

УДК 539.186:537

МЕТОД РАСЧЕТА МНОГОФОТОННОЙ ИОНИЗАЦИИ АТОМА ВОДОРОДА ПРИ НАДПОРОГОВЫХ ЧАСТОТАХ

С. И. Мармо

Воронежский государственный университет

Развит метод расчета многофотонной ионизации водородного атома, позволяющий вычислять амплитуду процесса при частотах, в десятки раз превышающих порог ионизации. На примере трехфотонной ионизации исследованы частотная и поляризационная зависимости процесса, в частности, рассмотрен специфический поляризационный эффект *эллиптического дихроизма*, который состоит в зависимости углового распределения фотоэлектронов от знака спиральности фотонов. Проведено сравнение точных результатов с приближениями, используемыми в расчетах многофотонной ионизации водорода.

1. ВВЕДЕНИЕ

Различные аспекты многофотонной ионизации атомов интенсивно исследуются с середины 60-х годов [1]. Первоначально основное внимание в рамках пертурбативных расчетов уделялось рассмотрению ионизации в низшем порядке теории возмущений, когда атомный электрон переходит в непрерывный спектр, поглотив минимально возможное число фотонов лазерной волны: $K = \lceil |E_i|/\hbar\omega + 1 \rceil$, где E_i — энергия связи электрона в начальном состоянии, $\hbar\omega$ — энергия фотона, а квадратные скобки означают взятие целой части. Такой процесс называют *пороговым*. Наряду с ним возможен процесс *надпороговой* ионизации, в котором отрыв электрона от атома происходит за счет поглощения числа фотонов большего, чем K .

Экспериментально надпороговая ионизация впервые наблюдалась в 1979 г. [2], когда при измерении энергетического спектра электронов, образующихся в процессе 6-фотонной ионизации ксенона были обнаружены не только электроны с кинетической энергией $-|E_i| + 6\hbar\omega$, но и электроны с кинетической энергией $-|E_i| + 7\hbar\omega$, что следует интерпретировать как результат ионизации атома $K + 1$ фотоном. В дальнейшем было выполнено много экспериментов, показавших универсальность процесса надпороговой ионизации: для любых атомов и молекул в широком диапазоне частоты излучения на-

ряду с пороговым процессом (поглощение K фотонов) имеет место также и надпороговый процесс (поглощение $K + S$ фотонов). При этом добавочное число фотонов S может достигать нескольких десятков.

В теоретическом отношении наиболее простой — и в то же время наиболее фундаментальной — задачей является исследование многофотонной надпороговой ионизации атома водорода, поскольку в этом случае известно аналитическое решение уравнения Шредингера, и, соответственно, можно существенно продвинуться в аналитических вычислениях амплитуды процесса. Следует отметить, что расчет надпорогового процесса оказывается более сложным, чем порогового. Так, наиболее удобный метод расчета многофотонных процессов, основанный на использовании штурмовского разложения кулоновской функции Грина (КФГ) приводит в надпороговом случае к расходящемуся ряду. Дополнительные проблемы возникают и при использовании других методов расчета НПИ, например, импульсного представления КФГ или интегрирования цепочки неоднородных дифференциальных уравнений. Большинство развитых к настоящему времени методов расчета НПИ эффективны прежде всего для двухфотонной ионизации [3—6] или для процесса только с одним надпороговым фотоном, $S = 1$ [7]. Многофотонная ионизация с $K \geq 3$ и $S \geq 2$ рассматривалась в работах [8, 9], причем использованные в них методы имели суще-

ственно «численный» характер. В [8] НПИ рассчитывалась посредством численного решения системы неоднородных дифференциальных уравнений, а в [9] было использовано разложение волновой функции по системе штурмовских функций со свободным параметром и применялся алгоритм паде-аппроксимации при численном суммировании рядов.

В настоящей работе мы распространяем на задачу о многофотонной НПИ технику расчетов многофотонных процессов со штурмовским разложением КФГ, в которой основная часть вычислительной работы проводится аналитически. Развитый метод основан на предложенном недавно [10] обобщенном штурмовском разложении КФГ с двумя свободными параметрами, позволяющем получить сходящийся ряд для амплитуды НПИ. Например, амплитуда трехфотонной ионизации (three photon ionization, 3PhI) выражается через однократный ряд, который удается вычислить даже при частотах, в десятки раз превышающих пороговую частоту. Другой целью работы является исследование поляризационных эффектов в 3PhI. Использование в современных экспериментах высших (ультрафиолетовых) гармоник лазеров оптического диапазона позволяет, с одной стороны, наблюдать напороговую ионизацию уже при малом числе фотонов, а с другой стороны, легко контролировать поляризацию излучения и исследовать поляризационные эффекты. Наиболее ярким из этих эффектов является эллиптический дихроизм (ЭД) в угловом распределении фотоэлектронов, который возникает в эллиптически поляризованной волне и состоит в зависимости углового распределения электронов от знака степени циркулярной поляризации волны. Существование этого эффекта в многофотонной ионизации тождественными фотонами было предсказано из соображений пространственной и временной симметрии в [11], а в настоящей работе представлены явные аналитические формулы и количественные результаты для ЭД в трехфотонной ионизации. Отметим, что при переходе к режиму надпороговой ионизации открывается новый диссипативный канал перехода в непрерывный спектр, что приводит к дополнитель-

ным членам в «дихроичном» слагаемом. Расчеты ЭД в различных интервалах частот позволяет выяснить количественную зависимость частотных и поляризационных эффектов.

В разделе 2 приведены необходимые общие формулы и получены максимально простые явные выражения для амплитуды и сечения 3PhI с разделенными кинематическими и динамическими параметрами. В разделе 3 развит метод расчета амплитуд многофотонных переходов в непрерывный спектр, основанный на специальном представлении радиальной кулоновской функции Грина. Предложенный метод позволяет получить для амплитуды трехфотонной ионизации однократный ряд, который сходится как при пороговом, так и при надпороговом режиме ионизации. Численные результаты для процесса 3PhI, полученные в рамках нашего подхода изложены в разделе 4. Исследована частотная и поляризационная зависимость сечения и проведено сравнение точных результатов с приближениями, которые могут быть использованы для расчета многофотонной ионизации.

2. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Выпишем здесь общие формулы, определяющие в нерелятивистском дипольном приближении сечение 3PhI атома электромагнитной волной с частотой ω , амплитудой F и вектором поляризации \mathbf{e} . Дифференциальное по направлениям фотоэлектрона сечение 3PhI дается выражением (далее в статье используются атомные единицы)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha F^4 p}{32\pi\omega^5} \frac{1}{2l_i + 1} \sum_{m_i} |M|^2, \quad (1)$$

где

$$M = -\langle \psi_{\mathbf{p}}^{(-)} | (\mathbf{e}\nabla)G(E_0 + 2\omega)(\mathbf{e}\nabla)G(E_0 + \omega)(\mathbf{e}\nabla) | \psi_{n_i l_i m_i} \rangle \quad (2)$$

есть амплитуда трехфотонного перехода из начального состояния $|n_i l_i m_i\rangle$ в состояние непрерывного спектра $\psi_{\mathbf{p}}^{(-)}$ с импульсом \mathbf{p} на бесконечности и асимптотикой сходящихся волн, $G(\mathcal{E})$ — функция Грина атомного электрона, $\alpha \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Волновая функция конечного состояния в (1) нормирована условием

$$\langle \psi_{\mathbf{p}'}^{(-)} | \psi_{\mathbf{p}}^{(-)} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}').$$

Структура исходного выражения (2) для амплитуды упрощается, если начальное состояние сферически-симметрично: $l_i = 0$, $m_i = 0$. В этом случае M является скалярной величиной, которая должна быть образована из векторов задачи \mathbf{e} и \mathbf{p} , причем вектор \mathbf{e} должен входить в M кубично. Это означает, очевидно, что амплитуда содержит следующие поляризационно-угловые комбинации:

$$(\mathbf{e}\mathbf{p})^3 \text{ и } (\mathbf{e}\mathbf{e})(\mathbf{e}\mathbf{p}). \quad (3)$$

