

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИЙ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ В ЗАДАЧЕ Л. ГАЛИНА

Н. А. Кончакова

Воронежский государственный университет

В работе рассматривается проблема определения поля перемещений в задаче Л.Галина с привлечением основных положений синтетической теории прочности. Показана возможность реализации линий сингулярностей поля деформаций в пластической области. Приведены результаты численного решения задачи о несимметричном растяжении пластины с круговым отверстием упругопластического материала, обладающего свойствами хрупкого разрушения.

1. Механика хрупкого разрушения формулирует критерии разрушения в виде инвариантных связей критических значений макрохарактеристик процессов деформирования, и в настоящее время все больше опирается на методы физики твердого тела и современные разделы механики, учитывающие микроструктуру материала [1—4].

Известны экспериментальные исследования физической картины деформирования материалов при хрупком разрушении, которые показывают, что нагружение в режиме заданных перемещений позволяет зарегистрировать так называемую ниспадающую ветвь (послепиковую прочность) [5]. Выявлена несимметричная схема деформирования ряда материалов (горные породы, сыпучие материалы). Прослеживается появление размера и анизотропии сопротивления сдвигу в изначально однородном изотропном теле. Аналитически эти свойства среды могут быть обоснованы введением нового набора инвариантов напряженного состояния [6]:

$$T = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \text{ и } \mu_\sigma = \frac{\sigma_2 - \sigma_n}{T},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — напряжения на основных площадках, μ_σ — параметр Лоде—Надаи. Инвариант σ_n не зависит от главных направлений, а инвариант μ_σ , так же как и T , связан с ориентацией главных осей и отражает влияние двух других экстремальных касательных напряжений. Параметр Лоде—Надаи ак-

центрирует внимание на роли площадок с экстремальными касательными напряжениями и указывает на необходимость учета вида напряженного состояния. Введение в рассмотрение инвариантов T, σ_n, μ_σ позволяет отразить в математической модели возникающую при необратимых деформациях и разрушении анизотропию сопротивления сдвигам [7, 9]. Моделирование процессов пластического деформирования с привлечением указанного набора инвариантов позволяет исследовать наблюдаемую в экспериментах [8] связь между максимальным касательным напряжением и величиной главного сдвига: $T = T(\Gamma)$, где Γ — величина главного сдвига. При деформировании и хрупком разрушении горных пород за пределом упругости фактически образуется новый материал, в котором пластическая деформация осуществляется за счет разделения тела на отдельные блоки, перемещения их вдоль поверхностей скольжения с вращением таким образом, чтобы в результате образовалась квазисплошная среда [10]. Это положение является ключевой идеей модели синтетической теории прочности твердых тел [1, 9]. Величина Γ выступает в роли независимого дополнительного параметра, описывающего пластическую деформацию.

Достижение главным сдвигом предельного значения инициирует рост зоны необратимых деформаций, при постоянном значении максимального касательного напряжения. Условие соосности тензоров напряжений и деформаций может быть нарушено. Возникает состояние сложного нагружения.

Подготовка к разрушению (предразрушение) реализуется в некоторой области в окрестности зоны концентрации напряжений, являющейся, по сути, классической зоной пластического течения.

2. Рассмотрим задачу Л. Галина о растяжении толстой пластины с круговым отверстием для упругопластического тела, обладающего свойствами хрупкого разрушения. В такой постановке могут решаться задачи о деформировании горного массива в окрестности выработки круглого поперечного сечения. Заданные растягивающие усилия на бесконечности и равномерно распределенные нагрузки на контуре отверстия суть результат тектонических и техногенных нагрузок, действующих на горную породу.

Пусть в окрестности отверстия материал подчиняется условию текучести

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_{xy}^2 = T^2$$

Поле напряжений такой задачи известно [11].

Требование конечности деформаций при достижении напряжениями предельных значений и дальнейшем росте величины главного сдвига в области необратимых деформаций выражается условием постоянства значения главного сдвига Γ_e [10]

$$(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \epsilon_{xy}^2 = \Gamma_e^2. \quad (1)$$

Система дифференциальных уравнений, описывающая поведение рассматриваемого материала имеет вид [7, 10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} - \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} + \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\Gamma_e}$, $\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$, $\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_y - \epsilon_x}$,

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$ — компоненты тензора деформаций. Значения функций $\epsilon_x(x, y), \epsilon_y(x, y), \epsilon_{xy}(x, y)$ связаны с переменной $\psi(x, y)$ и величиной главного сдвига зависимостью

