots, \mathbf{Q}_{j-1,j}, \; j = p+1, \dots, s \tag{32}$$

по крайней мере одна из матриц не равна нулю. Из определения b — матрицы вытекает, что

$$\operatorname{spr} \mathbf{Q}_1 \le 1, \dots, \operatorname{spr} \mathbf{Q}_p \le 1, \tag{33}$$

причем хотя бы в одном из неравенств имеет место равенство и

$$\operatorname{spr} \mathbf{Q}_{p+1} < 1, \dots, \operatorname{spr} \mathbf{Q}_s < 1. \tag{34}$$

Действительно, так как все главные миноры любого из диагональных блоков $\mathbf{I}-\mathbf{Q}_1, \mathbf{I}-\mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{I}-\mathbf{Q}_s$ матрицы $\mathbf{I}-\mathbf{Q}$ неотрицательны, то $\operatorname{spr} \mathbf{Q}_i \le 1$ при $1, 2, \dots, s$. Покажем, что имеют неравенства (34). Предположим обратное и пусть $\operatorname{spr} \mathbf{Q}_j = 1$ при некотором $j = p+1, \dots, s$. В силу неразложимости матрицы $\mathbf{Q}_j$ можно указать такой вектор $\mathbf{h}_j > 0$, что $\mathbf{Q}_j \mathbf{h}_j = \mathbf{h}_j$. Тогда $\det(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_j) = 0$ и по определению b — матрицы должно быть $\mathbf{Q}_{1j} = 0, \mathbf{Q}_{2j} = 0, \dots, \mathbf{Q}_{j-1,j} = 0$ вопреки нашему построению (см.(32)). Итак, неравенства (34) установлены. То, что в (33) хотя бы в одном их неравенств имеет место равенство вытекает из того, что спектр матрицы $\mathbf{Q}$ состоит из объединения спектров диагональных блоков $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_s$ и того, что $\operatorname{spr} \mathbf{Q} = 1$.

Подготовительная работа завершена, и можно переходить к построению положительной строки $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_p, \mathbf{l}_{p+1}, \dots, \mathbf{l}_s)$, векторные компоненты которой выписаны в полном соответствии с блочной структурой матрицы $\mathbf{Q}$ (см. (31)).

Как это было сделано выше, для каждой неразложимой матрицы $\mathbf{Q}_i (i = 1, \dots, p)$ в силу (33) найдем такую положительную строку $\mathbf{l}_i$, что

$$\mathbf{l}_i \mathbf{Q}_i = q_i \mathbf{l}_i, \; \mathbf{l}_i > 0, \; 0 < q_i = \operatorname{spr} Q_i \le 1, \quad i = 1, \dots, p. \tag{35}$$

Для строки $\mathbf{l}_{p+1}$ получаем неравенство

$$\mathbf{l}_1 \mathbf{Q}_{1,p+1} + \dots + \mathbf{l}_p \mathbf{Q}_{p,p+1} + \mathbf{l}_{p+1} \mathbf{Q}_{p+1} \le \mathbf{l}_{p+1},$$

которое перепишем в следующем виде

$$\Delta_{p+1} \equiv \mathbf{l}_1 \mathbf{Q}_{1,p+1} + \dots + \mathbf{l}_p \mathbf{Q}_{p,p+1} \le \mathbf{l}_{p+1} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{p+1}). \tag{36}$$

Так как $\mathbf{l}_1 > 0, \dots, \mathbf{l}_p > 0$ (см. (35)), а среди неотрицательных матриц $\mathbf{Q}_{1,p+1}, \dots, \mathbf{Q}_{p,p+1}$ по условию есть хотя бы одна ненулевая, то Δ_{p+1} — ненулевой неотрицательный вектор. Далее, так как $\operatorname{spr} \mathbf{Q}_{p+1} < 1$ (см. (34)), то матрица $\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{p+1}$ имеет положительную обратную $(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{p+1})^{-1} > 0$ (положительность есть следствие неразложимости матрицы $\mathbf{Q}_2$). Умножая обе части неравенства (36) справа на указанную обратную матрицу, получаем

$$0 < \Delta_{p+1} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{p+1})^{-1} \le \mathbf{l}_{p+1}.$$