Чтобы в явном виде выделить поляризационную зависимость и найти коэффициенты при комбинациях (3), необходимо провести интегрирование по угловым переменным в выражении (2). Стандартное использование методов квантовой теории углового момента [12] позволяет представить M в следующем виде

$$M = \pi \sqrt{\frac{2}{p}} \sum_{Ll} (2L+1)^{-1/2} e^{-i(\frac{\pi}{2}L - \delta_L)} T_{Ll}(\omega) C_{1010}^{L0} C_{1010}^{l0} \Phi_l^L. \quad (4)$$

Обычно говорят, что выражение (4) представляет амплитуду процесса в виде с разделенными динамической и кинематической частями. Зависящая от атомного потенциала и частоты поля динамическая часть выражается через фазы рассеяния на атомном потенциале $\delta_L(p)$ и матричные элементы перехода в непрерывный спектр:

$$T_{Ll}(\omega) = \langle R_{EL} | \hat{D}(L, l) g_l(E_n + 2\omega) \hat{D}(l, 1) g_l(E_n + \omega) \times \times \hat{D}(1, 0) | R_{n0} \rangle, \quad (5)$$

где $g_l(\mathcal{E})$ — радиальная функция Грина, R_{El} — нормированная на энергию радиальная волновая функция непрерывного спектра,

$$\hat{D}(l'_1, l_2) = \frac{d}{dr} + \frac{l(l+1) - l'(l'+1) + 2}{2r}.$$

Кинематическая часть Φ_l^L в (4) есть скалярное произведение неприводимых тензоров ранга L :

$$\Phi_l^L = \sqrt{4\pi} (\{ \{ \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \}_l \otimes \mathbf{e} \}_L \cdot Y_L(\mathbf{n})), \quad (6)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$ — единичный вектор в направлении импульса. Значения индексов суммирования в (4) ограничены дипольными правилами отбора, так что возможны лишь следующие три пары: $l = 0, L = 1$; $l = 2, L = 1$ и $l = 2, L = 3$.

Несмотря на компактную форму, тензорная конструкция (6) неудобна для общего анализа и конкретных расчетов сечения трехфотонной ионизации, поэтому целесообразно выразить Φ_l^L через обычные скалярные произведения векторов \mathbf{e} и \mathbf{n} . Такие выражения для $\Phi_{l=0}^{L=1}$, $\Phi_{l=2}^{L=1}$ легко найти с помощью справочных результатов из [12], а для вычисления $\Phi_{l=2}^{L=3}$ приходится использовать специальные процедуры, предложенные в [13,14]. В результате для кинематической части находим простые выражения:

$$\begin{aligned} \Phi_0^1 &= -(\mathbf{e}\mathbf{e})(\mathbf{e}\mathbf{n}), & \Phi_2^1 &= -\frac{2}{\sqrt{5}} (\mathbf{e}\mathbf{e})(\mathbf{e}\mathbf{n}), \\ \Phi_2^3 &= -\frac{7}{\sqrt{10}} (3(\mathbf{e}\mathbf{e})(\mathbf{e}\mathbf{n}) - 5(\mathbf{e}\mathbf{n})^3). \end{aligned} \quad (7)$$

Окончательно, амплитуду трехфотонной ионизации s -состояния удается представить в следующем, более простом по сравнению с (4) виде, в котором геометрическая часть выражена через скалярные произведения векторов \mathbf{e} и \mathbf{n} (ср. (3))

$$M = \pi \sqrt{\frac{2}{p}} \left\{ (\mathbf{e}\mathbf{e})(\mathbf{e}\mathbf{n}) M_1 + (\mathbf{e}\mathbf{n})^3 M_3 \right\}. \quad (8)$$

Входящие сюда инвариантные (не зависящие от поляризации) атомные параметры M_1 и M_3 следующим образом выражаются через T_{Ll} и $\delta_L(p)$:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{15} (5e^{i\delta_1} T_{01} + 4e^{i\delta_1} T_{21} + 9e^{i\delta_3} T_{23}), \\ M_3 &= e^{i\delta_3} T_{23}. \end{aligned} \quad (9)$$

Расчет дифференциального сечения (1) с амплитудой (8) приводит к следующему выражению

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \alpha F^4 \frac{\pi}{16\omega^5} (A_1 \mathcal{L}^2 |\mathbf{e}\mathbf{n}|^2 + A_2 \mathcal{L} |\mathbf{e}\mathbf{n}|^2 \text{Re}(\mathbf{e}\mathbf{n})^2 \\ &+ A_3 \mathcal{L} |\mathbf{e}\mathbf{n}|^2 \text{Im}(\mathbf{e}\mathbf{n})^2 + A_4 |\mathbf{e}\mathbf{n}|^6), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= |M_1|^2, & A_2 &= 2 \text{Re}(M_1^* M_3), \\ A_3 &= -2 \text{Im}(M_1^* M_3) \propto \text{Im} \left\{ e^{i(\delta_1 - \delta_3)} \left(T_{01} + \frac{4}{5} T_{21} \right) T_{23}^* \right\}, \\ A_4 &= |M_3|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Форма (10) особенно удобна для исследования поляризационной зависимости сече-

ния. Как показывает общий анализ, проведенный в [11], в процессе многофотонной ионизации тождественными фотонами возникает эффект эллиптического дихроизма, то есть зависимость дифференциального сечения от знака степени циркулярной поляризации ξ , которая существует в эллиптически поляризованной волне и исчезает в случае чисто циркулярной поляризации. Из выражения (10) очевидно, что за эффект ЭД отвечает слагаемое с A_3 . Действительно, $\text{Im}(\mathbf{en})^2$ меняет знак при замене $\mathbf{e} \rightleftharpoons \mathbf{e}^*$, а степень линейной поляризации $\mathcal{L} = (\mathbf{ee})$ равна нулю в циркулярном поле.

Рассмотрим более подробно дихроичное слагаемое в (10). Поляризационно-угловой множитель в нем можно выразить через угол θ между вектором \mathbf{n} и единичным вектором в направлении распространения волны $\hat{\mathbf{k}}$ и углы α и β между \mathbf{n} и большой и малой полуосями эллипса поляризации (т.е. $\hat{\mathbf{e}}$ и $[\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}]$), используя тождества [15]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \text{Im}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})^2 &= \xi \mathcal{L} (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}) (\mathbf{n} \cdot [\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}]) = \\ &= \xi \mathcal{L} \cos \alpha \cos \beta, \\ 2|\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}|^2 &= (1 + \mathcal{L}) \cos^2 \alpha + (1 - \mathcal{L}) \cos^2 \beta = \\ &= 2\mathcal{L} \cos^2 \alpha + (1 - \mathcal{L}) \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (12)$$

Как видим, в (12) в явной форме возник поляризационный множитель $\xi \mathcal{L}$, «ответственный» за существование ЭД. Очевидно, фактор $\xi \mathcal{L}$ является максимальным при $\mathcal{L} = |\xi| = 1/\sqrt{2}$ (напомним, что \mathcal{L} и ξ удовлетворяют соотношению $\mathcal{L}^2 + \xi^2 = 1$).

Атомный параметр A_3 в дихроичном члене определяется интерференцией вещественных и мнимых частей M_1 и M_3 . В области частот $\omega < |E_n|/2$ наличие мнимой части у M_1, M_3 обусловлено только фазовыми множителями $e^{i\delta_l}$ (см. (11)), а выше порога двухфотонной ионизации, т.е. при $\omega > |E_n|/2$, мнимая часть появляется также у радиальных матричных элементов T_{ll} .

