

УДК 533.12

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В СЖИМАЕМОМ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. В. Кривоченко, А. Н. Спорыхин, А. С. Чеботарёв

Воронежский государственный университет

В настоящей работе представлено определение полей напряжений и перемещений, для сжимаемого упрочняющегося упруго-вязко-пластического пространства, ослабленного сферической полостью, при динамических нагрузках.

Задачи подобного рода возникают как при определении поля напряжений, деформаций и перемещений в горных массивах со сферическими полостями, так и при исследовании устойчивости задач подобного рода, в которых данные решения используются для определения докритического состояния при $t \rightarrow \infty$.

Отличие от аналогичных публикаций состоит в том, что при расчете полей напряжений и перемещений учитывалась как ассоциированная, так и не ассоциированная сжимаемость, что позволило полнее описать физико-механические свойства материала, а также влияние времени на изменение внутреннего радиуса сферической полости.

В работах [1, 2] рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния бесконечного пространства, ослабленного сферической полостью, при постоянных давлениях бесконечной длительности, на внутреннем контуре полости и на бесконечности. При этом свойства среды в пластической области описывались моделью упруго-вязкопластического тела.

В настоящей работе дано решение аналогичной задачи, когда нагрузки на внутреннем контуре полости и на бесконечности — динамические, при этом также учтены ассоциированная и неассоциированная сжимаемость среды [3, 4].

Рассмотрим бесконечное пространство, ослабленное сферической полостью радиуса a . К внутренней поверхности полости приложено динамическая нагрузка интенсивности p , а на бесконечности приложена динамическая нагрузка P (рис. 1). При этом P и p изменяются с течением времени по закону

$$\begin{aligned} P &= P^{(0)} + \sum_{k=1}^n P^{(k)} e^{\omega_k t + \gamma_k}, \\ p &= p^{(0)} + \sum_{k=1}^n p^{(k)} e^{\omega_k t + \gamma_k}. \end{aligned} \quad (*)$$

Здесь $P^{(k)}$, $p^{(k)}$ ($k=0, \dots, n$) — постоянные давления бесконечной длительности, ω_k , γ_k — известные константы, причем $\omega_k < 0$.

© Кривоченко А. В., Спорыхин А. Н., Чеботарёв А. С., 2005.

Пусть при силовом воздействии $p(t)$ вокруг отверстия образуется зона повышенных напряжений, достигающая определенной величины. Очевидно, в этом случае, материал в окрестности отверстия перейдет в пластическое состояние, зона которой с течением времени будет увеличиваться.

Решение осесимметричной задачи, об определении полей напряжений и перемещений проведем в сферической системе координат.

Для определения напряженно-деформированного состояния в упругой ($V^{(e)}$) и соответственно в пластической области ($V^{(p)}$) привлекаем:

– Уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (1.1)$$

– Соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i). \quad (1.2)$$

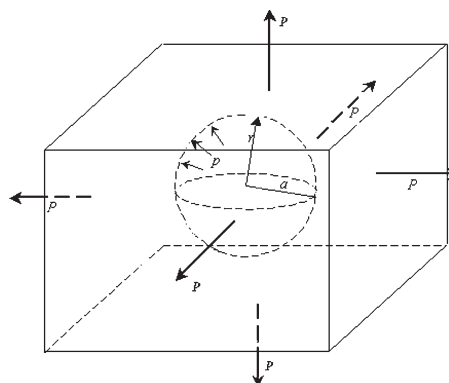


Рис. 1

– Закон Гука

$$\sigma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} + \lambda_0 \varepsilon_{kk} g_{ij}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (1.3)$$

здесь λ, μ — параметры Ламе, g_{ij} — компоненты метрического тензора.

– Соотношения для полных деформаций в пластической области,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e. \quad (1.4)$$

– Функция нагружения для сжимаемого упрочняющегося упруго-вязкопластического тела, [2]

$$F = \alpha \sigma_1 + \sqrt{(S_{ij} - c_0 e_{ij}^p - \eta_0 \dot{e}_{ij}^p)(S_{ij} - c_0 e_{ij}^p - \eta_0 \dot{e}_{ij}^p) - K_0}, \quad (1.5)$$

где α — скорость дилатансии, S_{ij}, e_{ij}^p — девиаторы тензоров напряжений и пластических деформаций, σ_1 — первый инвариант тензора напряжений.

