УДК 517.95

ОБ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ С СОИЗМЕРИМЫМИ РЕБРАМИ

А. В. Копытин

Воронежский государственный университет

Рассматривается задача Коши для волнового уравнения на графе Г с соизмеримыми ребрами

$$u_{tt} = \Delta_\Gamma u, \tag{1}$$

$$u(0) = \varphi,\ u'(0) = \psi, \tag{2}$$

где Δ_Γ — оператор Лапласа-Бельтрами (т.е. оператор взятия второй производной по натуральному параметру вдоль каждого ребра Г). В случае симметрического оператора Δ_Γ доказывается ограниченность всех решений задачи (1), (2) и устанавливается соответствующая оценка.

Гиперболические уравнения на сетях (геометрических графах) и соответствующие спектральные задачи интенсивно изучаются уже более 20 лет. Продвижения в этой области получены по нескольким направлениям. Установлены осцилляционные свойства спектра краевой задачи на сети (см. [5]—[7]), получены оценки на собственные значения (см. [2, 10]), найдены условия существования и единственности решения задачи Коши (см. [8]), получен аналог формулы Даламбера (см. [3]).

В настоящей работе доказывается ограниченность решения волнового уравнения на графе с соизмеримыми ребрами для симметрического оператора Лапласа—Бельтрами и устанавливается соответствующая оценка.

Пусть X — банахово пространство и $\mathcal{L}(X)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X.

Определение 1. Семейство $\{C(t): t \in \mathbb{R}\}$ операторов из $\mathcal{L}(X)$ называется сильно непрерывной косинус-функцией (КОФ), если оно удовлетворяет условиям:

1. $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$, $t, s \in \mathbb{R}$;
2. $C(0) = I$, I — тождественный оператор в X;
3. $C(t)x$ непрерывна по t при любом $x \in X$.

Линейный оператор $A: D(A) \subset X \to X$ с областью определения $D(A)$ называется генератором КОФ C если

$$D(A) = \left\{ \begin{matrix} x \in X : \text{предел } \lim\limits_{t\to 0}(C(2t)x - x)/2t^2 \\ \text{существует} \end{matrix} \right\}$$

и

$$Ax = -\lim_{t\to 0}(C(2t)x - x)/2t^2 = -C''(0)x.$$

С каждой КОФ будем связывать сильно непрерывную синус-функцию (СОФ) S, определяемую как

$$S(t)x = \int_0^t C(s)x ds,\ \ x \in X, t \in \mathbb{R}.$$

Как известно (см. [9]), задача Коши

$$u'' + Au = 0, \tag{1}$$

$$u(0) = \varphi,\ u'(0) = \psi \tag{2}$$

для уравнения (1) с оператором $A: D(A) \subset \subset X \to X$ таким, что $\overline{D(A)} = X$ и $\rho(A) \neq \varnothing$, равномерно корректно разрешима (см. определение в [9]) тогда и только тогда, когда A является генератором сильно непрерывной КОФ C. В этом случае решение задачи (1), (2) может быть записано в виде

$$u(t) = C(t)\varphi + S(t)\psi. \tag{3}$$

Функции, представимые в виде (3), называются обобщенными решениями задачи (1), (2) (слово «обобщенное» мы будем опускать в дальнейшем).

Рассмотрим геометрический граф Г — связное множество в $\mathbb{R}^N$, представляющее собой объединение конечного числа криволинейных отрезков $\{e_i\}_{i=1}^n$, называемых ребрами графа, точками пересечения которых могут быть лишь их концы, называемые вершинами графа. Множество вершин обозначим буквой V, а их количество — m. Пусть v — произвольная вершина из V. Через $I(v)$ обозначим множество индексов ребер, примыкающих к v. Фиксируем некоторые вершины, принадлежащие единственному ребру, и назовем их граничными. Множество граничных вершин обозначим через $\partial\Gamma$. Предполагается, что $\partial\Gamma \neq \varnothing$. Остальные вершины Γ назовем внутренними.