Интегрируя (10) по углам вылета электрона, найдем полное сечение 3PhI

$$\sigma = \frac{\alpha F^4}{4\omega^5} \pi^2 (\mathcal{L}^2 \Sigma_l + \xi^2 \Sigma_c). \quad (13)$$

Здесь Σ_l, Σ_c — параметры, определяющие полное сечение процесса 3PhI в линейном и циркулярном поле, явные выражения для которых через A_i имеют вид

$$\Sigma_l = \frac{1}{3} A_1 + \frac{1}{5} A_2 + \frac{1}{7} A_4, \quad \Sigma_c = \frac{2}{35} A_4. \quad (14)$$

Как следует из (13), полное сечение 3PhI зависит от степени циркулярной поляризации волны, однако не зависит от знака ξ , то есть эффекта ЭД в полном сечении не возникает. Такое же положение сохраняется для N -фотонной ионизации при $N \geq 2$. Напомним, что в однофотонной ионизации полное сечение вообще не зависит от поляризационных характеристик волны (то есть в однофотонном случае $\Sigma_l = \Sigma_c$).

Если начальное состояние атома не является сферически-симметричным, $l_i \neq 0$, то поляризационная зависимость дифференциального сечения 3PhI усложняется, поскольку амплитуда процесса в этом случае представляет собой неприводимый тензор ранга l_i . Тем не менее, сечение процесса есть скалярная величина, которая может быть выражена через скалярные произведения векторов \mathbf{e}, \mathbf{e}^* и \mathbf{n} . При этом к четырем поляризационно-угловым комбинациям, имеющимся в (11), добавляются еще четыре комбинации:

$$(\mathbf{ee}^*)^3 = 1, \quad |(\mathbf{en})|^2, \quad \mathcal{L} \text{Re}(\mathbf{en})^2, \quad \mathcal{L} \text{Im}(\mathbf{en})^2, \quad (15)$$

последняя из которых является «дихроичной». Таким образом, дифференциальное сечение 3PhI свободно ориентирующегося атома, находящегося в состоянии с орбитальным моментом l_i , определяется восемью инвариантными параметрами, аналогичными A_i в (11). Явные выражения для них через радиальные матричные элементы можно рассчитать аналогично тому, как это сделано выше. Мы не приводим здесь результаты из-за их громоздкости.

3. РАСЧЕТ АМПЛИТУДЫ МНОГОФОТОННЫХ ПЕРЕХОДОВ В НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР

Основной технической проблемой в задачах о многофотонной ионизации является вычисление радиальных матричных элементов перехода в непрерывный спектр. Наиболее часто такие вычисления проводятся с использованием аналитических представлений КФГ. Многолетняя практика показала высокую эффективность использования для численных расчетов представления радиаль-

ной КФГ в виде ряда по функциям Штурма S_{kl} кулоновской задачи [16]:

$$g_l(E; r, r') = v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! S_{kl}(2r/v) S_{kl}(2r'/v)}{\Gamma(k+2l+2)(k+l+1-\eta)}, \quad (16)$$

где

$$S_{kl}(2r/v) = \frac{2}{v} (2r/v)^l \exp(-r/v) L_k^{2l+1}(2r/v), \quad (17)$$

L_n^α — обобщенный полином Лагерра, $v = (-2E - i0)^{-1/2}$, $\eta = Zv$.

Имея в виду явные выражения для кулоновских функций дискретного спектра

$$R_{nl} = \frac{C_{nl}}{(2l+1)!} \rho^l e^{-\rho/2} \Phi(-d+1; 2l+2; \rho),$$

$$C_{nl} = \left[\frac{s!}{2n(d-1)!} \right]^{1/2} \left(\frac{2Z}{n} \right)^{3/2}, \quad (18)$$

$$d = n - l, \quad s = n + l, \quad \rho = 2Zr/n,$$

и непрерывного спектра

$$R_{El} = C_{El} \frac{(2pr)^l}{(2l+1)!} e^{-ipr} \Phi(l+1+ia, 2l+2; 2ipr),$$

$$C_{El} = \sqrt{\frac{2\pi}{p}} e^{\pi a/2} |\Gamma(l+1-ia)|, \quad (19)$$

$$a = Z/p,$$

нетрудно проверить, что расчет T_{ll} (5) с КФГ (16) приводит к двукратному ряду из произведений функций Аппеля F_2 [17] с отрицательным верхним параметром, которые относительно просто могут быть вычислены, например, с использованием рекуррентных соотношений. Штурмовский ряд для матричного элемента быстро сходится при отрицательных значениях энергии функций Грина. Если же энергия хотя бы одной функции Грина становится положительной (надпороговая ионизация), то ряд для матричного элемента расходится.

В настоящей работе для расчета матричного элемента T_{ll} используется полученное в [10] обобщенное штурмовское разложение КФГ, которое представляет собой разложение g_l в двойной ряд по штурмовским функциям

$$g_l(E; r, r') = \sum_{k, k'=0}^{\infty} g_{kk'}^l(v; \alpha, \alpha') S_{kl} \left(\frac{2r}{\alpha} \right) S_{k'l} \left(\frac{2r'}{\alpha'} \right). \quad (20)$$

Параметры α и α' в функциях S_{kl} , $S_{k'l}$ являются свободными (произвольными); их рациональный выбор в соответствии со спецификой конкретной задачи позволяет в ряде случаев кардинально упростить процедуру расчета матричных элементов с $g_l(E; r, r')$. Принципиальным обстоятельством, придающим значительную гибкость в использовании обобщенного штурмовского разложения в различных приложениях, является факторизованная зависимость членов ряда (20) от r , r' и энергетического параметра $v = 1/\sqrt{-2(E+i0)}$. Вся зависимость от энергии E содержится в ядре $g_{kk'}^l(v; \alpha, \alpha')$, которое не зависит от радиальных переменных и выражается через гипергеометрические функции

$$g_{kk'}^l(v; \alpha, \alpha') = f(\alpha, \alpha') \left[\frac{{}_2F_1(-k, l+1-\eta; 2l+2; z)}{l+1-\eta} \times \right. \\ \left. \times F_1(l+1-\eta; -k', k'+2l+2; l+2-\eta; y, y') + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^k C_k^p (-z)^p \frac{{}_2F_1(-k+p, l+1-\eta+p; 2l+2+p; z)}{(2l+2)_p} \Phi_p^{l, k'} \right]. \quad (21)$$

Здесь

$$\Phi_p^{l, k'} = - \frac{(l+2+\eta-p)_{p-1} (1-y)^{k'}}{(1-y')^{k'+2l+2}} \times \\ \times F_1(-p+1; -k', k'+2l+2; l+2+\eta-p; \\ 1/(1-y), 1/(1-y')),$$

$$f(\alpha, \alpha') = \frac{2^{4l+4}}{\Gamma(2l+2)} \frac{1}{v^{2l+1} (\alpha \alpha')^{l+1}} \times \\ \times \frac{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\alpha}\right)^k \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\alpha'}\right)^{k'}}{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{\alpha}\right)^{k+2l+2} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{\alpha'}\right)^{k'+2l+2}}, \quad (22)$$

$$z = - \frac{4\alpha v}{(\alpha - v)^2}, \quad y = \frac{\alpha - v \alpha' + v}{\alpha + v \alpha' - v}, \\ y' = \frac{\alpha - v \alpha' - v}{\alpha + v \alpha' + v},$$

C_k^p — биномиальный коэффициент.

