УДК 517.988

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ТРЕУГОЛЬНЫХ НОРМ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ НОРМИРОВАНИЯ

Т. М. Леденева

Воронежский государственный университет

Целенаправленный подход к формированию различных нечетких операторов, использующихся для представления семантических связок, стал возможным благодаря введению треугольных норм (T-норм и S-конорм). В статье предложен подход для получения новых параметрических нечетких операторов, относящихся к этому классу, с помощью функций нормирования специального вида, а также определена соответствующая операция отрицания в виде отрицания Суджено.

ВВЕДЕНИЕ

К нечетким операторам, наиболее часто цитируемым в литературе и широко используемым в приложениях, относятся следующие:

$$F(x,y)=\min(x,y),\ \ G(x,y)=\max(x,y);$$

$$F_m(x,y)=\max(x+y-1,0),$$

$$G_m(x,y)=\min(x+y,1);$$

$$F_p(x,y)=xy,\ \ G_p(x,y)=x+y-xy$$

Эти операторы обобщаются в классе треугольных норм и конорм, причем операции конъюнкции (пересечения нечетких множеств) F, F_m, F_p определяются через T-нормы, а дизъюнкции (объединения) G, G_m, G_p — через S-нормы [1].

Треугольная T-норма — коммутативная, ассоциативная, монотонная операция $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, причем $T(0,0)=0$, $T(1,x)=x$.

Ее конорма (S-норма) $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ обладает теми же свойствами, но ограниченность задается в виде $S(1,1)=1$, $S(0,x)=x$.

Заметим, что T-нормы и S-нормы связаны законом де Моргана, так что

$$N(S(x,y))=T(N(x),N(y)),$$

где $N(x)$ — функция сильного отрицания.

Отрицание $N(x)$ определяется как отображение $N:[0,1]\to[0,1]$, такое что $N(x)$ — строго убывающая функция и $N(0)=1$, $N(1)=0$.

$N(x)$ называется сильным отрицанием, если $N(N(x))=x$. Сильное отрицание иначе называется инволюцией. Наиболее часто используется стандартная операция сильного отрицания $N(x)=1-x$. Другим примером отрицания является отрицание Суджено

$$N_c(x)=\frac{1-x}{1+cx}.$$

Заметим, что для моделирования логических связок *и*, *или*, *не* необходимо ввести такие операции, которые в определенной мере были бы согласованными между собой. Законы де Моргана — один из принципов такого согласования. Под парой двойственных операций, подразумевается пара (F,G), где F — конъюнкция (пересечение нечетких подмножеств), G — дизъюнкция (объединение), при этом выполняется равенство

$$N(G(x,y))=F(N(x),\ N(y)),$$

где $N(x)$ — операция сильного отрицания. Следует заметить, что для пары (F,G) в общем случае может существовать несколько сильных отрицаний.

Другими представителями треугольных норм являются

$$F_0(x,y)=\frac{xy}{x+y-xy},\ \ F_0(0,0)=0;$$

$$G_{-1}(x,y)=\frac{x+y-2xy}{1-xy},\ \ G_{-1}(1,1)=1;$$

$$F_\alpha(x,y)=\frac{xy}{\alpha+(1-\alpha)(x+y-xy)};$$

$$G_\beta(x,y)=\frac{(\beta-1)xy+x+y}{1+\beta xy}.$$

Здесь F_0, F_α — конъюнкции; G_{-1}, G_β — дизъюнкции.

Целью статьи является представление результатов, касающихся обобщения нечетких операторов, относящихся к классу треугольных норм, на основе функций нормирования специального вида. Для двойственных параметрических нечетких операторов определена функция отрицания в виде отрицания Суджено.