– Ассоциированный закон пластического течения

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial t} = \xi \left(\frac{\alpha}{3} g_{ij} + \frac{S_{ij} - c_0 e_{ij}^p - \eta_0 \dot{e}_{ij}^p}{k_0 - \alpha \sigma_1} \right) + \psi(\sigma_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} g_{ij}, \quad (1.6)$$

$\psi(\sigma_1) = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1}$; φ — функция объемного нагружения. В дальнейшем полагаем $\psi \equiv \text{const}$.

В соотношениях (1.1)—(1.6) величины имеющие размерность напряжений отнесены к модулю сдвига μ , а имеющие размерность длины отнесены к радиусу упруго-пластической границы и им приписан нуль внизу.

Уравнения для определения напряженно-деформированного состояния в $V^{(e)}$ области, согласно (1.1)—(1.6), запишутся так:

– Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \sigma_\theta - \sigma_\varphi = 0. \quad (1.7)$$

– Соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} u. \quad (1.8)$$

– Закон Гука

$$\sigma_r = 2\varepsilon_r + \lambda_0 \varepsilon_{kk}, \quad \sigma_\theta = 2\varepsilon_\theta + \lambda_0 \varepsilon_{kk}. \quad (1.9)$$

Из соотношений (1.9), учитывая (1.8) выводим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (2 + \lambda_0) \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{\lambda_0}{r} u, \\ \sigma_\theta &= (2 + \lambda_0) \frac{u}{r} + \lambda_0 \frac{\partial u}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в уравнения равновесия (1.7) получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u = 0. \quad (1.11)$$

Пусть искомые функции представимы в виде

$$\Phi(r, t) = \Phi^{(0)}(r) + \sum_{k=1}^n \Phi^{(k)}(r) e^{\sigma_k t + \gamma_k}. \quad (1.12)$$

С учетом этого уравнение (1.11) принимает вид

$$\frac{d^2 u^{(k)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du^{(k)}}{dr} - \frac{2}{r^2} u^{(k)} = 0, \quad (k = 0 \dots n). \quad (1.13)$$

Отсюда, получаем

$$u^{(e)} = a_{11}^{(0)} r + \frac{a_{12}^{(0)}}{r^2} + \sum_{k=1}^n \left(a_{11}^{(k)} r + \frac{a_{12}^{(k)}}{r^2} \right) e^{\sigma_k t + \gamma_k}, \quad (1.14)$$

где $a_{11}^{(k)}, a_{12}^{(k)}, k=0, \dots, n$ — постоянные интегрирования.

Согласно (1.10), (1.12), (1.14) компоненты напряжений, в упругой области имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(e)} &= (2 + 3\lambda_0) a_{11}^{(0)} - \frac{4a_{12}^{(0)}}{r^3} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left\{ (2 + 3\lambda_0) a_{11}^{(k)} - \frac{4a_{12}^{(k)}}{r^3} \right\} e^{\sigma_k t + \gamma_k}, \\ \sigma_\theta^{(e)} &= (2 + 3\lambda_0) a_{11}^{(0)} + \frac{2a_{12}^{(0)}}{r^3} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left\{ (2 + 3\lambda_0) a_{11}^{(k)} + \frac{2a_{12}^{(k)}}{r^3} \right\} e^{\sigma_k t + \gamma_k}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Согласно (1.1)—(1.6) система уравнений описывающих напряженно-деформированное состояние в пластической области запишется следующим образом.

– Уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \sigma_\theta - \sigma_\varphi = 0. \quad (1.16)$$

– Соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} u. \quad (1.17)$$

– Соотношения для полных деформаций

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^p + \varepsilon_r^e, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_\theta^e. \quad (1.18)$$

– Закон Гука для напряжений в упругой области

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (2 + \lambda_0) \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{\lambda_0}{r} u, \\ \sigma_\theta &= (2 + \lambda_0) \frac{u}{r} + \lambda_0 \frac{\partial u}{\partial r}.\end{aligned}\quad (1.19)$$

– Функция нагружения

$$F = \sqrt{\Sigma_r^2 + \Sigma_\theta^2 + \Sigma_\varphi^2} + \alpha\sigma_1 - K_0, \quad (1.20)$$

где $\Sigma_r^2 = (S_r - c_0 e_r^p - \eta_0 e_r^{p'})^2$, $\Sigma_\theta^2 = (S_\theta - c_0 e_\theta^p - \eta_0 e_\theta^{p'})^2$, $\Sigma_\varphi^2 = (S_\varphi - c_0 e_\varphi^p - \eta_0 e_\varphi^{p'})^2$.