В качестве $\mathbf{l}_{p+1}$ возьмем любую строку, удовлетворяющую этому неравенству и зафиксируем. Аналогично строятся остальные компоненты $\mathbf{l}_{p+2}, \dots, \mathbf{l}_s$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеет место (29). Предположим, что для минора

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{k1} & \dots & q_{kk} \end{pmatrix}$$

имеем $\det(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_k) = 0$, причем $\mathbf{Q}_k$ соответствует собственный вектор $\mathbf{u}$ с положительными компонентами, $\mathbf{Q}_k \mathbf{u} = \mathbf{u} > 0$. Запишем матрицу $\mathbf{Q}$ в блочном виде

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_k & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{Q}_k$ и $\mathbf{B}_{22}$ — квадратные блоки, а $\mathbf{B}_{12}$ и $\mathbf{B}_{21}$ — прямоугольные. Докажем, что $\mathbf{B}_{21} = 0$. Допустим противное: пусть $\mathbf{B}_{21} \ne 0$. Обозначим через $\mathbf{l}_k$ строку, составленную из первых k компонент стороны $\mathbf{l}$ (см. (29)). Так как $\mathbf{B}_{21} \ne 0$, то $\mathbf{l}_k \mathbf{Q}_k \le \mathbf{l}_k$ и $\mathbf{l}_k \mathbf{Q}_k \ne \mathbf{l}_k$. Поэтому

$$0 = \mathbf{l}_k (\mathbf{u} - \mathbf{Q}_k \mathbf{u}) = (\mathbf{l}_k - \mathbf{l}_k \mathbf{Q}_k) \mathbf{u} > 0.$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Таким образом, матрица $\mathbf{Q}$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к b — матрицам. Достаточность доказана. ■

Условимся писать $\xi :> 0$, если $\xi \ge 0$, но $\xi \ne 0$ (т.е. среди неравенств $\xi_1 \ge 0, \dots, \xi_n \ge 0$ есть хотя бы одно строгое). Напомним, что запись $\xi > 0$ мы используем в том случае, когда $\xi_1 > 0, \dots, \xi_n > 0$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что сжимающее отображение $\mathcal{F} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ удовлетворяет следующему условию

$$\rho(\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathcal{F}\mathbf{y}) <: \mathbf{Q} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \; \mathbf{x} \ne \mathbf{y}; \; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \tag{37}$$

где $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ — некоторая вещественная квадратная неотрицательная $n \times n$-матрица, являющаяся b-матрицей,

$$0 \le \mathbf{Q}, \ \ \operatorname{spr} \mathbf{Q} = 1, \ \mathbf{lQ} \le \mathbf{l}, \ \mathbf{l} > 0 \qquad (38)$$

(сравни с условиями (11)—(12)), здесь $\mathbf{l}$ — некоторая строка.

Теорема 4. *Пусть оператор $\mathcal{F}$ отображает компактное обобщенное метрическое пространство $\mathbf{X}$ в себя и удовлетворяет условиям (37)—(38). Тогда оператор $\mathcal{F}$ имеет в $\mathbf{X}$ единственную неподвижную точку и эта точка может быть получена обычным методом последовательных приближений (22).*

□ Введем в $\mathbf{X}$ числовую метрику $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ по формуле (27), где строка $\mathbf{l} > 0$ взята из условия (38). Из (37) в силу (38) получаем

$$d(\mathcal{F}\mathbf{x},\mathcal{F}\mathbf{y}) = \mathbf{l}\rho(\mathcal{F}\mathbf{x},\mathcal{F}\mathbf{y}) < \mathbf{lQ}\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le$$

$$\le \mathbf{l}\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

т.е. $d(\mathcal{F}\mathbf{x},\mathcal{F}\mathbf{y}) < d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ при $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$. Мы видим, что выполнены условия (11)—(12). Так как $\mathbf{X}$, очевидно, является компактным в метрике (29), то по теореме 2 справедливы все утверждения теоремы 4. ■

Теорема 4 может быть дополнена следующим утверждением.