1. ФУНКЦИИ НОРМИРОВАНИЯ НА [0,1] И ИХ СВОЙСТВА

Рассмотрим линейное преобразование, при котором область значений $[x_{\min}, x_{\max}]$ некоторого ограниченного действительного отображения переводится в [0,1]. Естественно, что существует множество функций, реализующих такой переход. Так,

$$t(x_{\min}, x, x_{\max}) = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$$

определяет нормированное значение величины $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$. Если $[x_{\min}, x_{\max}] \subseteq [0,1]$, то $t(x_{\min}, x, x_{\max})$ определяет две функции нормирования следующего вида:

а) при $0 < x < y$

$$t(0, x, y) = \frac{x}{y}$$

соответствует нормированному значению $x \in [0, y]$;

б) при $y < x < 1$

$$t(y, x, 1) = \frac{x - y}{1 - y}$$

соответствует нормированному значению $x \in [y, 1]$.

В дальнейших рассуждениях примем обозначения

$$x \oslash y = t(0, x, y) = \frac{x}{y}; \quad x \ominus = t(y, x, 1) == \frac{x - y}{1 - y}.$$

Операцию $\ominus$ будем называть нормированной разностью, замкнутые интервалы $[0,y]$, $[y,1]$ — интервалами нормирования. Как легко заметить, обратной операцией для $\oslash$ является обычное произведение, в то время как для $\ominus$ — алгебраическая сумма $\oplus$. В самом деле, если $y < x < 1$ и $x \ominus y = z$, то $x = z + y - xy = z \oplus y$. Как известно, $\{\oplus, \cdot\} = \{G_p, F_p\}$ на [0,1] образуют пару двойственных операций относительно $N(x) = 1 - x$.

Можно показать, что некоторые нечеткие операции представимы с помощью операций нормирования $t(0,x,y)$ и $t(x,y,1)$, и такое представление имеет вид [2]:

$$F_0(x, y) = \frac{xy}{x + y - xy} = \frac{xy}{x \oplus y} = t(0, xy, x \oplus y);$$

$$G_{-1}(x, y) = \frac{x + y - 2xy}{1 - xy} = \frac{(x \oplus y) - xy}{1 - xy} = t(xy, x \oplus y, 1);$$

$$F_\alpha(x, y) = \frac{xy}{\alpha + (1 - \alpha)(x + y - xy)} = \frac{xy}{\alpha \oplus (x \oplus y)} = t(0, xy, \alpha \oplus (x \oplus y)) \quad (\alpha > 0);$$

$$G_\beta(x, y) = \frac{(\beta - 1)xy + x + y}{1 + \beta xy} = \frac{(x \oplus y) + \beta xy}{1 + \beta xy} = t(-\beta xy, x \oplus y, 1) \quad (\beta > -1).$$

Таким образом, $F_0(x,y)$ и $F_a(x,y)$, моделирующие конъюнкцию (или пересечение нечетких множеств), представляют собой нормированное значение произведения xy на $[0, x \oplus y]$ или на интервале нормирования с расширенной правой границей $[0, a \oplus (x \oplus y)]$ при $\alpha > 0$. $G_{-1}(x,y)$ и $G_\beta(x, y)$, моделирующие дизъюнкцию (или объединение нечетких множеств), представляют собой нормированное значение алгебраической суммы $x \oplus y$ на интервале нормирования $[xy,1]$ или на интервале нормирования с расширенной левой границей $[-\beta xy, 1]$ при $\beta > -1$.

Учитывая, что треугольные T-нормы моделируют конъюнкцию, S-нормы — дизъюнкцию, причем $T(x, y) \le S(x, y)$, положим

$$T'(x, y) = \frac{T(x, y)}{S(x, y)}; \; S'(x, y) = \frac{S(x, y) - T(x, y)}{1 - T(x, y)}.$$

Примеры некоторых новых операций, полученных на основе такого подхода, приведены ниже.

$$T_1'(x, y) = t(0, F_p(x, y), G_{-1}(x, y)) = \frac{xy(1 - xy)}{x \oplus y - xy}, ,$$

$$T_2'(x, y) = t(0, F_0(x, y), G_\beta(x, y)) = \frac{xy(1 + \beta xy)}{(x \oplus y)((\beta - 1)xy + x + y)},$$

$$S_1'(x, y) = t(F_p(x, y), G_{-1}(x, y), 1) = \frac{x \oplus y - xy}{1 - xy},$$

$$S_2'(x, y) = t(F_p(x, y), G_\beta(x, y), 1) = \frac{x \oplus y - xy(1 - \beta + \beta xy)}{(1 + \beta xy)(1 - xy)}.$$

Рассмотрим некоторые свойства нормированной разности $\ominus$.