Разложение (20) оказывается весьма удобным при расчетах матричных элементов связанно-связанных переходов. Рассмотрим его применение на примере вычисления матричного элемента двухфотонного перехода между состояниями $|nl\rangle$ и $|n'l'\rangle$

$$M_{ll'}^L(n, n', E) = \langle n'l' | \hat{D}(l', L) g_L(E) \hat{D}(L, l) | nl \rangle, \quad (23)$$

Записав действие операторов \hat{D} на волновые функции (18) в виде

$$\hat{D}(l+1, l) R_{nl}(r) = \frac{2Z^{5/2}}{n^3 [(d)_{2l+1}]^{1/2}} \rho^l e^{-\rho/2} \times \\ \times (L_{d-3}^{2l+3}(\rho) - L_{d-1}^{2l+3}(\rho)), \quad (24)$$

$$\hat{D}(l+1, l+2) R_{nl+2}(r) = \frac{2Z^{5/2}}{n^3 [(d-3)_{2l+5}]^{1/2}} \rho^l e^{-\rho/2} \times \\ \times ((s+1)(s+2) L_{d-3}^{2l+3}(\rho) - (d-1)(d-2) L_{d-1}^{2l+3}(\rho)),$$

и выбрав в функции Грина значения свободных параметров $\alpha = n/Z$, $\alpha' = n'/Z$, сведем вычисление интегралов по переменным r, r' в (23) к непосредственному использованию условия ортогональности полиномов Лагерра

$$\int_0^\infty e^{-\rho} \rho^\beta L_n^\beta(\rho) L_m^\beta(\rho) d\rho = \frac{\Gamma(\beta + n + 1)}{n!} \delta_{mn}. \quad (25)$$

После этого суммы в разложении (6) становятся конечными и $M_{ll'}^L(n, n', E)$ выражаются в виде простой линейной комбинации четырех величин $g_{kk'}^L = g_{kk'}^L(v; n, n')$ — двухфотонные формулы Гордона. Например,

$$M_{ll'}^{l+1}(n, n', E) = -Z \frac{[(d)_{2l+1} (d')_{2l+1}]^{1/2}}{4nn'} \times \\ \times ((d-1)(d-2)(d'-1)(d'-2) g_{d-3, d'-3}^{l+1} - \\ - (s+1)(s+2)(d'-1)(d'-2) g_{d-1, d'-3}^{l+1} - \\ - (d-1)(d-2)(s'+1)(s'+2) g_{d-3, d'-1}^{l+1} + \\ + (s+1)(s+2)(s'+1)(s'+2) g_{d-1, d'-1}^{l+1}), \quad (26)$$

$$M_{ll'}^{l+1}(n, n', E) = -Z \frac{[(d)_{2l+1} (d'-2)_{2l+5}]^{1/2}}{4nn'} \times \\ \times ((d-1)(d-2) g_{d-3, d'-3}^{l+1} - (s+1)(s+2) g_{d-1, d'-3}^{l+1} - \\ - (d-1)(d-2) g_{d-3, d'-1}^{l+1} + (s+1)(s+2) g_{d-1, d'-1}^{l+1}). \quad (27)$$

Выше введены обозначения для разности и суммы n' и l : $d' = n' - l$, $s' = n' + l$.

Обобщение этих результатов на случай, когда одно из состояний принадлежит непрерывному спектру с энергией E , позволяет получить замкнутые аналитические выражения для амплитуды двухфотонной ионизации состояния с произвольными кван-

товыми числами n, l . Использованный выше способ расчета матричных элементов переходов между состояниями дискретного спектра, основанный фактически на соотношении ортогональности для полиномов Лагерра, не может быть перенесен на расчет перехода в континуум, поскольку для функций непрерывного спектра не существует соотношения, аналогичного (25). Однако, как и при обобщении однофотонных формул Гордона на случай фотоионизации, матричные элементы двухфотонных связанно-свободных переходов могут быть получены из матричных элементов переходов в дискретном спектре аналитическим продолжением по переменной n' . А именно, чтобы получить

$$M_{ll'}^L(n, E, \mathcal{E}) = \langle R_{El'} | \hat{D}(l', L) g_L(\mathcal{E}) \hat{D}(L, l) | R_{nl} \rangle \quad (28)$$

из аналитических выражений для (23), необходимо учесть различие в нормировке волновых функций дискретного и непрерывного спектра, заменив

$$C_{nl} \rightarrow i^l C_{El}, \quad (29)$$

и затем сделать замену

$$n' \rightarrow iZ/p, \quad (30)$$

где $p = \sqrt{2E}$.

Следует обратить внимание, что при переходе от $M_{ll'}^L(n, n', \mathcal{E})$ к $M_{ll'}^L(n, E, \mathcal{E})$, мы стремимся из величины, заданной на дискретном множестве переменной (энергии), получить величину, в которой переменная изменяется непрерывно. При этом возникают трудности, связанные с неоднозначностью получающихся выражений. Действительно, при замене (16) МЭ $M_{ll'}^L(n, E, \mathcal{E})$ выражаются через величины $g_{k\beta}^l$, имеющие комплексный нижний индекс β . Соответственно, в $g_{k\beta}^l$ появляются точки ветвления (степени с комплексными показателями в (22)) и для выбора нужной ветви следует привлекать дополнительные соображения. Проще всего определить правильную ветвь, сравнивая полученные при аналитическом продолжении выражение $M_{ll'}^L(n, E, \mathcal{E})$ для частных значений начального и конечного состояний с результатами независимого расчета двухфотонных переходов в непрерывный спектр. Например, хорошо известны способы расчета, позволяющие выразить матричные элементы переходов $1s - Es, 1s - Ed$ в виде функций Аппеля F_1 [18, 19]:

$$\begin{aligned}
M_{00}^1(n=1, E, \mathcal{E}) &= -i \frac{aC_{E0}}{Z^{1/2}} \times \\
&\times ((1-ia)(2-ia)F(0) - (1+ia)(2+ia)F(2)), \\
M_{02}^1(n=1, E, \mathcal{E}) &= i \frac{aC_{E2}}{Z^{1/2}} (F(0) - F(2)), \\
F(m) &= \frac{2^5}{2-\eta} \frac{Z^2 p^2}{v^3} \left(\frac{1}{v} + Z \right)^{-4} \frac{(\frac{1}{v} + ip)^{ia-3+m}}{(\frac{1}{v} - ip)^{ia+1+m}} \times \\
&\times F_1(2-\eta; -ia+3-m, ia+1+m, 3-\eta; y, y'), \\
y &= \frac{1-\eta}{1+\eta} \frac{ia+\eta}{ia-\eta}, \quad y' = \frac{1-\eta}{1+\eta} \frac{ia-\eta}{ia+\eta}.
\end{aligned} \quad (31)$$

Чтобы получить эти выражения из формул (26), (27) при аналитическом продолжении, следует просто положить в последних $n=1$, $l=0$, $l'=0, 2$ и провести замены (29), (30). Это означает, что выражение (22) (в отличие от (13) в [21]) записано в такой форме, что при непосредственной замене $k' \rightarrow \beta$ получается нужный результат.

Несмотря на частный характер формул (31), с помощью которых было установлено правило аналитического продолжения, оно должно быть справедливо для любых двухфотонных переходов, поскольку функциональный множитель $f(\alpha, \alpha')$ из (8) в существенной части является одинаковым для всех матричных элементов $M_{ll'}^L(n, E, \mathcal{E})$. Этот вывод подтверждается также вычислением низкочастотного предела $\omega' \rightarrow 0$ для надпорогового перехода $E_n + \omega + \omega' = E$. Действительно, исходя из общего выражения для амплитуды двухфотонной надпороговой ионизации, можно установить, что в этом случае

$$\begin{aligned}
\langle E = \mathcal{E} + \omega', l' \hat{D}(l', L) g_L(\mathcal{E}) \hat{D}(L, l) | El \rangle &= \\
= i^{l'-L+1} e^{i(\delta_L - \delta_{l'})} \frac{p}{\omega'} \langle \mathcal{E} L | \hat{D}(L, l) | El \rangle &\quad (32)
\end{aligned}$$

(см. аналогичное вычисление в [21] для перехода в непрерывном спектре). Вычисление предела $\omega' \rightarrow 0$ в формулах Гордона также приводит к выражению (32). Заметим, что (32) соответствует низкоэнергетической теореме в квантовой электродинамике [20], § 98.

Обратимся теперь к расчету амплитуды трехфотонных переходов в непрерывный спектр. Матричный элемент

$$\begin{aligned}
M_{ll'}^{l_1 l_2}(n, n', \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) &= \\
= \langle n'l' | \hat{D}(l', l_2) g_{l_2}(\mathcal{E}_2, \alpha_2) \hat{D}(l_2, l_1) g_{l_1}(\mathcal{E}_1, \alpha_1) \hat{D}(l_1, l) | nl \rangle &\quad (33)
\end{aligned}$$

уже невозможно представить в замкнутом аналитическом виде, однако с помощью обобщенного штурмовского разложения (20) удастся значительно упростить окончательное выражение. Непосредственная подстановка (20) в (33) приводит к четырехкратному ряду для $M_{ll'}^{l_1 l_2}$, однако при следующем выборе свободных параметров

$$\alpha_2 = n/Z, \quad \alpha'_2 = \alpha_1 \quad \alpha'_1 = n/Z, \quad (34)$$

три ряда из четырех удастся оборвать вследствие возникающей ортогональности полиномов Лагерра (25).