– Ассоциированный закон пластического течения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial t} &= \xi \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{S_r - c_0 e_r^p - \eta_0 e_r^{p'}}{K_0 - \alpha\sigma_1} \right) + \psi(\sigma_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon_\theta^p}{\partial t} &= \xi \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{S_\theta - c_0 e_\theta^p - \eta_0 e_\theta^{p'}}{K_0 - \alpha\sigma_1} \right) + \psi(\sigma_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon_\varphi^p}{\partial t} &= \xi \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{S_\varphi - c_0 e_\varphi^p - \eta_0 e_\varphi^{p'}}{K_0 - \alpha\sigma_1} \right) + \psi(\sigma_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}.\end{aligned}\quad (1.21)$$

Из условия осесимметричности задачи $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$ выводим:

$$S_\theta = -\frac{1}{2} S_r, \quad e_\theta = -\frac{1}{2} e_r. \quad (1.22)$$

С учетом этого, функция нагружения (1.20) примет вид

$$F = \alpha\sigma_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} (S_r - c_0 e_r^p - \eta_0 e_r^{p'}) - K_0. \quad (1.23)$$

Из (1.23), получаем

$$\frac{S_r - c_0 e_r^p - \eta_0 e_r^{p'}}{K_0 - \alpha\sigma_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (1.24)$$

Принимая во внимание соотношения (1.22), (1.24) из уравнений ассоциированного закона пластического течения получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial t} &= \xi \left(\frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \psi(\sigma_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon_\theta^p}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_\varphi^p}{\partial t} &= \xi \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \psi(\sigma_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial t},\end{aligned}\quad (1.25)$$

В соответствии с уравнением (1.12), из соотношений (1.23), (1.25), получаем

$$\begin{aligned}\alpha\sigma_1^{(p)(k)} + \sqrt{\frac{3}{2}} [S_r^{(p)(k)} - (c_0 + \varpi_k \eta_0) e_r^{p(k)}] &= 0, \\ \alpha\sigma_1^{(p)(0)} + \sqrt{\frac{3}{2}} (S_r^{(p)(0)} - c_0 e_r^{p(0)}) &= K_0, \\ \varepsilon_r^{p(k)} &= \frac{\xi^{(k)}}{\varpi_k} \left(\frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \Psi \sigma_1^{(p)(k)}, \\ \varepsilon_\theta^{p(k)} &= \frac{\xi^{(k)}}{\varpi_k} \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \Psi \sigma_1^{(p)(k)}, \\ \xi^{(0)} \left(\frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) &= 0, \\ \xi^{(0)} \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) &= 0.\end{aligned}\quad (1.26)$$

Из последних соотношений (1.26), учитывая, что

$$\frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0, \quad \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0,$$

следует, что

$$\xi^{(0)} \equiv 0. \quad (1.27)$$

Рассмотрим второе уравнение (1.26). Обозначим

$$\alpha\sigma_1^{(p)(0)} = q_1(r), \quad S_r^{(p)(0)} - c_0 e_r^{p(0)} = q_2(r). \quad (1.28)$$

Тогда данное соотношение переписывается в виде

$$\alpha q_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} q_2 = K_0. \quad (1.29)$$

Таким образом

$$q_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} (K_0 - \alpha q_1). \quad (1.30)$$

Из уравнений (1.28), учитывая закон Гука (1.19), соотношения Коши (1.17), соотношения для полных деформаций (1.16), можно получить

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(p)(0)} &= \frac{4c_0}{3(2+c_0)} \frac{du^{(p)(0)}}{dr} - \frac{4c_0}{3(2+c_0)} \frac{u^{(p)(0)}}{r} + \\ &+ q_1 + 2 \frac{\sqrt{6}}{3(c_0+2)} (K_0 - \alpha q_1), \\ \sigma_\theta^{(p)(0)} &= -\frac{2c_0}{3(2+c_0)} \frac{du^{(p)(0)}}{dr} + \frac{2c_0}{3(2+c_0)} \frac{u^{(p)(0)}}{r} + \\ &+ q_1 + \frac{\sqrt{6}}{3(c_0+2)} (\alpha q_1 - K_0).\end{aligned}\quad (1.31)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения равновесия (1.16) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u^{(p)(0)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du^{(p)(0)}}{dr} - \frac{2}{r^2} u^{(p)(0)} + \\ & + \frac{3(2+c_0) - 2\alpha\sqrt{6}}{4c_0} \frac{dq_1}{dr} - \frac{3\sqrt{6}}{2rc_0} q_1 + \\ & + \frac{2\sqrt{6}K_0}{2rc_0} = 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Решая данное уравнение, получаем выражение для компонент перемещений в пластической области

$$u^{(p)(0)} = a_{21}^{(0)} r + \frac{a_{22}^{(0)}}{r^2}, \quad q_1 = \frac{1}{\alpha} (K_0 + \alpha f_1 r^n), \quad (1.33)$$