1) $x \ominus 0 = x, 0 \ominus x = \dfrac{x}{x-1}$.

Из первого соотношения следует, что 0 является правым нейтральным элементом для операции $\ominus$, однако, левого нейтрального элемента не существует. Обозначим

$$0 \ominus x = \frac{x}{x-1} = \eta(x).$$

Так как $0 \ominus x = \eta(x)$, то $x \oplus \eta(x) = 0$. С другой стороны, $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$, то есть 0 является нейтральным элементом для операции $\oplus$, поэтому $\eta(x)$ определяет обратный элемент для x.

Рассмотрим свойства функции $\eta(x)$.

а) $\eta(x)$ — убывающая, взаимно-однозначная функция, действующая из [0,1] в $[-1, \infty)$.

б) $\eta(x)$ удовлетворяет определению функции сильного отрицания, то есть $\eta(\eta(x)) = \eta^{-1}(\eta(x)) = x$.

в) Неподвижными точками $\eta(x)$ являются $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ $(x_2 \in [0,1])$.

г) Рекуррентное соотношение

$$\eta_{k+1}(x) = \eta_k^{-1}(\eta_k(0) - \eta_k(x)), \eta_1(x) = \eta(x) = \frac{x}{x-1}$$

при различных значениях k (k >1) определяет функции

$$\eta_{k+1}(x) = \frac{x}{2kx-1},$$

обладающие теми же свойствами, что и $\eta(x)$: $\eta_{k+1}(x)$ — убывающая функция; $\eta_{k+1}(x) = \eta_{k+1}^{-1}(x)$; $\eta_{k+1}(\eta_{k+1}(x)) = x$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1/k$ $(k \geq 1)$ являются неподвижными точками $\eta_{k+1}(x)$ на [0,1].

2) С помощью функции $\eta(x)$ можно установить ряд важных соотношений для операций $\ominus$ и $\oplus$

$$\eta(x \oplus y) = \eta(x) \oplus \eta(y),$$

$$\eta(x \ominus y) = \eta(x) \ominus \eta(y),$$

$$x \ominus \eta(y) = x \oplus y,$$

$$x \ominus y = \eta(y) \ominus \eta(x),$$

$$y \ominus x = (y \ominus z) \oplus (z \ominus x).$$

Первые два свойства свидетельствуют о том, что операции $\oplus$ и $\ominus$ инвариантны относительно η. Следующее определяет представление коммутативной и ассоциативной операции $\oplus$ через нормированную разность $\ominus$, которая таковой не является. Нормированная разность $\ominus$ на [0,1] не удовлетворяет свойству коммутативности — четвертое равенство будем называть η-коммутативностью. Последнее соотношение позволяет представить нормированную разность $y \ominus x$ $(x < y)$ через любое значение $z \in (x, y)$.

3) Операция $\ominus$ не является ассоциативной в обычном смысле, то есть

$$x \ominus (y \ominus z) \neq (x \ominus y) \ominus z,$$

однако имеет место следующее соотношение

$$x \ominus (y \ominus z) = z \ominus (y \ominus x).$$

Можно показать, что

$$z \oplus ((x \ominus y) \ominus z) = \eta(z) \oplus (x \ominus (y \ominus z)).$$

Величины z и $\eta(x)$ в этом случае будем называть ассоциаторами, так как добавление этих величин позволяет «уравнять» значения выражений $(x \ominus y) \ominus z$ и $x \ominus (y \ominus z)$. Использование ассоциаторов в приложениях обеспечивает свойство одноуровневости агрегируемых оценок.