Действительно, по-прежнему записывая результат действия операторов \hat{D} на радиальные функции $R_{nl}, R_{n'l'}$ в форме (24) и представляя в аналогичной форме $\hat{D}(l', l) S_{kl}(2Zr/n)$ (штурмовская функция S_{kl} имеет такую же зависимость от координаты, как R_{nl}), приведем все интегралы в (33) к виду (25). В результате матричный элемент $M_{ll'}^{l_1 l_2}(n, n', \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ сводится к линейной комбинации 8 однократных рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k g_{a-m_2, k}(v_2, i/p, \alpha) g_{k, n-m_1}(v_1, \alpha, n/Z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad (35)$$

m_1, m_2 — целые числа. Проводя теперь аналитическое продолжение $M_{ll'}^{l_1 l_2}(n, n', \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ по энергии конечного состояния в соответствии с формулами (29), (30), выразим через однократные ряды также и матричные элементы трехфотонных связанно-свободных переходов.

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением трехфотонной ионизации из основного состояния, поэтому приведем здесь для примера явное выражение для матричного элемента $T_{23} \equiv M_{l=0, l'=3}^{l_1=1, l_2=2}(n=1, E, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. При действии оператора $D(l_1=1, l=0)$ на волновую функцию основного состояния (как и на любую функцию с $n-l-1=0$), согласно (24), получается одно слагаемое, поэтому окончательное выражение для матричного элемента содержит четыре однократных ряда

$$S_{m_1, m_2} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+3)!}{k!} g_{a-m_1, k}(v_2; i/p, \alpha) g_{k+m_2, 0}(v_1; \alpha, 1/Z) \quad (36)$$

и имеет достаточно компактный общий вид:

$$\begin{aligned}
M_{l=0, l'=3}^{l_1=1, l_2=2}(n=1, E, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) &= -\frac{3ia}{16Z^2} C_{El} C_{nl} \times \\
&\times [(a-1)(a-2)(S_{3,0} - S_{3,2}) - (a+1)(a+2)(S_{1,0} - S_{1,2})]. &\quad (37)
\end{aligned}$$

Таким образом, матричные элементы 3PhI выражаются через однократные ряды, в которых остался один свободный параметр α . Заметим, что стандартная штурмовская КФГ приводит к двойным рядам, которые расходятся при $\mathcal{E}_{1,2} > 0$. Исследование сходимости рядов (36), проведенное в приложении показывает, что выбором α удастся обеспечить сходимость ряда для амплитуды трехфотонной ионизации, в том числе и тех случаях, когда промежуточная энергия \mathcal{E}_1 (или энергии \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2) лежит в непрерывном спектре.

Остановимся также на возможности применения предложенного метода для расчета N -фотонной ионизации с $N > 3$. В этом случае КФГ со свободными параметрами (20) позволяет представить амплитуду процесса в виде ряда кратности $N - 2$. Анализ, аналогичный проведенному выше, показывает, что выбором свободных параметров можно обеспечить сходимость рядов при любом N , хотя условия сходимости и становятся более жесткими. Однако количество таких рядов быстро растет с увеличением N (их может иметься 2^{N-2} для каждого радиального матричного элемента), что заметно увеличивает объем вычислений.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

После того, как сходимость рядов (36) достигнута, основной задачей при нахождении матричных элементов T_{ll} является расчет гипергеометрических функций ${}_2F_1$ и F_1 , входящих в $g_{\beta k}^l$. Для функций Гаусса ${}_2F_1$ существуют стандартные компьютерные программы, а функции Аппеля F_1 в каждой из характерных областей частот удастся рассчитать с помощью разложения в ряд по ${}_2F_1$ или с помощью интегрального представления [17].

Качественно зависимость матричных элементов (5) от частоты характеризуется наличием резонансов первого порядка в области частот $\omega \leq |E_0|$, имеющих точки сгущения при приближении к порогам двухфотонной ($\omega = |E_0|/2$) и однофотонной ($\omega = |E_0|$) ионизации. В области $\omega < |E_0|/2$ матричные элементы вещественны, а при превышении частотой порогового значения $\omega = |E_0|/2$ у них появляется мнимая часть. При частотах $|E_0|/2 < \omega < |E_0|$ мнимую часть можно вычислить независимо

$$\begin{aligned} & \text{Im } M_{ll'}^{hb}(n, E, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \\ & = \pi \langle E'l' | D(l', l_2) | \mathcal{E}_2 l_2 \rangle \langle \mathcal{E}_2 l_2 | D(l_2, l_1) g_{l_1}(\mathcal{E}_1) D(l_1, l) | nl \rangle, \end{aligned} \quad (38)$$

что использовалось для проверки правильности вычислений. На порогах ионизации матричные элементы остаются конечными в соответствии с общими свойствами пороговых эффектов в кулоновском поле, при этом при переходе через порог их характерные значения уменьшаются на один-два порядка. За порогом однофотонной ионизации, $\omega > |E_0|$, матричные элементы монотонно убывают по величине.

Нетрудно получить асимптотическую оценку амплитуды трехфотонной ионизации в области высоких частот $\omega \gg |E_0|$. Заменяя в (2) функцию конечного состояния и функцию Грина на свободные

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) \rightarrow e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad G_E \rightarrow G_E^{(0)} = 1/(\hat{H}_0 - E)$$

и принимая во внимание, что плоская волна является собственной функцией операторов ∇ и \hat{H}_0 , приходим к

$$M^{hf} = -i \frac{2\sqrt{6}\pi}{3\omega^{5/2}} (\mathbf{en})^3. \quad (39)$$

Высокочастотное выражение для амплитуды (39) приводит к следующим результатам для дифференциального и полного сечений 3PhI :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{hf}}{d\Omega} &= \frac{\alpha F^4}{2\sqrt{6}\omega^{19/2}} |(\mathbf{en})|^6, \\ \sigma^{hf} &= \alpha F^4 \frac{2\pi}{35\sqrt{6}\omega^{19/2}} (5\mathcal{L}^2 + 2\xi^2). \end{aligned} \quad (40)$$

Заметим, что выражения (40) можно найти, вычисляя высокочастотные асимптотики радиальных матричных элементов аналогично работе [21]:

$$T_{01}^{hf} = T_{21}^{hf} = -T_{23}^{hf} = \frac{2}{\sqrt{3\pi}\omega^{5/2}}. \quad (41)$$

Учитывая, что при $\omega \rightarrow \infty$ фазовые множители обращаются в единицу, $e^{\delta_l(p)} \rightarrow 1$, снова приходим к (40).

Численные значения радиальных матричных элементов, входящих в (9), в области между порогами двух- и однофотонной ионизации представлены на рис. 1. Приведенные результаты показывают, что наи-

большим по величине является матричный элемент T_{23} , в котором изменение энергии и орбитального момента происходят «в одну сторону». Это соответствует известному правилу Бете для однофотонных переходов в дискретном спектре [22]. Напомним, однако, что согласно (41) с увеличением частоты абсолютные величины T_{01} , T_{21} и T_{23} сближаются. В указанной области частот, $|E_0|/2 < \omega < |E_0|$, матричные элементы $M_{ll'}^{l_2 l_1}$ могут быть аппроксимированы упрощенной формулой

$$M_{ll'}^{l_2 l_1} = -\frac{p}{\omega} (-1)^{(l'-l_2-1)/2} \cos[\delta_{l'}(p) - \delta_{l_2}(p)] \times \langle E_0 + 3\omega, l_2 | \hat{D}(l_2, l_1) g_{l_1}(E_0 + \omega) \hat{D}(l_1, l) | nl \rangle + i\pi \langle E_0 + 3\omega, l' | \hat{D}(l', l_2) | E_0 + 2\omega, l_2 \rangle \times \langle E_0 + 2\omega, l_2 | \hat{D}(l_2, l_1) g_{l_1}(E_0 + \omega) \hat{D}(l_1, l) | nl \rangle. \quad (42)$$

Выражение (42) получено при учете вклада только от δ -образных сингулярностей в матричном элементе первого порядка $\langle E_0 + 3\omega, l' | \hat{D}(l', l_2) | \tilde{E}_2 l_2 \rangle$, который входит в составной матричный элемент трехфотонной ионизации для $M_{ll'}^{l_2 l_1}$, и аналогично приближению Короля [23] (см. также [21]) для амплитуд свободно-свободных переходов. Как видно из рис. 1, приближение (42) оказывается вполне удовлетворительным именно для матричных элементов T_{21}, T_{23} .