Мы будем рассматривать случай, когда длины ребер e_i графа Γ рационально соизмеримы. В этом случае, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что все ребра имеют единичную длину. Для каждого ребра e_i графа Γ фиксируем далее натуральную параметризацию $\gamma_i : [0,1] \to e_i$, устанавливая тем самым ориентацию на Γ. Вершину $v \in e_i$ назовем начальной (конечной) вершиной ребра e_i, если $v = \gamma_i(0)$ ($v = \gamma_i(1)$). Для $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ через u_i будем обозначать функцию, заданную на отрезке $[0,1]$ следующим образом:

$$u_i(\xi) = u(\gamma_i(\xi)),\ \xi \in [0,1].$$

Для $u : \Gamma \to \mathbb{R}$, $v_k \in V$ и произвольного $i \in I(v_k)$ определим также функцию $u_{i,k}$ на отрезке $[0,1]$

$$u_{i,k}(\xi) = \begin{cases} u_i(\xi), & \text{если } v_k - \text{начальная вершина } e_i, \\ u_i(1-\xi), & \text{если } v_k - \text{начальная вершина } e_i. \end{cases} \tag{4}$$

Поставим в соответствие каждому ребру e_i графа Γ некоторое положительное число p_i и каждому ребру e_i и принадлежащей ему вершине $v_k \in V$ число

$$\alpha_{i,k} = \frac{p_i}{\sum\limits_{j \in I(v_k)} p_j}.$$

Легко видеть, что $\sum\limits_{i \in I(v_k)} \alpha_{i,k} = 1$.

Пусть $C_0(\Gamma)$ — пространство непрерывных функций $u : \Gamma \to \mathbb{R}$, обращающихся в нуль на $\partial\Gamma$. В пространстве $C_0(\Gamma)$ рассмотрим оператор $\Delta_\Gamma = d^2 / dx^2$ двукратного дифференцирования по натуральному параметру вдоль каждого ребра e_i с областью определения $D(\Delta_\Gamma)$, состоящей из функций, дважды непрерывно дифференцируемых на каждом отрезке и удовлетворяющих условию согласования $\sum\limits_{i \in I(v_k)} \alpha_{i,k} u'_{i,k}(0+) = 0$ в любой внутренней вершине v_k.

Пусть f — произвольная функция из $C_0(\Gamma)$. Построим семейство функций $\{\tilde{f}_{i,k}\}$, $v_k \in V$, $i \in I(v_k)$ определенных на промежутке $[0,+\infty)$ и удовлетворяющих следующему рекурсивному соотношению:

$$\tilde{f}_{i,k}(\xi) = \begin{cases} f_{i,k}(\xi),\ \xi \in [0,1], \\ 2\sum\limits_{j \in I(v_l)} \alpha_{j,l} \tilde{f}_{j,l}(\xi-1) - \tilde{f}_{i,l}(\xi-1),\ \xi \in (1,+\infty), \end{cases} \tag{5}$$

где v_l — другой конец ребра. Далее для каждого ребра e_i, имеющего своим началом вершину v_k и концом v_l, определим на всей числовой оси функцию $\tilde{f}_i(\xi)$ следующим образом

$$\tilde{f}_i(\xi) = \begin{cases} \tilde{f}_{i,k}(\xi), & \xi \in [0,+\infty), \\ \tilde{f}_{i,l}(1-\xi), & \xi \in (-\infty,0) \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 1. *Оператор $-\Delta_\Gamma$ порождает в $C_0(\Gamma)$ сильно непрерывную КОФ C, представимую в виде*

$$C(t) = \frac{1}{2}(T(t) + T(-t)), \tag{7}$$

где $\{T(t), t \in \mathbb{R}\}$ — группа операторов, задаваемых формулами

$$(T(t)f)_i(\xi) = \tilde{f}_i(\xi + t),\ \xi \in [0,1], t \in \mathbb{R}$$

для любой функции $f \in C_0(\Gamma)$ и каждого $i = 1,2,\ldots,m$.

Доказательство теоремы см. в [3].