2. ОБОБЩЕННЫЕ ОПЕРАЦИИ $\oplus$ И $\ominus$

Пусть

$$\tau(x, y) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 y}{b_0 + b_1 x + b_2 y}.$$

Найдем все такие функции $\tau(x, y)$, которые представляют нормированную разность $\ominus$ и удовлетворяют соотношению

$$x \ominus (y \ominus z) = z \ominus (y \ominus x).$$

Подставляя $\tau(x, y)$ в определенном выше виде в данное соотношение, а затем, приравнивая после соответствующих преобразований коэффициенты при одинаковых степенях x и y в левой и правой частях полученного выражения, получим следующую систему уравнений для коэффициентов

$$\begin{cases} a_0 b_2 = 0, \\ a_2 b_2 = 0, \\ a_2^2 + a_0 b_1 = b_0 a_2, \\ a_1 b_1 + b_0 b_1 = b_0 b_2. \end{cases}$$

Анализ системы позволяет выделить следующие варианты коэффициентов функции $\tau(x, y)$ [3]

1) $b_0 = -a_1$, $b_1 = -(a_1^2 + a_1 a_2) / a_0$, $a_0, a_1 \neq 0$, a_2 — любое, тогда

$$\tau_1(x,y) = -\frac{a_0}{a_1}\cdot\frac{a_0 + a_1x + a_2y}{a_1a_0 + (a_1 + a_2)x};$$

2) $b_0 = a_1^2 / a_2,\ \ b_1 = 0,\ \ b_2 = 0;\ a_0$ — любое, $a_1, a_2 \neq 0$.

$$\tau_2(x,y) = \frac{a_0a_2}{a_1^2} + \frac{a_2}{a_1}x + \frac{a_2^2}{a_1^2}y.$$

В частном случае при $a_0 = 0,\ b_2 = 0$ из системы можно найти, что $a_2 = -a_1,\ b_0 = -a_1$, тогда

$$\tau_3(x,y) = \frac{a_1(y-x)}{a_1 - b_1x}.$$

При $a_1 = b_1 = 1$ получим нормированную разность $t(x,y,1)$.

Выясним теперь, какой операции $\oplus$ соответствует $\tau_1(x,y)$. Обозначим $k_1 = \dfrac{a_1}{a_0}$, $k_2 = \dfrac{a_2}{a_0}$, тогда

$$z = y \ominus x = -\frac{1 + k_1x + k_2y}{1 + (k_1 + k_2)x}\cdot\frac{1}{k_1}.$$

Отсюда $y = x \oplus z$ получается из равенства

$$-\frac{1}{k_2}\left(k_1z + k_1(k_1+k_2)xz + 1 + k_1x\right) = x \oplus z = y.$$

Если вместо k_1 и k_2 ввести параметры $\alpha = -\dfrac{k_1}{k_2},\ \ \beta = -\dfrac{k_1(1+k_1)}{k_2}$, то полученное выше равенство для y может быть представлено в виде

$$\alpha + \beta y = (\alpha + \beta x)(\alpha + \beta z)$$

или для операции $\oplus$ имеет место выражение

$$\alpha(x+y) + \beta xz + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta} = x \oplus z = y.$$

При $\alpha = 1,\ \beta = -1$ получим известную операцию алгебраической суммы. Из линейного представления нормированной разности в виде $\tau_2(x,y)$ получены две оставшиеся полиномиальные формы «сложения»:

$$y = const,\ \ y = x + z.$$

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ НЕЧЕТКИЕ ОПЕРАТОРЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ НОРМИРОВАННОЙ РАЗНОСТИ

Рассмотрим функцию нормирования $\tau_3(x,y) = \dfrac{a_1(y-x)}{a_1 - b_1x}$ и, положив $\dfrac{a_1}{b_1} = \lambda$, перейдем к обобщенной нормированной разности вида

$$R^\lambda(x,y) = \frac{y-x}{1-\lambda xy}.$$

Можно показать, что в этом случае алгебраическая сумма имеет следующее представление:

$$G^\lambda(x,y) = x + y - \lambda xy.$$

Считая, что $N(x) = 1 - x$ и выполняются законы де Моргана, можно определить обобщенное алгебраическое произведение

$$F^\lambda(x,y) = (1-\lambda)(x+y-1) + \lambda xy.$$

От него можно перейти к обобщенному делению

$$D^\lambda(x,y) = \frac{x - (1-\lambda)y + (1-\lambda)}{(1-\lambda) + \lambda y}.$$