Пусть на замкнутом ограниченном множестве $\mathbf{M}$ полного обобщенного метрического пространства $\mathbf{X}$ задано компактное отображение $\mathcal{F}:\mathbf{M}\to\mathbf{M}$, удовлетворяющее условиям (46) и (47) при $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{M}$. Тогда оператор $\mathcal{F}$ имеет в $\mathbf{M}$ единственную неподвижную точку и эта точка может быть получена обычным методом последовательных приближений (24) при произвольном $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$.

Развивая концепцию обобщенной метрики, можно идти еще дальше и в качестве «расстояния» между точками брать не вектор конечной размерности с неотрицательными компонентами, а произвольный неотрицательный элемент некоторого линейного векторного полуупорядоченного пространства. Эта точка зрения впервые была высказана в работе Курепы [9] в 1934 году, а пространства с такой метрикой были названы им псевдометрическими. Изучение пространств с обобщенным расстоянием и действующих в них операторов было одним из направлений деятельности ленинградской школы по функциональному анализу (Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер). Теория псевдометрических пространств и действующих в них операторов заняла солидное место в книге Лотара Коллатца «Функциональный анализ и вычислительная математика» [5]. В предисловии к этой книге автор пишет [5, с. 10]:

«... В дальнейшем исследовались различные еще более общие абстрактные пространства. Эти вопросы изложены здесь лишь в той общности, насколько это оказывалось желательным и необходимым для применения в вычислениях; в этом смысле введенные Курепой псевдометрические пространства являются в настоящее время наиболее важным обобщением ранее рассмотренных пространств».

Мы завершим наше изложение двумя теоремами для a-матриц и b-матриц, которые приведем без доказательства.

Теорема 5. *Для неотрицательных матриц $\mathbf{Q}$ эквивалентны следующие свойства:*

1) $\mathbf{Q}$ является a — матрицей;

2) $\|\mathbf{Q}\| < 1$ при каком-либо выборе матричной нормы;

3) существуют строка $\mathbf{l} > 0$ и число q, $0 < q < 1$, такие что $\mathbf{lQ} \le q\mathbf{l}$ (более точно: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать строку $\mathbf{l}_\varepsilon > 0$ и число q_ε, такое что $\mathbf{l}_\varepsilon\mathbf{Q}_\varepsilon \le q_\varepsilon\mathbf{l}_\varepsilon$ и $\operatorname{spr}\mathbf{Q} \le q_\varepsilon <$) $< \operatorname{spr}\mathbf{Q} + \varepsilon$);

4) неравенства $0 \le \xi \ne 0$ и $\xi \le \mathbf{Q}\xi$ несовместны (или из $0 \le \xi$ и $\xi \le \mathbf{Q}\xi$ вытекает $\xi = 0$.)

К ним еще можно добавить

5) $\operatorname{spr}\mathbf{Q} < 1$;

6) $\mathbf{Q}^k \to 0$ при $k \to \infty$.

Результаты, относящиеся к b-матрицам, являются менее полными.

Теорема 6. *Для неотрицательных матриц $\mathbf{Q}$ эквивалентны следующие свойства:*

1) $\mathbf{Q}$ является b-матрицей;

2) $\|\mathbf{Q}\| = 1$ для некоторой строго монотонной векторной нормы (если $0 \le \xi \le \eta$ и $\xi \ne \eta$, то $\|\xi\| < \|\eta\|$);

3) существует строка $\mathbf{l} > 0$, такая что $\mathbf{lQ} \le \mathbf{l}$ и $\operatorname{spr}\mathbf{Q} = 1$;

4) неравенства $0 \le \xi \ne 0$ и $\xi \le \mathbf{Q}\xi$, $\xi \ne \mathbf{Q}\xi$ несовместны.

Далее, если $\mathbf{Q}$ является b-матрицей, то

5) $\operatorname{spr}\mathbf{Q} = 1$ и каждому собственному значению, по модулю равному единице, отвечают только простые элементарные делители;

6) $\mathbf{Q}^k$ — асимптотически периодическая матричная последовательность.