Занумеруем пары (e_i, v_k) ($v_k \in V, i \in I(v_k)$) числами $\mu = 1,2,\ldots,2n$, где n — число ребер графа Γ. Введем в рассмотрение пространство $2n$-векторов $\mathbb{R}_2^{2n}$, со скалярным произведением

$$(U,W) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i \in I(v_k)} p_i U_\mu W_\mu,$$

где μ — номер пары (e_i, v_k). На том же конечномерном пространстве введем еще одну норму

$$\|U\|_\infty = \max_{1 \le \mu \le 2n} |U_\mu|.$$

Такое нормированное пространство будем обозначать далее символом $\mathbb{R}_\infty^{2n}$. Легко видеть, что нормы в $\mathbb{R}_2^{2n}$ и $\mathbb{R}_\infty^{2n}$ связаны соотношением

$$\sqrt{\min_{1\le i\le n} p_i}\,\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\|_2 \le \sqrt{2\sum_{i=1}^n p_i}\,\|\cdot\|_\infty. \qquad (8)$$

Теорема 2. *КОФ C в пространстве $C_0(\Gamma)$ ограничена на $\mathbb{R}$, и для операторов $C(t)$ ($t\in\mathbb{R}$), рассматриваемых в $C_0(\Gamma)$, имеет место оценка*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|C(t)\| \le K = \sqrt{2\sum_{i=1}^n p_i \Big/ \min_{1\le i\le n} p_i}. \qquad (9)$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из $C_0(\Gamma)$. Из формул (5) и (6) следует, что для любых $v_k\in V$ и $i\in I(v_k)$ при каждом $k\in\mathbb{Z}$ имеем

$$(T(k)f)_{i,k}(\xi) = \sum_{l=1}^m \sum_{j\in I(v_l)} a_{\mu\nu}^{(k)} f_{j,l}(\xi),\ \ \xi\in[0,1], \qquad (10)$$

где μ — номер пары (e_i, v_k), ν — номер пары (e_j, v_l), а $a_{\mu\nu}^{(k)}$ — элементы некоторой матрицы A_k. Заметим, что матрица A_k полностью определяет оператор $T(k)$ по формулам (10). Поскольку $\{T(t), t\in\mathbb{R}\}$ — группа унитарных операторов в пространстве $L_2(\Gamma)$ (см. [3]), $\{A_k, k\in\mathbb{Z}\}$ — группа унитарных матриц в пространстве $\mathbb{R}_2^{2n}$.

В силу унитарности матриц A_k, $k\in\mathbb{Z}$, для любого вектора U

$$\|A_kU\|_2 = \|U\|_2.$$

Тогда с учетом соотношения (8) имеем

$$\|A_kU\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{\min_{1\le i\le n} p_i}}\|A_kU\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\min_{1\le i\le n} p_i}}\|U\|_2 \le \frac{\sqrt{2\sum_{i=1}^n p_i}}{\sqrt{\min_{1\le i\le n} p_i}}\|U\|_\infty.$$

Таким образом,

$$\|A_k\|_{R_\infty^{2n}} = \max_{1\le\mu\le 2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\left|a_{\mu\nu}^{(k)}\right| \le K,$$

где $K = \sqrt{2\sum_{i=1}^n p_i \Big/ \min_{1\le i\le n} p_i}$. Тогда из формул (10) следует, что для любой функции $f\in C_0(\Gamma)$ при каждом $k\in\mathbb{Z}$ имеем

$$\sup_{x\in\Gamma\setminus V}\left|(T(k)f)(x)\right| \le \max_{1\le\mu\le 2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\left|a_{\mu\nu}^{(k)}\right|\cdot\sup_{x\in\Gamma}|f(x)| \le \le K\sup_{x\in\Gamma}|f(x)|.$$

Покажем, что оценка

$$\sup_{x\in\Gamma\setminus V}\left|(T(t)f)(x)\right| \le K\sup_{x\in\Gamma}|f(x)| \qquad (11)$$

выполнена для любого $t\in\mathbb{R}$. Пусть e_i — произвольное ребро, а v_k — его начальная вершина. В силу формулы (3), при каждом $k\in\mathbb{Z}$ имеем

$$\tilde f_i(\xi+k) = (T(k)f)_{i,k}(\xi) = = \sum_{k=1}^m\sum_{j\in I(v_l)} a_{\mu\nu}^{(k)} f_{j,l}(\xi),\ \ \xi\in[0,1].$$

Тогда при $t\in[k,k+1]$ и $\xi\in[0,1]$ получаем

$$\left|(T(t)f)_i(\xi)\right| = \left|\tilde f_i(\xi+t)\right| \le$$
$$\le \max\left\{\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\left|a_{\mu\nu}^{(k)}\right|, \sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\left|a_{\mu\nu}^{(k+1)}\right|\right\}\sup_{x\in\Gamma}|f(x)| \le$$
$$\le K\sup_{x\in\Gamma}|f(x)|,$$