При $\lambda = 1$ обобщенные операции превращаются в известные, так что

$$G^1(x,y) = x \oplus y;\ \ F^1(x,y) = xy;$$

$$R^1(x,y) = y \ominus x;\ \ D^1(x,y) = \frac{x}{y}.$$

Рассмотрим $G^\lambda(x,y) = x + y - \lambda xy$ при $\lambda > 0$. Анализ поверхностей, соответствующих $G^\lambda(x,y)$ при различных значениях λ, и их сопоставление со свойствами основных булевых функций, позволяет сделать следующие выводы:

1. При $\lambda \in [0,1]$ функция $G^\lambda(x,y)$ выступает в роли дизъюнкции в виде

$$G_*^\lambda(x,y) = \min(1, x + y - \lambda xy).$$

При $\lambda = 0$ получим $G_m(x,y)$, при $\lambda = 1$ — $G_p(x,y)$.

2. При $\lambda \in (1,2)$ операция не может быть идентифицирована как нечеткая логическая операция, поскольку ее значения в вершинах единичного куба не совпадают со значениями четких логических операций, что необходимо для соблюдения принципа соответствия.

3. $G^\lambda(x,y)$ при $\lambda = 2$ и $G_{**}^\lambda(x,y) = \max(0, x + y - \lambda xy)$ при $\lambda \in (2,\infty)$ по определению соответствуют нечеткой операции сложения по модулю два или нечеткой функции неравнозначности, неравноценности. С помощью такой функции можно оценивать степень несходства объектов заданного множества.

Аналогичное исследование было проведено для $F^{\lambda}(x,y)$:

1. При $\lambda = 0$ с помощью проектирования из $F^{\lambda}(x,y)$ получается $F_m(x,y)$. При $\lambda \in (0,1)$ целесообразно перейти к операции

$$F_*^{\lambda}(x,y) = \max(0,(1-\lambda)(x+y-1)+\lambda xy),$$

поверхность которой лежит внутри единичного куба, а операция соответствует конъюнкции. При $\lambda = 1$ получим, что $F^{\lambda}(x,y)$ совпадает с $G_p(x,y)$.

2. При $\lambda \in (1,2]$ поверхность $F^{\lambda}(x,y)$ лежит внутри единичного куба, но только при $\lambda = 2$ ее можно рассматривать как нечеткую логическую операцию — $F^2(x,y)$ является функцией равноценности или эквиваленцией. С помощью такой операции можно задать отношение сходства на некотором множестве объектов.

3. При $\lambda > 2$ необходимо перейти к операции вида

$$F_{**}^{\lambda}(x,y) = \min(1,(1-\lambda)(x+y-1)+\lambda xy).$$

Сравнение свойств $F_{**}^{t}(x,y)$ со свойствами булевых функций позволяет идентифицировать эту операцию как эквиваленцию.

Рассматривая операции $G^{\lambda}(x,y)$ и $F^{\lambda}(x,y)$ в качестве базовых, найдем обобщенные операции для $G_{-1}(x,y)$, $G_{\beta}(x,y)$, $F_0(x,y)$, $F_{\alpha}(x,y)$, учитывая способ представления этих операций через функцию нормирования на различных интервалах нормирования. Так, в определение $G_{-1}(x,y) = (x \oplus y) \ominus xy$ входят операции $\oplus$ и $\ominus$, тогда аналогичная операция $G_{-1}^{\lambda}(x,y)$ представляется через обобщенную алгебраическую сумму и обобщенную нормированную разность и такое представление имеет вид

$$G_{-1}^{\lambda}(x,y) = \frac{(1-\lambda)+\lambda(x+y)-2\lambda xy}{\big(1+\lambda(1-\lambda)\big)-\lambda(1-\lambda)(x+y)-\lambda^2 xy}.$$

При $\lambda = 1$ получим $G_{-1}(x,y)$.