В таблице представлены данные для полного сечения ЗРФИ в линейном и циркулярном за порогом однофотонной ионизации. Мы

Таблица

Отношение полного сечения ЗРФИ, рассчитанного в высокочастотном (40) и в квазиклассическом приближении (43), к точному результату (13) за порогом однофотонной ионизации

$\omega/ E_0 $	σ^{bf}/σ		σ^{qcl}/σ	
	$\mathcal{L}=1, \zeta=0$	$\mathcal{L}=0, \zeta=1$	$\mathcal{L}=1, \zeta=0$	$\mathcal{L}=0, \zeta=1$
1.1	3.49(0)	1.24(0)	8.44(-1)	1.24(0)
1.2	3.39(0)	1.28(0)	8.10(-1)	1.27(0)
1.5	3.13(0)	1.38(0)	7.20(-1)	1.31(0)
2.0	2.80(0)	1.46(0)	6.13(-1)	1.33(0)
5.0	2.02(0)	1.51(0)	3.81(-1)	1.18(0)
10.0	1.68(0)	1.44(0)	2.82(-1)	1.00(0)
15.0	1.54(0)	1.39(0)	2.41(-1)	9.00(-1)
20.0	1.46(0)	1.35(0)	2.18(-1)	8.33(-1)
25.0	1.40(0)	1.32(0)	2.02(-1)	7.85(-1)
50.0	1.08(0)	1.08(0)	9.46(-2)	3.90(-1)

проводим сравнение точных результатов с высокочастотной асимптотикой (39), а также с квазиклассическим приближением [24]. Согласно последнему, за порогом однофотонной ионизации полное сечение ЗРФИ дается следующим простым выражением

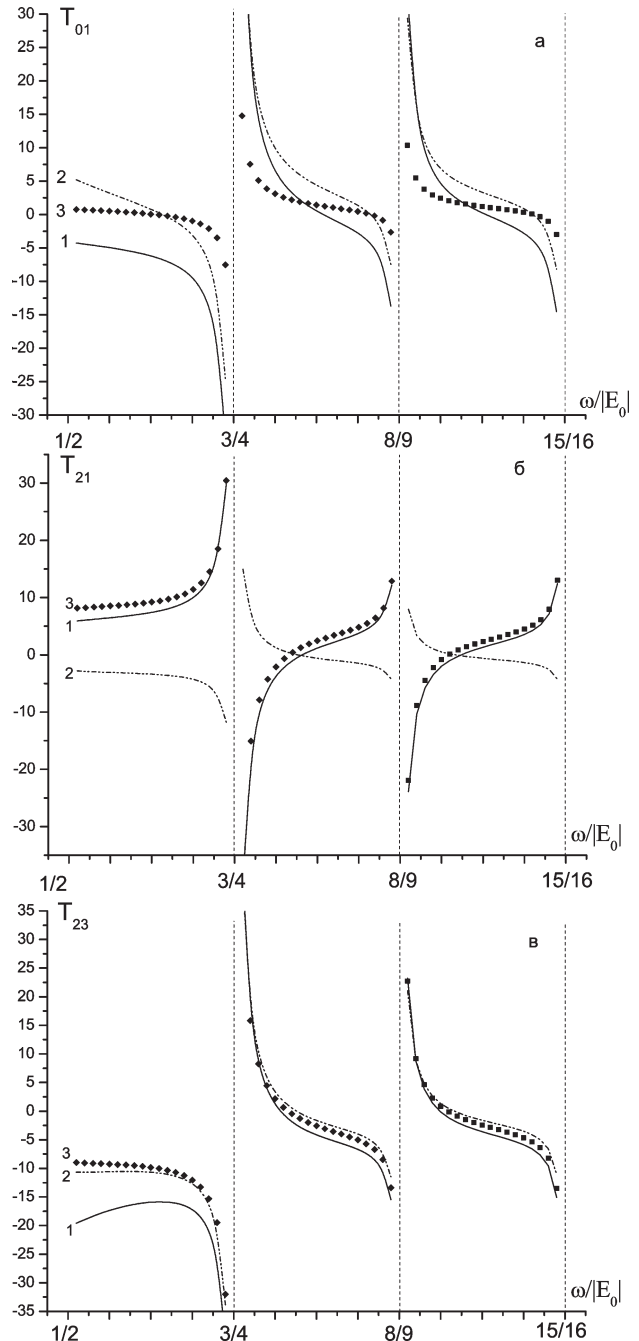


Рис. 1. Частотная зависимость матричных элементов трехфотонной ионизации основного состояния T_{ll} между порогом двух- и однофотонной ионизации. Тонкими вертикальными линиями обозначены резонансы на $2p$ и $3p$ -состояниях. Сплошной линией показана $Re T_{ll}$, штриховой — $Im T_{ll}$, ромбами — $Re T_{ll}$ в приближении (42)

$$\sigma^{qcl} = \frac{\alpha F^4}{36\omega^{29/3}} T^{l,c}, \quad (43)$$

где $T^l = 2.891$, $T^c = 4.785$. Представленные данные показывают, что за порогом однофотонной ионизации элементарная формула (39) завышает величину полного сечения, но вполне удовлетворительно передает его частотную и поляризационную зависимости. Квазиклассическое выражение (43) имеет меньшую точность, однако по самому смыслу квазиклассического приближения, как и в случае двухфотонной ионизации [24, 25] при переходе к возбужденным начальным

состояниям следует ожидать значительно лучшего согласия квазиклассического и точного результатов.

На рисунках 2, 3, 4 представлены графики зависимостей дифференциального сечения $d\sigma/d\Omega$ и степени эллиптического дихроизма

$$R(\theta, \varphi) = \frac{\frac{d\sigma^+}{d\Omega} - \frac{d\sigma^-}{d\Omega}}{\frac{d\sigma^+}{d\Omega} + \frac{d\sigma^-}{d\Omega}} \quad (44)$$

от угла вылета фотоэлектронов в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{k} ($\theta = \pi/2$), относительно оси эллипса поляризации ионизирующей волны для трех характерных значений частот: $\omega = 0.2$, $\omega = 0.4$, $\omega = 0.75$ ат. ед. Сплошные линии описывают угловое распределение фотоэлектронов при правой эллиптической поляризации ионизирующего излучения ($\xi = 1/\sqrt{2}$), пунктирные — при