т.е.

$$\sup_{\xi\in[0,1]}\left|(T(t)f)_i(\xi)\right| \le K\sup_{x\in\Gamma}|f(x)|,$$

откуда, в силу произвольности выбора ребра e_i, и получаем оценку (11) для любого $t\in\mathbb{R}$. Тогда при каждом $t\in\mathbb{R}$ имеем

$$\sup_{x\in\Gamma}\left|(C(t)f)(x)\right| = \frac{1}{2}\sup_{x\in\Gamma\setminus V}\left|(T(t)f)(x) + (T(-t)f)(x)\right| \le$$
$$\le \frac{1}{2}\left(\sup_{x\in\Gamma\setminus V}\left|(T(t)f)(x)\right| + \sup_{x\in\Gamma\setminus V}\left|(T(-t)f)(x)\right|\right) \le$$
$$\le K\sup_{x\in\Gamma}|f(x)|.$$

Таким образом, для произвольной функции f из $C_0(\Gamma)$ получаем

$$\|C(t)f\| \le K\|f\|.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$u''(t) = (\Delta_\Gamma u)(t), \qquad (12)$$

$$u(0) = \varphi, u'(0) = \psi, \qquad (13)$$

где $\varphi,\psi\in C_0(\Gamma)$.

Теорема 2. *Для любых* φ *и* ψ *из* $C_0(\Gamma)$ *решение задачи (5), (6) ограничено на* $\mathbb{R}$, *и справедлива оценка*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)\| \le K\left(\|\varphi\| + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_1}}\|\psi\|\right), \tag{14}$$

где λ_1 *— первое собственное значение оператора* $-\Delta_\Gamma$.

Доказательство. Поскольку КОФ C ограничена на $\mathbb{R}$ и $0 \notin \sigma(-\Delta_\Gamma)$, для СОФ S верна следующая оценка (см. [1])

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|S(t)\| \le \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_1}}\sup_{t\in\mathbb{R}}\|C(t)\|,$$

где λ_1 — ведущее собственное значение оператора $-\Delta_\Gamma$. Тогда с учетом оценки (9) для каждого $t \in \mathbb{R}$ получаем

$$\|u(t)\| = \|C(t)\varphi + S(t)\psi\| \le \|C(t)\varphi\| + \|S(t)\psi\| \le$$
$$\le K\left(\|\varphi\| + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_1}}\|\psi\|\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций / А. Г. Баскаков // Матем. сб. — 1984. — Т. 124(166). —С. 68—95.

2. *Завгородний М.Г.* Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе/ М. Г. Завгородний // ДАН. — 1994. — Т. 335, 3. — С. 281—283.

3. *Копытин А. В.* Некоторые вопросы теории эволюционных задач на сетях/ А. В. Копытин. Автореф. канд. дисс. — Воронежский гос. ун-т, 2002. — 19 с.

4. *Покорный Ю.В.* О функции Грина задачи Дирихле на графе / Ю. В. Покорный, И. Г. Карелина // Доклады АН СССР. — 1991. — Т. 318, 3. — С. 942—944.

5. *Покорный Ю. В.* Теоремы Штурма для уравнений на графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин // Доклады АН СССР. — 1989. — Т. 309, 6. — С. 1306—1308.

6. *Покорный Ю. В.* О теоремах сравнения для уравнений на графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин // Дифференц.уравнения. — 1989. — Т. 25, 7. — С. 1141—1150.

7. *Покорный Ю. В.* О распределении нулей собственных функций задачи Штурма—Лиувилля на пространственной сети / Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, 3. — С. 316—318.

8. *Ali-Mehmeti F.* Nonlinear waves in networks / F. Ali-Mehmeti. — Academie-Verlag, 1994. — 173 c.

9. *Fattorini H.* O. Second-order kinear differential equations in Banach spaces / H. O. Fattorini — Amsterdam, 1985.

10. *Nicaise S.* Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission / S. Nicaise // Lect.Notes Math. — 1771. — Springer-Verlag, 1985. — С. 532—541.