где $a_{21}^{(0)}$, $a_{22}^{(0)}$, f_1 — константы интегрирования, $n = \frac{6\sqrt{6}\alpha}{6 + 3c_0 - 2\sqrt{6}\alpha}$.

С учетом этого из (1.31) получаем выражение для компонент напряжений в пластической области

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(p)(2)} &= -\frac{4c_0}{(2+c_0)r^3} a_{22}^{(0)} + \frac{K_0}{\alpha} + \\ &+ \frac{6+3c_0-2\sqrt{6}\alpha}{3(2+c_0)} f_1 r^n, \\ \sigma_\theta^{(p)(2)} &= \frac{2c_0}{(2+c_0)r^3} a_{22}^{(0)} - \frac{K_0}{\alpha} + \\ &+ \frac{6+3c_0+\sqrt{6}\alpha}{3(2+c_0)} f_1 r^n. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Из первого, третьего и четвертого уравнений системы (1.26), для k -го значения выводим

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(p)(k)} &= b_{11}^{(k)} \frac{du^{(p)(k)}}{dr} + b_{12}^{(k)} \frac{u^{(p)(k)}}{r}, \\ \sigma_\theta^{(p)(k)} &= b_{21}^{(k)} \frac{du^{(p)(k)}}{dr} + b_{22}^{(k)} \frac{u^{(p)(k)}}{r}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11}^{(k)} &= \frac{1}{\Delta} [(2+3\lambda_0)(4\alpha^2 - 4\sqrt{6}\alpha + 12\Psi\{c_0 + \eta_0\varpi_k\} + 6) + \\ &+ 9(2+\lambda_0)(c_0 + \eta_0\varpi_k)], \\ b_{12}^{(k)} &= \frac{1}{\Delta} [18\lambda_0(c_0 + \eta_0\varpi_k) - \\ &- (2+3\lambda_0)(4\alpha^2 + 2\sqrt{6}\alpha + 12\Psi\{c_0 + \eta_0\varpi_k\} - 12)], \\ b_{21}^{(k)} &= \frac{b_{12}^{(k)}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{22}^{(k)} &= \frac{1}{\Delta} [(2+3\lambda_0)(2\alpha^2 + 4\sqrt{6}\alpha + 6\Psi\{c_0 + \eta_0\varpi_k\} + 12) + \\ &+ 18(1+\lambda_0)(c_0 + \eta_0\varpi_k)], \\ \Delta &= 3[\alpha^2(2+3\lambda_0) + 3(2+c_0 + \eta_0\varpi_k)(1 + \Psi\{2+3\lambda_0\})]. \end{aligned}$$

Подставляя соотношения (1.35) в уравнения равновесия (1.16) получаем

$$\frac{d^2 u^{(p)(k)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du^{(p)(k)}}{dr} - \frac{(2+l_3^{(k)})}{r^2} u^{(p)(k)} = 0, \quad (1.36)$$

где

$$l_1^{(k)} = \frac{18\sqrt{6}\alpha(2+3\lambda_0)}{A + 9(2+\lambda_0)(c_0 + \eta_0\varpi^{(k)})},$$

$$A = (2+3\lambda_0)[4\alpha^2 - 4\sqrt{6}\alpha + 12\Psi(c_0 + \eta_0\varpi^{(k)}) + 6].$$

Решая уравнение (1.36), получаем

$$u^{(p)(k)} = a_{21}^{(k)} r^{n_1^{(k)}} + a_{22}^{(k)} r^{n_2^{(k)}}. \quad (1.37)$$

Здесь

$$n_1^{(k)} = \frac{-1 + \sqrt{9 + 4l_1^{(k)}}}{2}, \quad n_2^{(k)} = -\frac{1 + \sqrt{9 + 4l_1^{(k)}}}{2}.$$

Таким образом соотношения (1.35), определяющие поле напряжений в области $V^{(p)}$, при $k=1\dots n$, запишутся так