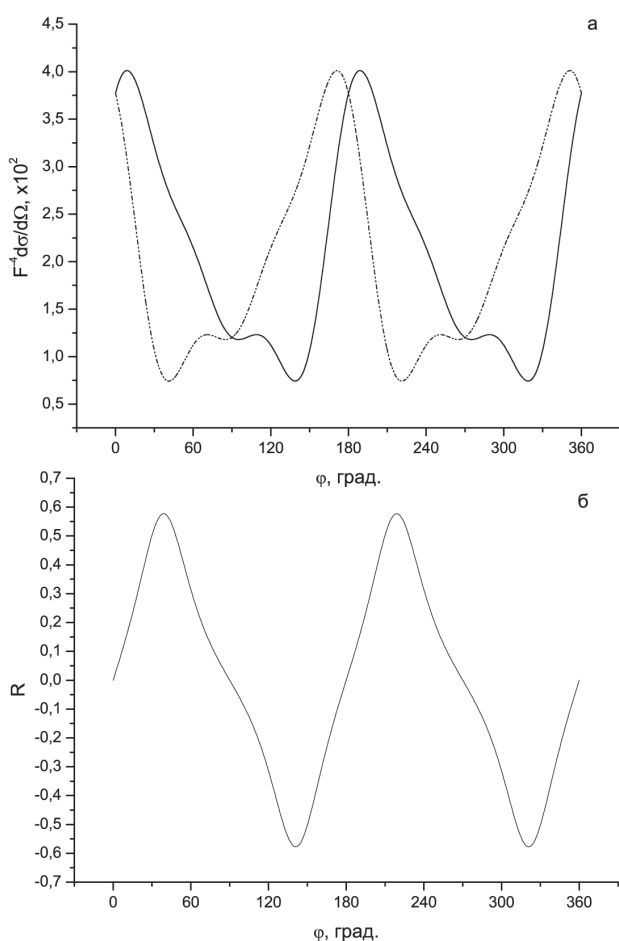


Рис. 2. Зависимость дифференциального сечения (а) и степени эллиптического дихроизма R (б) трехфотонной ионизации атома водорода от угла вылета фотоэлектронов в плоскости, перпендикулярной волновому вектору \mathbf{k} ($\theta = \pi/2$), при частоте ионизирующей волны $\omega = 0.2$ (пороговый режим ионизации). На рис. а) сплошная линия соответствует угловому распределению фотоэлектронов при правой эллиптической поляризации ионизирующего излучения, пунктирная — при левой поляризации

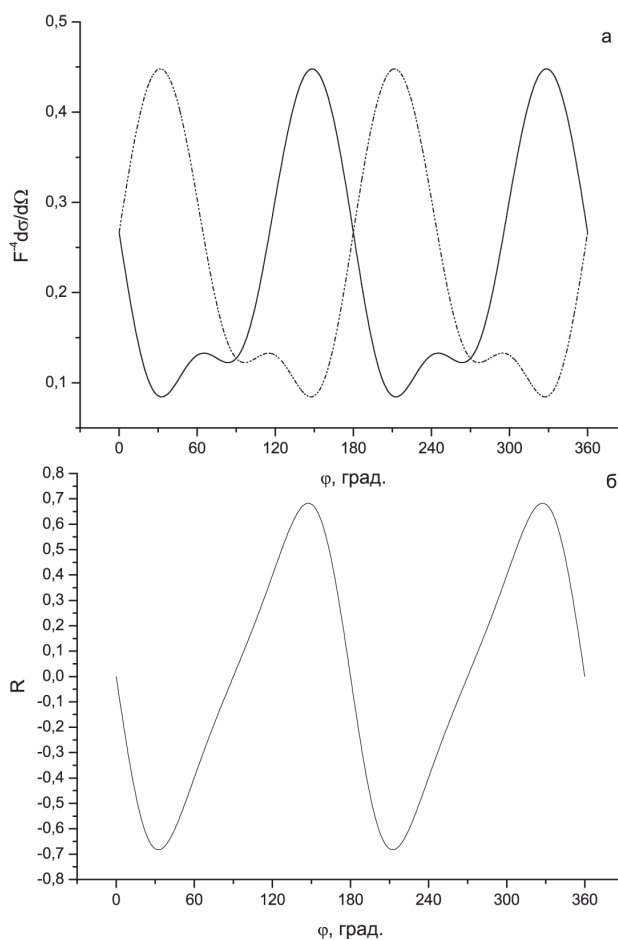


Рис. 3. То же, что на рис. 2 для частоты $\omega = 0.4$ (между порогами двух- и однофотонной ионизации)

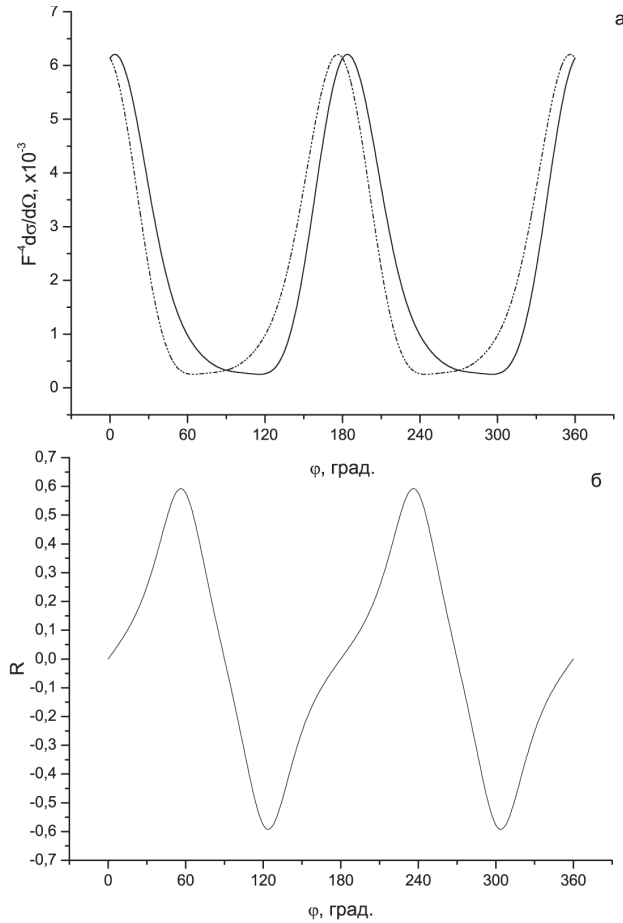


Рис. 4. То же, что на рис. 3 для частоты $\omega = 0.75$ (над порогом однофотонной ионизации)

левой поляризации ($\xi = -1/\sqrt{2}$). Как видно из рисунков, максимальное число фотоэлектронов вылетает вдоль оси эллипса поляризации электромагнитного излучения. Однако, степень дихроизма (4.8) достигает максимального значения при углах, лежащих в окрестности направлений вылета, поперечных этой оси. Очевидно, для экспериментального наблюдения дихроизма следовало бы выбирать значения углов, для которых достаточно велики и степень дихроизма, и величина дифференциального сечения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Исследование сходимости рядов (36) сводится к нахождению асимптотики величин $g_{\beta k}^l(\nu; \alpha, \gamma)$ (индекс β в которых в общем случае комплексный) при $k \rightarrow \infty$. Для этого удобно из (20) с помощью представления Хостлера для КФГ [16] выразить $g_{\beta k}^l$ в виде интеграла (ср. [21], приложение Б):

$$g_{\beta k}^l(\nu; \gamma, \alpha) = f(\gamma, \alpha) \int_0^1 dt \frac{t^{l-Z\nu} A^\beta B^k}{C^{\beta+k+2l+2}} \times {}_2F_1(-\beta, -k; 2l+2; \lambda). \quad (\text{A.1})$$

Здесь использованы обозначения

$$A = 1 - t/y, \quad B = 1 - yt, \quad C = 1 - y't, \\ y = \frac{(\gamma - \nu)(\alpha + \nu)}{(\gamma + \nu)(\alpha - \nu)}, \quad y' = \frac{(\gamma - \nu)(\alpha - \nu)}{(\gamma + \nu)(\alpha + \nu)}, \quad (\text{A.2}) \\ \lambda = \frac{16\alpha\alpha'\nu^2}{(\alpha^2 - \nu^2)(\alpha'^2 - \nu^2)} \frac{t}{AB},$$

а $f(\gamma, \alpha)$ определяется выражением (22). Подставив в (A.1) асимптотику ${}_2F_1$ при $k \rightarrow \infty$ [26] (обратим внимание, что в справочниках [17, 27] для нее приведено неверное выражение)

$${}_2F_1(-\beta, -k; 2l+2; \lambda) \sim \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(2l+2+\beta)} (k\lambda)^\beta + \\ + \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(-\beta)} \left(\frac{\lambda-1}{k\lambda} \right)^{2l+2+\beta} (1-\lambda)^k, \quad (\text{A.3})$$