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{1}{2} \Gamma_e \cos 2\psi, \epsilon_y = \frac{1}{2} \Gamma_e \cos 2\psi, \\ \epsilon_{xy} &= \Gamma_e \sin 2\psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (2) принадлежит к гиперболическому типу. Дифференциальные уравнения

характеристик и соотношения на них имеют вид:

$$\begin{aligned} dy &= \operatorname{ctg} \psi dx, \quad \tilde{\omega} + \psi = \alpha = \operatorname{const}, \\ dy &= -\operatorname{tg} \psi dx, \quad \tilde{\omega} - \psi = \beta = \operatorname{const}. \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений (2) дает возможность определить неизвестные ω и ψ в узлах сетки линий скольжения, а затем в каждой точке пластической области — от ее зарождения на упругопластической границе, до контура отверстия. Можно найти величины деформаций и перемещений по формулам (3) и дифференциальным соотношениям

$$\begin{aligned} du &= \left(\epsilon_x + \left(\frac{1}{2} \epsilon_{xy} - \omega \right) \frac{dy}{dx} \right) dx, \\ dv &= \left(\left(\frac{1}{2} \epsilon_{xy} + \omega \right) + \epsilon_y \frac{dy}{dx} \right) dx. \end{aligned}$$

Функция $\omega(x, y)$ описывает элементарный поворот структурных блоков, образовавшихся в среде вследствие деформирования, в рассматриваемом узле сетки линий скольжения; геометрический смысл функции $\psi(x, y)$ — угол наклона первого главного направления тензора деформаций с осью Oy .

Уравнения плоской задачи (2, 4) позволяют рассмотреть краевые задачи о хрупком разрушении твердых тел и определить конфигурацию линий разрушения материала при пластической деформации.

3. Проблема определения положения линий разрушения материала при заданных внешних нагрузках является базовой как в теории разрушения, так и в теории пластичности. Вычисление величин перемещений в зоне пластического деформирования, а также исследование свойств среды при достижении напряжениями критических значений позволяют судить о реальном поведении материала в области предразрушения. В частности, определение конфигурации линий разрушения материала в окрестности горной выработки, а также геометрии отверстия при заданных напряжениях на бесконечности и на контуре является весьма важной инженерной задачей в геомеханике и других отраслях [12]. Система уравнений (2) позволяет вычислить положение характеристик системы дифференциальных уравнений для деформаций и поэтапно просле-

дить развитие пластической области при заданных величинах внешних воздействий.

Численный анализ задачи проведен для случая нагружения $\sigma_x^\infty = 3.0$, $\sigma_y^\infty = 2.5$, давление на контуре отверстия $p = 0.1$ (величины напряжений отнесены к пределу текучести материала, линейные величины отнесены к радиусу отверстия). Интенсивности нагрузок на бесконечности выбираются из соображений выполнения условия полного охвата отверстия пластической областью. Величины найденных перемещений в окрестности упругопластической границы C весьма малы (порядка 10^{-4}) и потому мало их влияние на расчетное положение упругопластической границы.

Положение узлов сетки линий скольжения в зоне необратимых деформаций найдем из дифференциальных уравнений характеристик (4), заменив их разностными соотношениями. Для постановки задачи Коши в точках упругопластической границы воспользуемся условиями непрерывности компонент вектора перемещений при переходе через C . Узлы каждого внутреннего слоя (последовательного шага вычислений) соединим кривой, получив геометрию влияния пластических перемещений в окрестности отверстия.