Пусть

$$A_1 = (1-\lambda)^2 + (1-\lambda),$$
$$A_2 = 1+\lambda\left[(1-\lambda)^2+(1-\lambda)\right],$$
$$B_1 = 1-\beta(1-\lambda)+(1-\lambda)^2,$$
$$B_2 = -\lambda\left[(1-\lambda)^2(\beta-1)-\lambda\beta(1-\lambda)\right],$$
$$C_1 = -\left[\lambda\beta(1-\lambda)+\lambda^2(1-\beta)\right],$$
$$C_2 = -\lambda\left[\lambda(1-\lambda)(\beta-1)-\lambda^2\beta\right].$$

тогда

$$G_{\beta}^{\lambda}(x,y) = \frac{A_1 + B_1(x+y)+C_1xy}{A_2+B_2(x+y)+C_2xy}.$$

При $\lambda = 1$ получим $G_{\beta}(x,y)$.

Для следующих двух операций $F_o^{\lambda}(x,y)$ и $F_{\alpha}^{\lambda}(x,y)$ использовалось обобщенное деление, и полученные результаты имеют вид

$$F_0^{\lambda}(x,y) = \frac{(2\lambda-\lambda^2)xy}{(1-\lambda)+\lambda(x+y)-\lambda^2xy};$$

$$F_{\alpha}^{\lambda}(x,y) = $$
$$= \frac{-(1-\lambda)\alpha+(1-\lambda)\lambda\alpha(x+y)+\lambda xy}{(1-\lambda+\lambda\alpha)+\lambda(1-\lambda\alpha)(x+y)-\lambda^2(1-\lambda\alpha)xy}.$$

При $\lambda = 1$ получим соответственно $F_0(x,y)$ и $F_{\alpha}(x,y)$.

4. ОТРИЦАНИЕ СУДЖЕНО

T-норма называется *архимедовой*, если она непрерывна и $T(x,x) < x$ для всех $x \in (0,1)$. Известно [1], что T-норма является *архимедовой* тогда и только тогда, когда существует непрерывная, строго убывающая функция $f:[0,1] \to (0,\infty)$, $f(1) = 0$, такая что

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x)+f(y)),$$

где f^{-1} — псевдообратная функция для f, такая что

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0, & f(0) \le x, \\ f^{-1}(x), & 0 \le x \le f(0). \end{cases}$$

Функция f называется *аддитивным генератором* T и определена с точностью до положительной мультипликативной константы.

Архимедова T-норма с аддитивным генератором f называется *строгой*, если $f(0) = +\infty$ и *нестрогой* иначе. Если T строгая, то она строго возрастает в любой области $\Omega \subseteq (0,1)^2$. Если T нестрогая, то можно определить множество $Z_T = \{(x,y) \in (0,1)^2 \,/\, T(x,y) = 0\}$. Известно, что

$$(x,y) \in Z_T \Leftrightarrow y \le f^{-1}\big(f(0)-f(x)\big).$$

Пусть $T(x,y)$ нестрогая архимедова T-норма с аддитивным генератором $f(x)$, тогда $N_T(x) = f^{-1}\big(f(0)-f(x)\big)$ сильное отрицание, ассоциированное с нормой $T(x,y)$. Заметим, что $T(x,y) = 0$, если $y < N_T(x)$ [4]. В классе отрицаний, задаваемых в общем виде $N(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, существует единственное отрицание Суджено вида $N_c(x) = \dfrac{1-x}{1+cx}$ $(c > -1)$.

Рассмотрим функциональное уравнение

$$x(y-1)f(x) + y(1-x)f(y) = (y-x)f(x)f(y) \quad (1)$$

с неизвестной функцией $f:[0,1] \to [0,1]$.

Можно заметить, что функции $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ являются решениями этого уравнения.

Утверждение 1. Единственное решение уравнение (1) на $(0,1)$ — это отрицание Суджено.