Последнее свойство означает следующее: степени матрицы $\mathbf{Q}$ допускают представление в виде

$$\mathbf{Q}^k = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{B}_s e^{i\varphi_s k} + \mathbf{R}_k,$$

где отношения $\varphi_s / 2\pi$ есть некоторые рациональные числа, $s = 1,\ldots,N,$ и $\mathbf{R}_k \to 0$ при $k \to \infty$.

В приложениях часто матрица $\mathbf{Q}$ имеет ранг единица, т.е.

$$\mathbf{Q} = (a_i b_j) = \mathbf{ab},$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — ненулевые неотрицательные вектор — столбец и вектор — строка соответственно. Спектр матрицы $\mathbf{Q}$ состоит из числа $\mathbf{ba}$ и нуля (кратности $n-1$, если $\mathbf{ba} \neq 0$). Поэтому

$$\operatorname{spr}\mathbf{Q} = \mathbf{ba} = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = \operatorname{tr}\mathbf{Q}.$$

Мы видим, что $\mathbf{Q}$ будет a-матрицей тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{ba} < 1.$$

Можно показать, что $\mathbf{Q}$ будет b — матрицей тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{ba} = 1 \text{ и из } b_i = 0 \text{ следует } a_i = 0.$$

В частности, $\mathbf{Q}$ будет b — матрицей, если $\mathbf{ba} = 1$ и $\mathbf{b} > 0$.

Покажем, что имеют место следующие формулы, которые полезны при применении теоремы 3. При выводе этих формул неотрицательность компонент векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и даже их вещественность не играют никакой роли.

$$\mathbf{Q}^k = q^{k-1}\mathbf{Q}, \ k = 1,2,\ldots, \tag{39}$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{I} + \frac{1}{1-q}\mathbf{Q}, \tag{40}$$

$$\mathbf{Q}^k(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} = \frac{q^{k-1}}{1-q}\mathbf{Q}, \ k = 1,2,\ldots, \tag{41}$$

где $q = \mathbf{ba}$ и при выводе формул (40) и (41) дополнительно предполагается, что $q \neq 1$.

Имеем

$$\mathbf{Q} = q^0\mathbf{Q},$$

$$\mathbf{Q}^2 = (\mathbf{ab})(\mathbf{ba}) = \mathbf{a}(\mathbf{ba})\mathbf{b} = q(\mathbf{ab}) = q\mathbf{Q}.$$

Проведем шаг математической индукции

$$\mathbf{Q}^k = \mathbf{Q}^{k-1}\mathbf{Q} = (q^{k-2}\mathbf{Q})\mathbf{Q} = q^{k-2}\mathbf{Q}^2 = q^{k-1}\mathbf{Q}$$

и формула (39) установлена.

В силу формулы (39) при $k = 2$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Q})\left(\mathbf{I} + \frac{1}{1-q}\mathbf{Q}\right) =$$
$$= \mathbf{I} + \frac{\mathbf{Q}}{1-q} - \mathbf{Q} - \frac{\mathbf{Q}^2}{1-q} =$$
$$= \mathbf{I} + \frac{\mathbf{Q}}{1-q} - \mathbf{Q} - \frac{q\mathbf{Q}}{1-q} =$$
$$= \frac{\mathbf{I} - q\mathbf{I} + \mathbf{Q} - \mathbf{Q} + q\mathbf{Q} - q\mathbf{Q}}{1-q} = \mathbf{I}$$

и формула (40) проверена.

Далее, в силу (39) и (40) получаем

$$\mathbf{Q}^k(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} = q^{k-1}\mathbf{Q}(\mathbf{I} + \frac{1}{1-q}\mathbf{Q}) =$$
$$= q^{k-1}\mathbf{Q} + \frac{q^{k-1}\mathbf{Q}^2}{1-q} = q^{k-1}\mathbf{Q} + \frac{q^k\mathbf{Q}}{1-q} =$$
$$= \frac{q^{k-1} - q^k + q^k}{1-q}\mathbf{Q} = \frac{q^{k-1}}{1-q}\mathbf{Q}$$

и формула (41) доказана.