На рис. 1 представлены контур отверстия (кривая l), упругопластическая граница

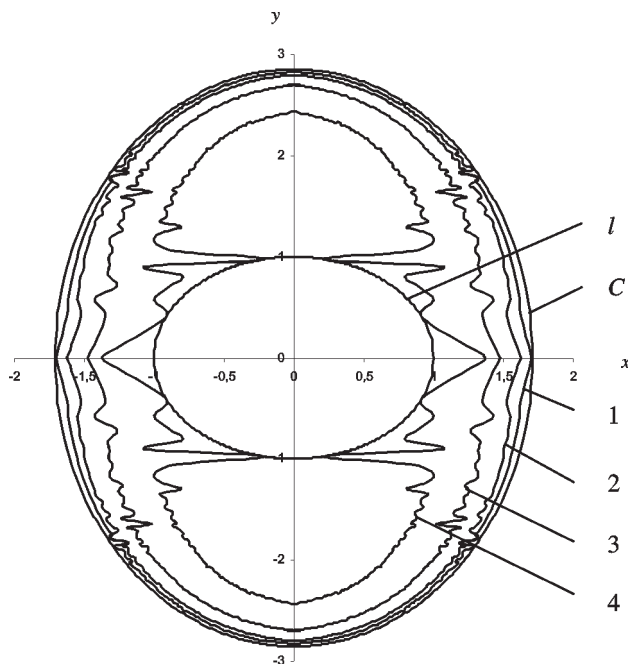


Рис. 1. Внутренние контуры сетки линий скольжения в окрестности отверстия

(кривая C), и внутренние контуры узлов сетки линий скольжения (кривые 1—4). Поведение внутренних слоев отражает развитие пластической деформации в зоне предразрушения. Анализ положения кривых 1—4 позволяет проследить усиление действия пластических деформаций на точки в окрестности отверстия. Кривая 4 — последний внутренний слой точек пересечения сетки реальных линий скольжения. Ее поведение вблизи контура дает основания утверждать, что отверстие вытягивается в направлении большего из действующих растягивающих напряжений. Следующий шаг по направлению к отверстию приводит к тому, что отдельные узлы сетки оказываются внутри отверстия.

Последовательное определение координат точек сетки линий — характеристик системы (2) от упругопластической границы до отверстия с учетом пластических перемещений и соединение их ломаной в соответствующую кривую дает приближенно сетку линий разделения материала на изолированные блоки. Решение упругопластической задачи с привлечением критерия (1), а, следовательно, системы (2, 4), позволяет проследить эволюцию пластической деформации, развития структуры, а в дальнейшем, и разрушения материала в терминах перемещений во всей пластической области от ее зарождения до отверстия, и определить положение реальных линий скольжения в зоне предразрушения.

Конфигурация линии узлов сетки характеристик, позволяет судить о поведении точек самого отверстия при пластической деформации массива: отверстие принимает вытянутую форму в сторону большего из действующих усилий на бесконечности, что качественно согласуется с результатами работ Д. Д. Ивлева [13]. Величины перемещений дают возможность оценить степень «искаженности» контура нагруженной выработки вследствие действующих внешних усилий.

Обратим особое внимание на области «негладкости» внутренних контуров 1—4. Анализ поведения характеристик напряженно-деформированного состояния материала в окрестности точек, инициирующих зарождение существенной искаженности внутренних контуров, показал, что зоны «вибрирования» первого внутреннего контура появляются в окрестности точек упругопласти-

ческой границы, где наблюдается смена знака деформации ε_{xy} . Дополнительно к этому, в этих точках функция $\psi(x, y)$ равна нулю. Производные функции $\psi(x, y)$ по переменной x и по переменной y обращаются в бесконечность при стремлении точки $M(x, y)$ вдоль кривой C к точке изменения знака компоненты ε_{xy} . К аналогичному результату приходим и при дальнейшем продвижении вглубь пластической области: производные функции $\psi(x, y)$ по переменной x и по переменной y обращаются в бесконечности при стремлении точек внутренних слоев сетки характеристик к точкам «негладкости» контура. Назовем эти точки особыми. Множество узлов сетки характеристик, в которых резко изменяется направление касательной к контуру рассматриваемого слоя, образуют особую линию поля деформаций. В данном случае линии особенностей отвечают существенным изменениям величин деформаций и физически соответствуют местам наибольшего проскальзывания структурных элементов вдоль поверхностей скольжения.

В работах академика С. А. Христиановича было отмечено наличие линий разрыва поля напряжений в случае сложного нагружения. Модель синтетической прочности позволяет получить линии разрыва поля деформаций, которые отражают формирование реальных линий скольжений вдоль структурных элементов сплошной среды, наблюдаемое в экспериментах по разрушению горных пород.

Линия особенностей F поля деформаций, объединяющая точки наибольшего отклонения кривых внутренних слоев сетки линий характеристик, представлена на рисунке 2 (в силу симметрии задачи результат приведен для $1/4$ части контура, где $x > 0, y > 0$).