В самом деле, подстановкой $f(x) = \dfrac{1-x}{1+cx}$ $(c > -1)$ в функциональное уравнение можно убедится, что отрицание Суджено является его решением. Теперь предположим, что $f:[0,1] \to [0,1]$ и существует единственная точка $s \in [0,1]$, в которой $f(s) = s$. Подставляя $y = s$ в (1), получим

$$(s-1)xf(x) + (1-x)s^2 = (s-x)f(x) \quad (x \in (0,1)).$$

Тогда

$$f(x) = \frac{(1-x)s^2}{s^2 + ((1-2s)x} = \frac{1-x}{1 + \dfrac{1-2s}{s^2}x},$$

где $\dfrac{1-2s}{s^2} > -1$.

Следствие 1. Если $N(x)$ сильное отрицание, такое что

$$x(y-1)N(x) + y(1-x)N(y) = (y-x)N(x)N(y) \quad (2)$$

для всех x, y таких что $y \ge N(x)$, то $N(x)$ является отрицанием Суджено.

Пусть $N(x) = v$, $N(y) = u$ в (2), тогда для всех u, v таких, что $u \le N(v)$

$$N(u)(N(v)-1)u + N(v)(1-N(u))v =$$
$$= (N(v) - n(U))uv.$$

С помощью несложных вычислений получим, что

$$u(v-1)N(u) + v(1-u)N(v) = (v-u)N(u)N(v)$$

для всех u, v таких, что $v \le N(u)$. Так как получено уравнение, совпадающее с (1), то его решением является отрицание Суджено.

Рассмотрим семейство нестрогих архимедовых T-норм, задаваемых в виде

$$T_\lambda(x,y) = F_*^\lambda(x,y) =$$
$$= \max(0, \lambda xy + (1-\lambda)(x+y-1)).$$

Сильное отрицание, ассоциированное с $T_\lambda(x,y)$, имеет вид

$$N_\lambda(x) = \frac{1-x}{1 + \dfrac{\lambda}{1-\lambda}x},$$

т.е. является отрицанием Суджено с константой $c = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$.

Зафиксируем $y \in [0,1]$ и будем рассматривать

$$T_\lambda^y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le N_\lambda(y), \\ (\lambda y + (1-\lambda)) - (1-\lambda)(1-y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что для всех $\lambda > 0$ $T_\lambda^y(x)$ представляет собой прямую на $[N_\lambda(y), 1]$.

Утверждение 2. Пусть $T(x,y)$ нестрогая архимедова T-норма, $N(x)$ — ассоциированная с ней функция сильного отрицания. Предположим, что для всех $y \in [0,1]$ T^y представляет собой прямую на $[N(y), 1]$, тогда существует $\lambda > 0$ такое, что $T = T_\lambda$.

В самом деле, в рамках предположения имеем для каждого $y \in [0,1]$

$$T(x,y) = T^y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le N(y), \\ \dfrac{yx - yN(y)}{1-N(y)}, & x > N(y). \end{cases}$$

С другой стороны, так как $T(x,y)$ коммутативна, то $T^y(x) = T(x,y) = T(y,x) = T^x(y)$ для всех $x, y \in [0,1]$. Тогда получим для всех x, y таких, что $y \ge N(x)$

$$\frac{yx - yN(y)}{1-N(y)} = \frac{xy - xN(x)}{1-N(x)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(y-1)N(x) + y(1-x)N(Y) = (y-x)N(x)N(y).$$

В соответствии со следствием $N(x) = \dfrac{1-x}{1+cx}$. С помощью простых вычислений получим $T(x,y) = \max(0, \lambda xy + (1-\lambda)(x+y-1))$, где $\lambda = \dfrac{c}{1+c}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Klement E., Mesiar R., Pap E.* Triangular norms. Position paper II: general construction and parameterized families // Fuzzy Set and Systems. — № 145, 2004. — P. 411—438.

2. *Леденева Т.М.* Некоторые аспекты представления нечетких операторов отношением двух многочленов // Известия ВУЗов. Математика. - №11(426), 1997. — С. 33—40.

3. *Леденева Т.М., Руссман И.Б.* Алгебраические свойства нормированной разности // Оптимизация и моделирование в автоматизированных системах. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 1998. — С. 67—73.

4. *Mayor G.* Sugeno's negations and *t*-norms // Mathware & Soft Computing. — № 1, 1994. — P. 93—98.