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(p)(k)} &= (b_{11}^{(k)} n_1^{(k)} + b_{12}^{(k)}) a_{21}^{(k)} r^{n_1^{(k)}-1} + \\ &+ (b_{11}^{(k)} n_2^{(k)} + b_{12}^{(k)}) a_{22}^{(k)} r^{n_2^{(k)}-1}, \\ \sigma_\theta^{(p)(k)} &= (b_{21}^{(k)} n_1^{(k)} + b_{22}^{(k)}) a_{21}^{(k)} r^{n_1^{(k)}-1} + \\ &+ (b_{21}^{(k)} n_2^{(k)} + b_{22}^{(k)}) a_{22}^{(k)} r^{n_2^{(k)}-1}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Для нахождения неизвестных констант интегрирования $a_{11}^{(k)}, a_{12}^{(k)}, a_{21}^{(k)}, a_{22}^{(k)}, f_1$ $k=0\dots n$, а также внутреннего безразмерного радиуса сферической полости a_* используются граничные условия и условия сопряжения в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= P_0, \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \\ \sigma_r &= p_0, \quad \text{при } r = a_*, \\ [\sigma_r]_{r=1} &= 0, \\ [\sigma_\theta]_{r=1} &= 0, \\ [u]_{r=1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Здесь квадратные скобки означают разницу между упругой и пластической составляющими тензоров напряжений и перемещений.

В качестве начального условия используется принятое ранее предположение о том, что в начальный момент времени зарождение пластической зоны происходит от границы полости, то есть:

$$a_*|_{t=0} = 1. \quad (1.40)$$

Таким образом, соотношения (1.14)—(1.15), (1.33)—(1.34), (1.37)—(1.38), при уче-

те уравнений (1.39)—(1.40), полностью описывают напряженно-деформированное состояние рассматриваемой задачи.

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 2—4. При этом, на рисунках с индексом «а» приведены, согласно (*), характерные зависимости от времени внешних $P(t)$ и внутренних $p(t)$ нагрузок, а на рисунках с индексом «б» — соот-

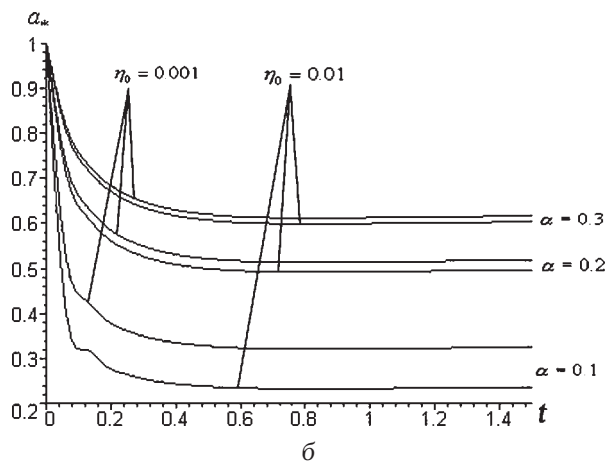
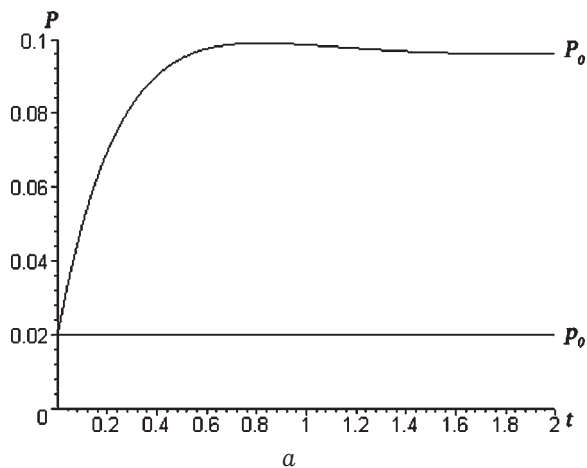