Видно, что кривая F близка по направлению диагонали d первого и третьего координатных углов, а следовательно, образует с осью Ox угол $\vartheta = \frac{\pi}{4}$. Данный результат согласуется с результатами исследований в области мезомеханики относительно углов наклона характеристических линий разрушения и образования регулярных блочных структур в изначально изотропном однородном материале [7]. Далее, за линией

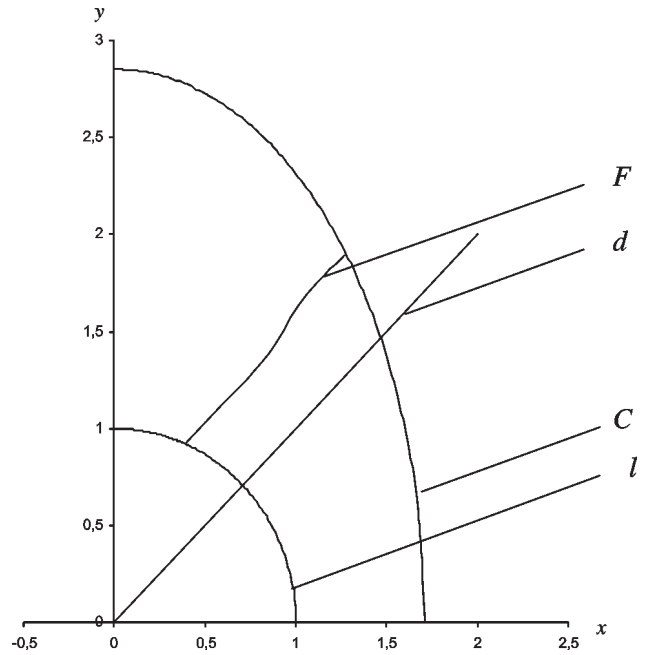


Рис. 2. Линия особенностей поля деформаций в окрестности отверстия

F , сетка узлов линий характеристик не имеет особенностей и иных сингулярностей не наблюдается. При переходе через кривую F компоненты тензора деформаций и компоненты вектора перемещений претерпевают резкое изменение значений. Это отражается на положении соответствующего узла сетки, который смещается сильнее других внутрь пластической области и инициирует появление «негладкости» контура рассматриваемого слоя. Чем ближе к отверстию расположен внутренний слой, тем сильнее сказывается на нем влияние пластичности и тем существенней отклонение «особого» узла сетки от расчетного положения, найденного по формулам (4).

Автор благодарит академика РАН Е. И. Шемякина за постановку задачи, обсуждение результатов статьи и помощь в работе.

Публикуемые в статье результаты обсуждались на семинаре «Современные проблемы механики и прикладной математики» кафедры теоретической и прикладной механики ВГУ, а также на семинаре кафедры газовой и волновой динамики МГУ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00749).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шемякин Е.И.* Синтетическая теория прочности. Ч. I // Физическая мезомеханика. 1999. 2, № 2. С. 63—69.
2. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов: в 2-х т. / под ред. В. Е. Панина. — Новосибирск: Наука, 1995. — Т. 1. — 298 с., Т. 2. — 320 с.
3. *Steinmann P.* A Micropolar Theory of Finite Deformation and Finite Rotation Multiplicative Elastoplasticity, *Int. J. Solids Structures*, 1994. Vol. 31, P. 1063—1084.
4. *Steinmann P.* Theory and Numerics of Ductile Micropolar Elastoplastic Damage, *Int. J. Num. Meth. Engr.* 1995. Vol. 38, P. 583—606.
5. *Ревуженко А.Ф.* Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ — Новосибирск: Изд. Новосибирского ун-та, 2000.
6. *Шемякин Е.И.* Об инвариантах напряженного и деформированного состояния в математических моделях механики сплошной среды // Докл. РАН. 2000. 373, № 5. С. 632—634.
7. *Кончакова Н.А.* О построении моделей сплошных сред с несимметричными тензорами // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2002. № 4. С. 42—48.
8. *Аннин Б.Д., Жигалкин В.М.* Поведение материалов в условиях сложного нагружения. — Новосибирск, Изд. СО РАН, 1999. 342 с.
9. *Шемякин Е.И.* О сдвиговой прочности горных пород // Физическая мезомеханика, 2004, Т. 7, № 6, С. 5—10.
10. *Шемякин Е.И.* О хрупком разрушении твердых тел (плоская деформация) // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1997. № 2. С. 145—150.
11. *Кончакова Н.А.* Анализ напряжений и перемещений на упругопластической границе в задаче Л. Галина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2004, № 2, С. 44—51.
12. *Спорыхин А.Н., Шашкин А.И.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, 232 с.
13. *Ивлев Д.Д.* Определение перемещений в плоской упругопластической задаче // Упруго-пластические задачи: Сб. статей под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1984. С. 166—169.