Вещественная квадратная $n \times n$ — матрица $\mathbf{M} = (m_{ij})$ называется марковской [1, с. 294], если

$$m_{ij} \geq 0, \ i,j = 1,\ldots,n; \ \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1, \ j = 1,\ldots,n.$$

Марковская матрица всегда является b-матрицей, так как $\mathbf{lM} = \mathbf{l}$, где $\mathbf{l} = (1,\ldots,1)$.

Вещественная квадратная $n \times n$-матрица $\mathbf{S} = (s_{ij})$ называется стохастической [3, с. 381], если

$$s_{ij} \geq 0, \ i,j = 1,\ldots,n; \ \sum_{j=1}^{n} s_{ij} = 1, \ i = 1,\ldots,n$$

(стохастические матрицы получаются из марковских транспонированием). Мы видим, что $\mathbf{Sh} = \mathbf{h}$, где $\mathbf{h} = col(1,\ldots,1)$ и тем не менее матрица $\mathbf{S}$ может оказаться не b — матрицей. Например, стохастическая матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

не является b-матрицей.

В этой статье мы совершенно не касались различных приложений обобщенного принципа сжимающих отображений. Не ставя перед собой цель дать исчерпывающую библиографию по указанному вопросу, отметим лишь книгу [2] и статьи [12], [15] и [16]. В статье [15] дано применение обобщенного принципа сжимающих отображений для получения различных достаточных признаков однозначной разрешимости начальной задачи для дифференциального уравнения n-го порядка. В статье [16] аналогичные вопросы уже изучались для краевой задачи (эта статья полностью нашла отражение в книге [2]). В статье [12] указано приложение принципа и проблема существования периодических решений. Совершенно неожиданно обобщенный принцип сжимающих отображений нашел свое место в проблеме абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман, Р.* Введение в теорию матриц / Р. Беллман. — М.: Наука, 1969. — 368 с.

2. *Бернфельд С.Р. (Bernfeld S.R.)* An introduction to Nonlinear Boundary Value Problems / S. R. Bernfeld, V. Lakshmikantham // Mathematics in science and engineering. — New-York and London, Academic Press, 1974. — V. 109. — 386 p.

3. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1967. — 576 с.

4. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Физматизд, 1959. — 684 с.

5. *Коллатц, Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. — М.: Мир, 1969. — 448 с.

6. *Красносельский, М.А.* Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко. — М.: Наука, 1969. — 456 с.

7. *Красносельский, М.А.* Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М.: Наука, 1975. — 512 с.

8. *Красносельский, М.А.* Позитивные линейные ситсемы / М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев. — М.: Наука, 1985. — 256 с.

9. *Курепа, Г. (Kurepa G.)* . Tableaux ramifies d' ensembles, espaces pseudodistancies. Comptes Rendus 198 (1934), 1563 — 1565.

10. *Ланкастер, П.* Теория матриц / П. Ланкастер. — М.: Наука, 1978. — 280 с.

11. *Мухамадиев, Э.* Принцип неподвижной точки в обобщенном метрическом пространстве / Э. Мухамадиев, В. Я. Стеценко // Известия АН Таджикской ССР, отделение физико-математических и геолого-химических наук. — 4(34). — 1969. — С. 8—19.

12. *Никитин, О.И.* К вопросу о приближенном нахождении периодических решений дифференциальных уравнений / О. И. Никитин, А. И. Перов // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. XIX, № 11. — С. 2001 — 2004.

13. *Ортега Дж.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. — М.: Мир, 1975. — 560 с.

14. *Пароди, М.* Локализация характеристических чисел матриц и ее прменения / М. Пароди. — М.: ИЛ, 1960. — 172 с.

15. *Перов, А.И.* О задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В кн.: Приближенные методы решения дифференциальных уравнений / А.И. Перов. — Киев: Наукова думка, 1964. — Вып. 2. — С. 115—134.

16. *Перов, А.И.* Об одном общем методе исследования краевых задач / А. И. Перов, А. В. Кибенко // Изв. АН СССР, сер. математика. — 1966. — 30, № 2. — С. 249—264.

17. *Треногин, В.А.* Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 496 с.