Рис. 2

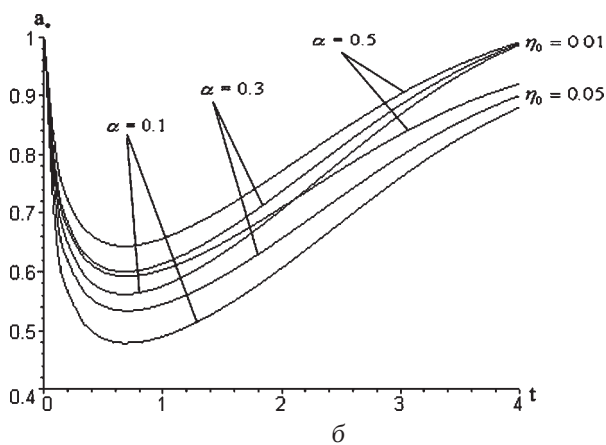
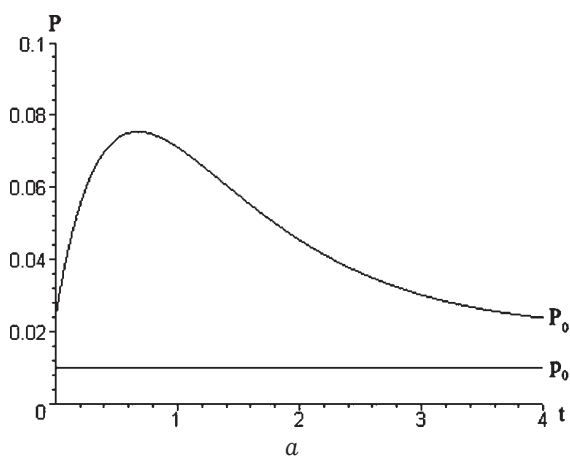


Рис. 3

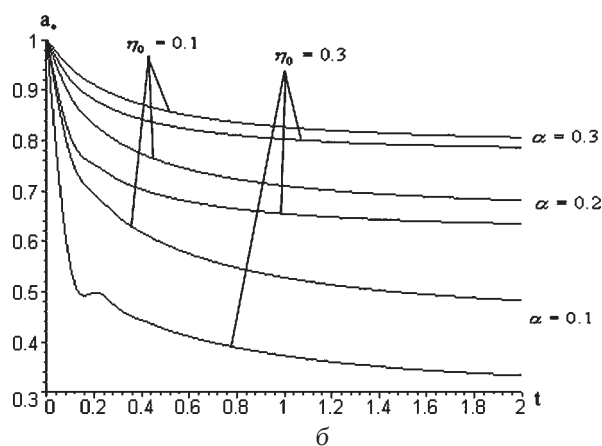
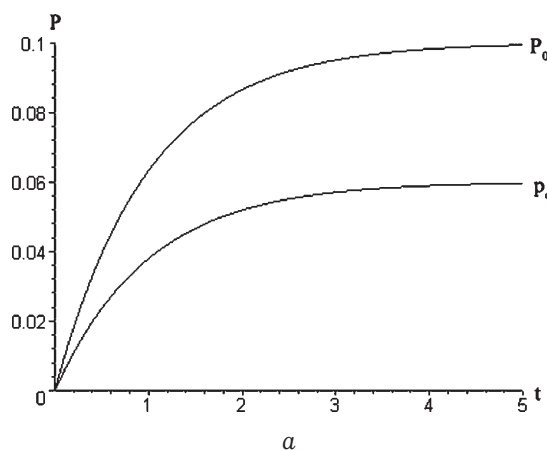


Рис. 4

ветствующая данным нагрузкам изменение величины $a_* = \frac{a}{r_s}$ во времени ($r_s(t)$ — текущий радиус упруго-пластической границы).

Кривые на рис. 2,б — 4,б построены для следующих значений физико-механических параметров материала (песчаник): $0 < \alpha < 1$, $\lambda_0 = 1.5$, $c_0 = 2.3814$, $K_0 = 0.0137$, $0 \leq \eta_0 \leq 1$, $\varpi_k = -k$, $\gamma_k = 0$, $k=1, 2$.

Из анализа полученных численных результатов следует, что динамическое расширение полости, при рассмотренном нагружении (рис. 2,б — 4,б), принимает с течением времени постоянное значение. Очевидно, что последнее обусловлено, как следует из рис., стабилизационной ролью вязкости в среде. При этом с увеличением скорос-

ти дилатансии внутренний радиус полости увеличивается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Кривоченко, А. В. Деформирование бесконечного пространства, ослабленного сферической полостью / А. В. Кривоченко, А. Н. Спорыхин, А. С. Чеботарев // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике / Б. м., 2001. — С. 268—274.
2. Спорыхин, А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т., 1997. — 360 с.
3. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — М. : Наука, 1978. — 208 с.
4. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. — М. : Физматлит, 2001. — 701 с.