получим интеграл с быстроменяющейся функцией (дробно-линейное выражение в степени k), которая достигает максимального по модулю значения на одном из краев интервала интегрирования. Рассмотрим сначала интеграл, возникающий из первого члена в (A.3)

$$\int_0^1 dt t^{l-\eta} \frac{(1-t/y)^\beta}{(1-y't)^{\beta+2l+2}} (k\lambda)^\beta \left(\frac{1-yt}{1-y't} \right)^k. \quad (\text{A.4})$$

Учтем вклад от конечных точек по методу Лапласа (поскольку в зависимости от значения свободного параметра максимум может достигаться или при $t=0$, или $t=1$, то следует принимать во внимание обе точки). Рассматривая нижний предел, положим $t=0$ везде, кроме степени t и быстроменяющейся функции, и заменим

$$\left(\frac{1-yt}{1-y't} \right)^k = \exp \left(k \ln \left(\frac{1-yt}{1-y't} \right) \right) \rightarrow e^{-(y-y')kt}$$

(эти функции имеют одинаковое поведение при малых t и больших k). Далее элементарно находим, что вклад в асимптотику от нижнего предела имеет порядок $k^{-l+\eta-1}$. Де-

лая в (А.4) замену переменной $t \rightarrow 1 - t$, аналогичным образом найдем, что вклад в интеграл от точки $t = 1$ имеет величину

$$k^{\beta-1} \left(\frac{1-y}{1-y'} \right)^k = k^{\beta-1} \left(\frac{\alpha+v}{\alpha-v} \right)^k \left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+\gamma} \right)^k.$$

Найдем теперь вклад в асимптотику интеграла из (А.1) второго слагаемого в (А.3). Заметив, что

$$1 - \lambda = \frac{(1-y't)(1-t/y')}{(1-yt)(1-t/y)},$$

и действуя так же, как выше, установим, что вклад точки $t = 0$ такой же, как в первом случае, а вклад точки $t = 1$ имеет порядок

$$k^{-\beta-2l-3} \left(\frac{\alpha+v}{\alpha-v} \right)^k \left(\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma} \right)^k.$$

Принимая во внимание, что при больших k

$$f(\gamma, \alpha) \sim \left(\frac{\alpha-v}{\alpha+v} \right)^k$$

и объединяя все результаты, находим асимптотику $g_{\beta k}^l$ при $k \rightarrow \infty$

$$g_{\beta k}^l(v; \gamma, \alpha) \sim C_1 k^{-l+\eta-1} \left(\frac{\alpha-v}{\alpha+v} \right)^k + C_2 k^{\beta-1} \left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+\gamma} \right)^k + C_3 k^{-\beta-2l-3} \left(\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma} \right)^k. \quad (A.5)$$

Здесь C_1, C_2, C_3 не зависят от k , причем $C_3 \sim 1/\Gamma(-\beta)$, поэтому при целом положительном β (т.е. для g_{kk}^l) последний член в асимптотике исчезает. Теперь понятно, что k -й член ряда в (36) имеет вид

$$m_k \sim \left[C_1 k^{a_1} \left(\frac{\alpha-v_2}{\alpha+v_2} \right)^k + C_2 k^{a_2} \left(\frac{\alpha-i/p}{\alpha+i/p} \right)^k + C_3 k^{a_3} \left(\frac{\alpha+i/p}{\alpha-i/p} \right)^k \right] \times \left[C_1' k^{a_1'} \left(\frac{\alpha-v_1}{\alpha+v_1} \right)^k + C_2' k^{a_2'} \left(\frac{\alpha-n}{\alpha+n} \right)^k \right] = \sum_{j=1}^6 C_j'' k^{b_j} q_j^k. \quad (A.6)$$

Показатели степеней a_i, a_i' можно найти,

учитывая, что $\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} \sim k^{a-b}$ при $k \rightarrow \infty$, но

в любом случае ряд будет сходиться, если все $|q_j| < 1$. Если энергия первой функции Грина отрицательна (v_1 — вещественная величина), то ряд сходится при любых $\alpha > 0$. Если же v_1 — мнимая величина, то при вещественном α ряд расходится, но выбором свободного параметра можно достичь сходимости и в этом случае. Если взять α таким, что $\text{Re} \alpha > 0$ и $\text{Im} \alpha > 0$, то надо обеспечить только выполнение неравенств

$$\left| \left(\frac{\alpha+i/p}{\alpha-i/p} \right) \left(\frac{\alpha-v_1}{\alpha+v_1} \right) \right| < 1, \quad (A.7)$$

$$\left| \left(\frac{\alpha+i/p}{\alpha-i/p} \right) \left(\frac{\alpha-n}{\alpha+n} \right) \right| < 1,$$

а остальные $|q_j| < 1$ при любых α из первой четверти. Нетрудно проверить, что действительно существуют α , при которых условие (1) выполняется. Можно даже обеспечить выполнение более жестких (и легко интерпретируемых геометрически) условий

$$\left| \frac{\alpha-v_1}{\alpha-i/p} \right| < 1, \quad \left| \frac{\alpha-n}{\alpha-i/p} \right| < 1, \quad (A.8)$$

и

$$\left| \frac{\alpha+i/p}{\alpha+v_1} \right| < 1, \quad \left| \frac{\alpha+i/p}{\alpha+n} \right| < 1. \quad (A.9)$$

В наших расчетах параметр α выбирался путем численного поиска минимума функции $f(\alpha) = \max\{q_1, q_2, \dots, q_6\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Нелинейная ионизация атомов лазерным излучением. М.: Физматлит, 2001.
2. Agostini P., Fabre F., Manfray G. Phys. Rev. Lett. 1127 (1979).
3. Karule E. J. Phys. B, 441 (1978).
4. Klarsfeld S., Maquet A. Phys. Lett. A, 41, (1980); Klarsfeld S., Maquet A. J. Phys. B, L553 (1980).
5. Fainshtein A.G., Manakov N.L., Marmo S.I. Phys. Lett. A, 347 (1984).
6. Shakeshaft R. J. Phys. B, L611 (1986).
7. Karule E. J. Phys. B, 1997 (1988).
8. Gontier Y., Rahman N.K., Trahin M. Phys. Rev. A, 1112 (1986); Europhys. Lett., 595 (1988).
9. Potvliege R.M., Shakeshaft R. Phys. Rev. A, 1545 (1989).
10. Крыловецкий А.А., Манакон Н.Л., Мармо С.И. ЖЭТФ, 45 (2001).

11. *Manakov N.L.* Super-Intense Laser + Atom Processes (Proceedings of SILAP IV-Conference, 1995), (Kluwer: Amsterdam), P. 59.
12. *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука. 1975.
13. *Manakov N.L., Marmo S.I., Meremianin A.V.* J. Phys. B, 2711 (1996).
14. *Манаков Н.Л., Меремьянин А.В.* ЖЭТФ, 1984 (1997).
15. *Manakov N.L., Maquet A., Marmo S.I., Veniard V., Ferrante G.* J. Phys. B, 3747 (1999).
16. *Рапопорт Л.П., Зон Б.А., Манаков Н.Л.* Теория многофотонных процессов в атомах. М.: Атомиздат, 1978.
17. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, М.: Наука, 1973. Т. 1.
18. *Рапопорт Л.П., Зон Б.А., Манаков Н.Л.* ЖЭТФ, 400 (1969).
19. *Klarsfeld S.* Lett. Nuovo Cim., 682 (1969).
20. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
21. *Крыловецкий А.А., Манаков Н.Л., Мармо С.И., Старас А.Ф.* ЖЭТФ, 1168 (2002).
22. *Бете Г., Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: Физматгиз, 1960.
23. *Korol A.V.* J. Phys. B, 3873 (1995).
24. *Берсон И.* ЖЭТФ, 1276 (1982).
25. *Fainshtein A.G., Manakov N.L., Marmo S.I.* Phys. Lett. A, 347 (1984).
26. *Манаков Н.Л., Мармо С.И., Файнштейн А.Г.* ТМФ, 49 (1984).
27. *Справочник по специальным функциям.* Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979.